

توسعه نمودارهای کنترل جمع دنباله برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲

سید سجاد احتشامی^۱، امیرحسین امیری^{۲*}

۱. گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

۲. گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

خلاصه

در این مقاله یک نمودار کنترل جمع دنباله شوهارت مبتنی بر آماره مربع تی و یک نمودار کنترل جمع دنباله مبتنی بر آماره میانگین متحرک موزون نمایی چند متغیره برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ توسعه داده می‌شوند تا عملکرد نمودارهای کنترل موجود را در کشف تغییرات کوچک و متوسط در پارامترهای پروفایل‌های خطی ساده بهبود دهند. برای بررسی عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی از روش‌های زنجیره مارکوف و شبیه‌سازی براساس شاخص متوسط طول دنباله و انحراف معیار طول دنباله استفاده می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که نمودارهای کنترل پیشنهادی عملکرد بهتری از نمودارهای رقیب موجود در ادبیات موضوع دارند. همچنین تحلیل حساسیت روی تعداد پروفایل‌های تحت کنترل انجام شده و اثر آن روی معیارهای متوسط و انحراف معیار طول دنباله انجام می‌شود. در انتها یک مثال عددی برای نشان دادن کاربرد نمودارهای کنترل پیشنهادی ارائه شده است.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۴۰۴/۰۹/۰۸

بازنگری ۱۴۰۴/۱۲/۰۷

پذیرش ۱۴۰۴/۱۲/۱۵

(مقاله پژوهشی)

کلمات کلیدی:

نمودار کنترل جمع دنباله،

کنترل فرآیند آماری،

متوسط طول دنباله،

پایش پروفایل.

۱. مقدمه

در بسیاری از فرآیندهای تولیدی و خدماتی، پایش و کنترل کیفیت از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. کنترل فرآیند آماری روشی است که با استفاده از ابزارهای آماری منجر به کاهش پراکندگی و بهبود کیفیت فرآیند در حین تولید می‌شود. نمودارهای کنترل یکی از ابزارهای اصلی برای پایش فرآیندها و تشخیص تغییرات غیرطبیعی هستند. پایش پروفایل یکی از موضوعات مهم تحقیقاتی در حوزه کنترل فرآیند آماری است که در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. پروفایل رابطه بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل را توصیف می‌کند. این رابطه که معمولاً با استفاده از یک رابطه رگرسیونی مدل می‌شود می‌تواند خطی ساده، خطی چندگانه، چندجمله‌ای و در مواردی غیرخطی باشد. در پروفایل خطی ساده، رابطه بین یک متغیر پاسخ و یک متغیر مستقل به صورت خطی مدل می‌شود. از جمله

کاربردهای صنعتی پایش پروفایل‌ها می‌توان به پایش فرآیندهای کالیبراسیون اشاره کرد. رابطه خطی بین مقدار واقعی و مقدار اندازه‌گیری شده یکی از روابط معروف در فرآیندهای کالیبراسیون است که بایستی در طول زمان پایش شود. به عنوان مثال کنگ و آلباین رابطه بین فشار و جریان در یک سیستم هیدرولیکی را با یک پروفایل خطی ساده مدل‌سازی و سپس پایش می‌کنند.

نمودار کنترل جمع دنباله یکی از انواع نمودارهای کنترل است که برای نظارت بر پایداری فرآیند و شناسایی تغییرات کوچک و متوسط در پارامترهای فرآیند استفاده می‌شود. این نمودار حدود کنترل را به ناحیه تقسیم می‌کند و با استفاده از امتیازی که از قبل برای هر ناحیه فرض می‌شود، به محاسبه‌ی مجموع تجمعی امتیازهای هر نمونه تا محقق شدن شرط خارج از کنترل شدن فرآیند می‌پردازد. هنگامی که برای اولین بار، امتیاز تجمعی محاسبه شده از یک مقدار بحرانی از

* نویسنده مسئول: امیرحسین امیری

تلفن: ۰۲۱-۵۱۲۱۲۰۶۵؛ پست الکترونیکی: amiri@shahed.ac.ir

قبل مشخص شده فراتر رود، فرآیند خارج از کنترل آماری اعلام می‌شود و روند محاسبه امتیاز متوقف می‌شود.

در مطالعه مجیا و پیگناتیلو [۱۱]، ویژگی پاسخ اولیه سریع، برای نمودار کنترل جمع دنباله R بررسی شده است. در مطالعه تئو و خو [۱۲]، نمودار کنترل جمع دنباله با پارامتر نامعلوم بررسی شده است؛ که این پارامتر با استفاده از یک مجموعه داده در فاز ۱ تخمین زده می‌شوند. سیت و همکاران [۱۳] در مطالعه خود یک نمودار کنترل جمع دنباله t ارائه داده‌اند که نمرات و پارامترهای بهینه آن تعیین می‌شود. چو و همکاران [۱۴] در مطالعه خود یک نمودار کنترل جمع دنباله ارائه کردند که در آن سعی شده با نمرات بهینه و پارامترهای تعیین شده، متوسط مدت زمان تا هشدار در حالت خارج از کنترل یا متوسط مدت زمان تنظیم شده تا هشدار در حالت خارج از کنترل را بهینه کنند. در مطالعه‌ی راکیتزس و آنتزولاکاس [۱۵]، یک نمودار کنترل جمع دنباله‌ی دو طرفه‌ی S برای پایش واریانس پیشنهاد شده است. سها و همکاران [۱۶] در مطالعه خود یک نمودار کنترل جمع دنباله ارائه داده‌اند که در آن پارامترهای فرآیند تخمین زده شده است. در مطالعه گائو و همکاران [۱۷]، یک نمودار کنترل جمع دنباله S براساس شاخص میانه طول دنباله پیشنهاد شده است. در مطالعه سها و همکاران [۱۸]، عملکرد نمودار کنترل جمع دنباله با فاصله نمونه‌گیری متغیر با استفاده از معیار متوسط مدت زمان تا هشدار ارزیابی شده است. در مطالعه آنتزولاکاس و همکاران [۱۹]، یک نمودار کنترل جمع دنباله برای نظارت و پایش تغییرات میانگین و واریانس به‌طور همزمان پیشنهاد شده است. در مطالعه میم و همکاران [۱۰]، یک نمودار کنترل جمع دنباله t با فواصل نمونه‌گیری متغیر پیشنهاد شده است. در مطالعه آنتزولاکاس و همکاران [۱۱]، یک نمودار کنترل جمع دنباله حداکثر ارائه شده که برای نظارت مؤثر بر میانگین و واریانس یک فرآیند پیشنهاد شده است. در مطالعه یانگ و همکاران [۱۲]، یک نمودار جمع دنباله با فاصله‌ی نمونه‌گیری متغیر برای پایش ضریب تغییرات ارائه شده است؛ که در آن فاصله‌ی نمونه‌گیری براساس امتیازات تجمعی فعلی تنظیم می‌شود. در مطالعه آنتزولاکاس و همکاران [۱۳]، نمودار کنترل جمع دنباله حداکثر برای نظارت بر فرآیند توزیع نمایی با تغییر مکان، پیشنهاد و ویژگی‌های آن بررسی می‌شود تا تغییر در یک یا هر دو پارامتر فرآیند شناسایی شود. در مطالعه خو و همکاران [۱۴]، نمودار کنترل جمع دنباله مربع کای پیشنهاد شده است که عملکرد آن با استفاده از معیار متوسط طول دنباله و رویکرد زنجیره مارکوف ارزیابی شده است. در مطالعه چو و همکاران [۱۵]، نمودار کنترل جمع دنباله مربع کای ارائه شده است؛ که در آن با نمرات از پیش تعیین شده دقیقی، متوسط مدت زمان تا هشدار در حالت خارج از کنترل و نیز متوسط مدت زمان تنظیم شده تا هشدار در حالت خارج از کنترل را بهینه کرده‌اند. در مطالعه ابوبکار و همکاران [۱۶]، یک نمودار کنترل جمع دنباله دوطرفه برای پایش نسبت دو متغیر نرمال پیشنهاد شده است. همتی و همکاران [۱۷]، نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش ضریب تغییرات چند متغیره را با در نظر گرفتن خطای اندازه‌گیری توسعه دادند. در مطالعه سها و همکاران [۱۸]، یک نمودار کنترل جمع دنباله

چندمتغیره هتلینگ برای نظارت بر فرآیندهای خودهمبسته ارائه شده است که از مدل خودبازگشتی برداری مرتبه اول بهره می‌برد. میربیک و همکاران [۱۹] در مقاله خود به‌طور خاص فرض کردند که کیفیت فرآیند با استفاده از پروفایل خطی ساده خودهمبسته مدل می‌شود و نقطه واقعی تغییر در فرآیند را بعد از دریافت هشدار از نمودار کنترل T^2 هتلینگ محاسبه کردند. در مطالعه قاسمی و احمدی یزدی [۲۰]، نمودارهای کنترل میانگین متحرک وزنی یکنواخت برای پایش پروفایل خطی چندگانه چندمتغیره توسعه داده شده است. ستوده و همکاران [۲۱]، نمودارهای کنترل میانگین پیش‌رونده چندمتغیره را برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ طراحی کردند؛ در این پژوهش، به علت عملکرد بهتر این رویکرد نسبت به نمودارهای باحافظه، سه نمودار مبتنی بر رویکرد میانگین پیش‌رونده به منظور پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ طراحی شده‌اند. در مطالعه شروانی و همکاران [۲۲]، ارزیابی عملکرد روش میانگین متحرک نمایی دوگانه مرتبه سوم (DEWMA3) در فاز ۲ برای تشخیص تغییرات در پروفایل‌های خطی ساده مبتنی بر مکانیزم قانون دنباله بیان شده است. در مطالعه قاسمی و همکاران [۲۳]، روش‌های جدیدی برای پایش پروفایل‌های خطی چندگانه چندمتغیره در فاز ۲ بیان شده است. در این مطالعه، سه روش جدید مبتنی بر نمودار کنترل میانگین متحرک با وزن یکنواخت چندمتغیره (MHWMA) برای بهبود پایش پروفایل‌ها پیشنهاد شده است. بررسی مؤلفین نشان می‌دهد تاکنون نمودارهای کنترل جمع دنباله برای پایش پروفایل‌ها توسعه داده نشده است؛ در حالی که این نمودارها عملکرد نمودارهای کنترل موجود را در کشف تغییرات مخصوصاً در کشف تغییرات کوچک و متوسط بهبود می‌دهند. این یک شکاف تحقیقاتی مهم در ادبیات پایش پروفایل‌ها است که توسط پژوهش حاضر پوشش داده می‌شود.

لذا در این مقاله یک نمودار کنترل جمع دنباله مبتنی بر آماره T^2 هتلینگ (RST^2) و یک نمودار کنترل جمع دنباله مبتنی بر آماره میانگین متحرک موزون نمایی چند متغیره (RSMEWMA) در فاز ۲ پیشنهاد شده است تا عملکرد نمودارهای کنترل موجود را در پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ بهبود دهند. برای توسعه نمودارهای کنترل جمع دنباله در پایش پروفایل‌های خطی ساده، از هر دو رویکرد زنجیره مارکوف و شبیه‌سازی استفاده شده است. همچنین معیارهای متوسط طول دنباله و انحراف معیار طول دنباله در هر دو حالت صفر و پایدار به عنوان معیارهای ارزیابی عملکرد روش‌های پیشنهادی استفاده شده‌اند. ساختار کلی این مقاله بدین صورت می‌باشد که در بخش دوم نمودارهای کنترل جمع دنباله پیشنهادی بیان می‌شود. در بخش سوم مطالعات شبیه‌سازی برای ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی با استفاده از معیارهای متوسط طول دنباله و انحراف معیار طول دنباله بیان می‌شود. در بخش چهارم تحلیل حساسیت‌های نمودارها و همچنین مثال عددی بیان می‌شود. در نهایت در بخش پنجم نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای مطالعات آتی بیان می‌شود.

۲. نمودارهای کنترل جمع دنباله پیشنهادی

در این بخش دو نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ معرفی می‌شوند تا عملکرد نمودارهای کنترل موجود را در کشف تغییرات کوچک و متوسط در پارامترهای پروفایل‌های خطی ساده بهبود دهند. در برخی از کاربردها عملکرد یک فرآیند یا کیفیت یک محصول به وسیله یک رابطه خطی ساده بین یک متغیر پاسخ و یک متغیر مستقل توصیف می‌شود که این رابطه در ادبیات کنترل فرآیند آماری به نام پروفایل خطی ساده شناخته می‌شود. مدل پروفایل خطی ساده که در آن مقادیر متغیر مستقل مقادیری ثابت هستند در رابطه (۱) آورده شده است:

همان‌طور که در شکل (۱) مشخص است، نمودار کنترل جمع دنباله، حدود کنترل را به k ناحیه تقسیم کرده و با استفاده از امتیازات از پیش تعیین شده، به محاسبه‌ی جمع تجمعی امتیازهای هر نمونه تا محقق شدن شرط خارج از کنترل شدن فرآیند می‌پردازد. هنگامی که برای اولین بار، امتیاز تجمعی از یک مقدار بحرانی از قبل مشخص شده فراتر رفت، فرآیند خارج از کنترل آماری اعلام شده و روند محاسبه امتیاز متوقف می‌شود.

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{for } i=1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots \quad (1)$$

فرض می‌شود که عبارت خطا دارای توزیع نرمال به صورت زیر است:

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (2)$$

آماره T^2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_j^2 = (\hat{\beta}_j - \beta)^T \Sigma_{\hat{\beta}}^{-1} (\hat{\beta}_j - \beta), \quad \text{for } j=1,2,\dots \quad (3)$$

که در آن $\Sigma_{\hat{\beta}}$ ماتریس واریانس کوواریانس تخمین ضرایب پروفایل است و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\Sigma_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{s_{xx}} \right) & \frac{-\bar{x}\sigma^2}{s_{xx}} \\ \frac{-\bar{x}\sigma^2}{s_{xx}} & \frac{\sigma^2}{s_{xx}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

زمانی که فرآیند تحت کنترل آماری است، آماره T^2 در رابطه (۳) از توزیع مربع کای با ۲ درجه آزادی تبعیت می‌کند و زمانی که فرآیند خارج از کنترل آماری است، آماره T^2 از توزیع مربع کای غیرمرکزی با ۲ درجه آزادی تبعیت می‌کند و پارامتر غیرمرکزی با استفاده از رابطه (۵) محاسبه می‌شود:

$$\lambda = d^2 \quad (5)$$

که در آن d فاصله ماهالانوبیس است که بزرگی شیفت یعنی میزان تغییر در بردار میانگین تحت کنترل را نشان می‌دهد و با استفاده از رابطه (۶) محاسبه می‌شود:

$$d = \sqrt{(\beta_1 - \beta_0)^T \Sigma_{\hat{\beta}}^{-1} (\beta_1 - \beta_0)} \quad (6)$$

که در رابطه فوق β_1 بردار ضرایب پروفایل در حالت خارج از کنترل و β_0 بردار ضرایب پروفایل در حالت تحت کنترل است.

آماره نمودار کنترل جمع دنباله T^2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_j = \begin{cases} 0 & \text{if } T_j^2 < UCL_0 \\ U_{j-1} + s(T_j^2) & \text{if } T_j^2 \geq UCL_0 \end{cases} \quad (7)$$

این آماره به صورت جمع تجمعی امتیاز هر ناحیه محاسبه می‌شود.

در این رابطه، s امتیاز از قبل مشخص شده برای هر ناحیه است و $UCL_0 = F_2^{-1}(0.5)$ میانه توزیع مربع کای با ۲ درجه آزادی است؛ و هشدار خارج از کنترل زمانی صادر می‌شود که $U_j \geq H$ باشد؛ که H برابر با بالاترین امتیاز در نظر گرفته شده برای نواحی حدود کنترل است.

حدود کنترل این نمودار به صورت زیر تعریف می‌شوند:

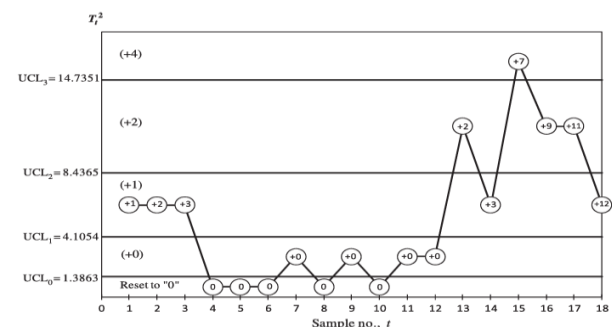
$$UCL_j = K \times F_2^{-1}(\alpha_j), \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (8)$$

که در آن $F_2^{-1}(\cdot)$ معکوس تابع توزیع تجمعی توزیع مربع کای با ۲ درجه آزادی است. مقدار K در رابطه (۸) طوری تنظیم شده ($K=1.008$) که متوسط طول دنباله تحت کنترل برابر با ۲۰۰ به دست آید. آلفا هم از این طریق به دست می‌آید:

$$\alpha_j = \varphi\left(\frac{3j}{k-1}\right), \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (9)$$

که در آن $\varphi(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و $k=4$ است؛ به این علت که نمودار به ۴ ناحیه امتیازدهی شده تقسیم شده است.

شکل (۱). نمودار کنترل $RS\chi^2$ (خو و همکاران [۱۴])



نمودارهای کنترل جمع دنباله برای پایش ثبات مشخصه‌های کیفی در طول زمان استفاده می‌شوند. این نمودارها می‌توانند به شناسایی علل بالقوه‌ی تغییرات در فرآیند و بهبود کیفیت محصول یا خدمات کمک کنند. در ارتباط با تحقیق حاضر همه فرآیندهایی که کیفیت محصول یا عملکرد آن‌ها با استفاده از یک رابطه توصیف می‌شود از جمله فرآیندهای کالیبراسیون که پیش‌تر ذکر شد می‌توانند با استفاده از نمودارهای کنترل جمع دنباله پایش و هرگونه تغییر در پارامترهای رابطه با سرعت بیشتری شناسایی شوند.

در ادامه نمودارهای کنترل پیشنهادی جمع دنباله برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ ارائه می‌شوند.

۲-۱. نمودار کنترل RST^2

در ابتدا پروفایل خطی ساده به شرح رابطه (۱) وجود دارد که در آن عبارت خطا دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 و به صورت $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ است.

احتمال قرارگرفتن هر نمونه در داخل هر یک از نواحی مرزبندی شده توسط حدود کنترل، با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود:

$$p_j = \begin{cases} F_2(UCL_j) - F_2(UCL_{j-1}) & \text{if } d = 0 \\ F_{2,\lambda}(UCL_j) - F_{2,\lambda}(UCL_{j-1}) & \text{if } d > 0 \end{cases} \quad (10)$$

که در رابطه فوق $F_2(\cdot)$ و $F_{2,\lambda}(\cdot)$ به ترتیب تابع توزیع تجمعی مربع کای و مربع کای غیرمرکزی با ۲ درجه آزادی هستند.

به عنوان مثال برای $j=k$ رابطه (۱۰) به صورت رابطه (۱۱) بازنویسی می‌شود:

$$p_k = \begin{cases} 1 - F_2(UCL_{k-1}) & \text{if } d = 0 \\ 1 - F_{2,\lambda}(UCL_{k-1}) & \text{if } d > 0 \end{cases} \quad (11)$$

همچنین p_0 با استفاده از رابطه (۱۲) محاسبه می‌شود:

$$p_0 = \begin{cases} F_2(UCL_0) = 0.5 & \text{if } d = 0 \\ F_{2,\lambda}(UCL_0) & \text{if } d > 0 \end{cases} \quad (12)$$

نحوه عملکرد نمودار کنترل بدین صورت است که:

- اگر آماره درون بازه $T_j^2 \in [UCL_{j-1}, UCL_j]$ باشد $(j = 1, 2, \dots, k)$ جمع مقادیر U_j به صورت تجمعی محاسبه می‌شود.

- اگر $T_j^2 < UCL_0$ باشد: U_j به صفر برمی‌گردد و جمع مقادیر از اول محاسبه می‌شود.

- و اگر $U_j \geq H$ باشد: هشدار خارج از کنترل اعلام می‌شود.

در این مقاله متوسط طول دنباله نمودار کنترل پیشنهادی RST^2 در حالت‌های صفر و پایدار با دو رویکرد شبیه‌سازی و زنجیره مارکوف محاسبه شده است.

در رویکرد شبیه‌سازی و در حالت صفر، با تولید نمونه تصادفی خارج از کنترل از ابتدای فرآیند و محاسبه آماره T^2 و امتیازات و جمع تجمعی امتیازات، متوسط طول دنباله بعد از ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی تحت شیفت‌های مختلف محاسبه می‌شود.

در رویکرد شبیه‌سازی و در حالت پایدار، پس از تولید ۲۵ نمونه تصادفی تحت کنترل، نمونه‌های تصادفی خارج از کنترل ایجاد و آماره T^2 و امتیازات مربوط محاسبه و متوسط طول دنباله بعد از ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی تحت شیفت‌های مختلف محاسبه می‌شود.

در رویکرد زنجیره مارکوف، حدود کنترل نمودار دقیقاً مشابه رویکرد شبیه‌سازی است. لیکن به جای تولید نمونه‌های تصادفی، احتمال قرارگیری هر نمونه در هر یک از مرزهای ایجاد شده توسط حدود کنترل نمودار، با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود. این احتمالات برحسب امتیازات از قبل مشخص شده نمودار، در ماتریسی تحت عنوان ماتریس انتقال قرار می‌گیرند و سطر و ستون آخر این ماتریس حذف می‌شود چون حالت جاذب است. سپس با استفاده از این ماتریس و رابطه (۱۳)، متوسط طول دنباله در حالت صفر و با استفاده از رابطه (۱۴)، متوسط طول دنباله در حالت پایدار تحت شیفت‌های مختلف محاسبه می‌شود:

$$ARL = \mathbf{s}^T (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1} \quad (13)$$

$$ARL = \mathbf{q} (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1} \quad (14)$$

که در این دو رابطه، $\mathbf{s}^T = (1, 0, \dots, 0)$ بردار احتمالات اولیه و

۲-۲. نمودار کنترل RSMEWMA

مانند حالت قبل، در ابتدا پروفایل خطی ساده به شرح رابطه (۱) وجود دارد که بردار عبارات خطای آن دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2 و به صورت $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ است. $\beta = (\beta_0)$ بردار میانگین در حالت تحت کنترل و $\hat{\beta}_j$ بردار تخمین پارامترهای β از پروفایل در فاز ۲ است که توضیحات و نحوه محاسبه مؤلفه‌های آن در ابتدای بخش ۱-۲ تبیین شده است.

برای کنترل بردار میانگین آماره زیر موجود است:

$$\mathbf{z}_j = \lambda (\hat{\beta}_j - \beta) + (1 - \lambda) \mathbf{z}_{j-1} \quad (15)$$

که در آن λ ثابت هموارسازی است که بین اعداد صفر و یک مقدار می‌گیرد و معمولاً برابر با ۰/۲ تنظیم می‌شود. مقدار $\mathbf{z}_0$ برابر با صفر در نظر گرفته شده است. آماره تعریف شده در رابطه (۱۵) از توزیع نرمال ۲ متغیره به صورت رابطه (۱۶) تبعیت می‌کند:

$$\mathbf{z}_j \sim N_2(0, \text{Var}(\mathbf{z}_j)) \quad (16)$$

که در آن $\text{Var}(\mathbf{z}_j) = \frac{\lambda[1-(1-\lambda)^{2j}]}{(2-\lambda)} \Sigma_{\beta}$ است.

بنابراین آماره MEWMA به صورت رابطه (۱۷) قابل بازنویسی است:

$$T_j = \frac{(2-\lambda)}{\lambda[1-(1-\lambda)^{2j}]} \mathbf{z}_j' \Sigma_{\beta}^{-1} \mathbf{z}_j \sim \chi_{2,\delta^2}^2 \quad (17)$$

که در آن δ^2 پارامتر غیر مرکزی توزیع مربع کای با ۲ درجه آزادی است و برابر است با:

$$\delta^2 = \left\{ \frac{(2-\lambda)}{\lambda[1-(1-\lambda)^{2j}]} (\beta - \beta_0)^T \Sigma_{\beta}^{-1} (\beta - \beta_0) \right\} \quad (18)$$

واضح است که تحت شرایط کنترل، مقدار δ^2 برابر صفر است؛ در نتیجه T_j دارای توزیع مربع کای مرکزی است. رابطه (۱۷) برای تعریف آماره MEWMA بیان شده و در ادامه آماره نمودار کنترل جمع دنباله MEWMA به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_j = \begin{cases} 0 & \text{if } T_j < UCL_0 \\ U_{j-1} + s(T_j) & \text{if } T_j \geq UCL_0 \end{cases} \quad (19)$$

در این آماره به صورت جمع تجمعی امتیاز هر ناحیه محاسبه می‌شود. در این رابطه، s امتیاز از قبل مشخص شده برای هر ناحیه است و $UCL_0 = F_2^{-1}(0.5)$ میانه توزیع مربع کای با ۲ درجه آزادی است؛ و هشدار خارج از کنترل زمانی صادر می‌شود که $U_j \geq H$ باشد؛ که H برابر با بالاترین امتیاز در نظر گرفته شده برای نواحی حدود

آماره $RSMEWMA$ ، ضریب هموارسازی برابر با 0.2 در نظر گرفته شده است. در آماره RST^2 ، $n=4$ و $\sigma^2=1$ و $x = [2 \ 4 \ 6 \ 8]$ و $\bar{x} = 5$ و $s_{xx} = 20$ است. در مطالعات شبیه‌سازی، هر مقدار ARL خارج از کنترل به کمک 10000 بار تکرار شبیه‌سازی تخمین زده شده است. این مقادیر با استناد به مراجع آنتزولاکاس و همکاران [۹] و خو و همکاران [۱۴] انتخاب شده‌اند. پروفایل خطی ساده که از آن در این بخش استفاده شده عبارت است از:

$$y = 3 + 2x + \varepsilon \quad (22)$$

چهار مشاهده‌ی در نظر گرفته شده برای متغیر مستقل x به صورت $[2 \ 4 \ 6 \ 8]$ هستند. عبارت خطا نیز دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار ۱ است. تغییرات عرض از مبدأ در بازه‌ی $(0.2, 2)$ ، $L =$ تغییرات شیب در بازه‌ی $(0.25, 0.75)$ ، $B =$ تغییرات انحراف معیار در بازه‌ی $(1/2, 3)$ و $G =$ تغییرات همزمان در بازه‌ی $(1, 5)$ و $L = (-1, -0.2)$ هستند.

برای مقایسه نمودارهای کنترل مختلف در فاز ۲، از منحنی ARL استفاده می‌شود به این صورت که متوسط طول دنباله تحت کنترل نمودارها یکسان و متوسط طول دنباله خارج از کنترل به ازای شیفت‌های مختلف با هم مقایسه می‌شود. نموداری عملکرد بهتری دارد که منحنی متوسط طول دنباله پایین‌تری دارد یا متوسط طول دنباله خارج از کنترل محاسبه شده کمتری در جدول دارد.

در جدول (۱) به ترتیب مقادیر ARL خارج از کنترل نمودار کنترل RST^2 با رویکرد زنجیره مارکوف تحت شیفت‌های مختلف عرض از مبدأ، شیب، انحراف معیار و شیفت همزمان در دو حالت صفر و پایدار ارائه شده است. متوسط طول دنباله در حالت صفر $(ZSARL_1)$ ، متوسط طول دنباله خارج از کنترل را در حالتی محاسبه می‌کند که شیفت از ابتدای فرآیند اتفاق می‌افتد. متوسط طول دنباله در حالت پایدار $(SSARL_1)$ ، متوسط طول دنباله خارج از کنترل را در حالتی محاسبه می‌کند که یک مدت زمانی فرآیند تحت کنترل است و سپس تغییری در فرآیند رخ می‌دهد. نتایج به‌دست آمده با رویکرد مارکوف نشان می‌دهد که نمودار کنترل RST^2 ، به‌طور یکنواخت دارای ARL خارج از کنترل کمتری است و عملکرد بهتری نسبت به نمودار کنترل T^2 ارائه شده توسط کنگ و آلباین [۲۴] که نتایج آن در جدول (۲) آمده دارد. برای بررسی و یکسان‌سازی شیفت‌های عرض از مبدأ، شیب و شیفت همزمان نمودار کنترل پیشنهادی با نمودار کنترل کنگ و آلباین، از رابطه (۲۳) استفاده شده است:

$$d = \sqrt{(\beta_1 - \beta_0)^T \Sigma_{\beta}^{-1} (\beta_1 - \beta_0)} \quad (23)$$

در جدول (۳) به ترتیب مقادیر متوسط طول دنباله (ARL_1) و انحراف معیار طول دنباله $(SDRL_1)$ خارج از کنترل نمودار کنترل RST^2 با رویکرد شبیه‌سازی تحت شیفت‌های مختلف عرض از مبدأ، شیب، انحراف معیار و شیفت همزمان در دو حالت صفر و پایدار ارائه شده است. از مقایسه دو جدول (۱) و (۳) نتیجه‌گیری می‌شود که اعداد به‌دست آمده در هر دو جدول بسیار به هم نزدیک هستند و در هر دو رویکرد مارکوف و شبیه‌سازی، مقادیر ARL خارج از کنترل نمودار

کنترل است. حدود کنترل این نمودار به‌صورت زیر است:

$$UCL_j = K \times F_2^{-1}(\alpha_j), \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (20)$$

که در آن $(\cdot)$ معکوس تابع توزیع تجمعی توزیع مربع کای با ۲ درجه آزادی است. ARL_0 نمودار کنترل پیشنهادی با تغییر مقدار K طوری تنظیم می‌شود ($K=1/55$) که برابر با مقدار ۲۰۰ شود. آلفا نیز از طریق رابطه (۲۱) به‌دست می‌آید:

$$\alpha_j = \varphi\left(\frac{3j}{k-1}\right), \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, k-1 \quad (21)$$

که در آن $\varphi(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و $k=4$ است؛ به این علت که نمودار به ۴ ناحیه امتیازدهی شده تقسیم شده است.

نحوه عملکرد نمودار بر حسب شرایط زیر، این‌گونه است:

- اگر آماره درون بازه $T_j \in [UCL_{j-1}, UCL_j]$ باشد $(j = 1, 2, \dots, k)$ ، جمع مقادیر U_j به‌صورت تجمعی محاسبه می‌شود.

- اگر $T_j < UCL_0$ باشد: U_j به صفر برمی‌گردد و جمع مقادیر از اول محاسبه می‌شود.

- و اگر $U_j \geq H$ باشد: هشدار خارج از کنترل اعلام می‌شود.

این نمودار با رویکرد شبیه‌سازی در حالت‌های صفر و پایدار طراحی شده است. در رویکرد شبیه‌سازی و در حالت صفر، با تولید نمونه تصادفی خارج از کنترل از ابتدای فرآیند و محاسبه آماره $MEWMA$ و امتیازات و جمع تجمعی امتیازات، متوسط طول دنباله بعد از ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی تحت شیفت‌های مختلف محاسبه می‌شود. در رویکرد شبیه‌سازی و در حالت پایدار، پس از تولید ۲۵ نمونه تصادفی تحت کنترل، نمونه‌های تصادفی خارج از کنترل ایجاد و آماره $MEWMA$ و امتیازات مربوط محاسبه و متوسط طول دنباله بعد از ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی تحت شیفت‌های مختلف محاسبه می‌شود. برای این نمودار به دلیل باحافظه بودن آماره $MEWMA$ و محدودیت در محاسبات مربوط به احتمال قرارگرفتن هر آماره در نواحی مرزبندی شده، رویکرد زنجیره مارکوف بررسی نشده است.

در نهایت عملکرد کلی نمودار کنترل جمع دنباله $MEWMA$ به این شکل است که این نمودار حدود کنترل را به k ناحیه مجزا تقسیم می‌کند و با استفاده از امتیازی که برای هر ناحیه فرض می‌شود، به محاسبه مجموع تجمعی امتیاز هر نمونه تا محقق شدن شرط خارج از کنترل شدن فرآیند می‌پردازد. هنگامی که برای اولین بار، امتیاز تجمعی محاسبه شده از یک مقدار بحرانی از قبل مشخص شده فراتر رود، فرآیند خارج از کنترل اعلام می‌شود.

۳. ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی

در این بخش با استفاده از زنجیره مارکوف و شبیه‌سازی مونت کارلو به ارزیابی عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی تحت تغییرات انفرادی و همزمان در پارامترهای عرض از مبدأ، شیب و انحراف معیار برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ پرداخته می‌شود.

برای بررسی عملکرد نمودارهای کنترل، همه روش‌ها به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که مقدار ARL تحت کنترل برابر با ۲۰۰ باشد. در

حالت صفر و پایدار ارائه شده است. تنها تفاوت با نمودار RSMEWMA این است که برای نمودار کنترل MEWMA، آمارهای برای جمع تجمعی امتیازات وجود ندارد. از بررسی جداول (۴) و (۵) این نتایج حاصل می‌شود که نمودار کنترل MEWMA در شیفتهای متوسط و بزرگ عرض از مبدأ، شیب و شیفتهای همزمان و همچنین در تمامی شیفتهای انحراف معیار، عملکرد بهتری نسبت به نمودار کنترل RSMEWMA دارد اما در شیفتهای کوچک عرض از مبدأ، شیب و شیفتهای همزمان، عملکرد نمودار کنترل RSMEWMA بهتر است. در نتیجه برای شیفتهای کوچک عرض از مبدأ، شیب و شیفتهای همزمان، از بین تمامی نمودارها، نمودار کنترل RSMEWMA بهترین عملکرد را دارد.

نمودار کنترل جمع دنباله به دلیل اینکه از اطلاعات نمونه‌های قبلی استفاده می‌کند منجر به عملکرد بهتری نسبت به نمودارهای کنترل از نوع شوهارت به خصوص در کشف تغییرات کوچک و متوسط می‌شود. لذا نمودار کنترل پیشنهادی RST^2 عملکرد بهتری نسبت به نمودار کنترل T^2 دارد. نمودار کنترل پیشنهادی RSMEWMA با توجه به اینکه ویژگی نمودارهای کنترل با حافظه را نیز علاوه بر ویژگی نمودار کنترل جمع دنباله همراه دارد از عملکرد بهتری در کشف شیفتهای کوچک و متوسط نسبت به نمودار کنترل RST^2 برخوردار است. لیکن نمودار کنترل RST^2 با توجه به ویژگی نمودارهای کنترل شوهارت در کشف شیفتهای بزرگ بهتر از نمودار کنترل RSMEWMA عمل می‌کند.

کنترل RST^2 به درستی محاسبه شده است. همچنین نتایج به‌دست آمده با رویکرد شبیه‌سازی نیز نشان می‌دهد که نمودار کنترل RST^2 به‌طور یکنواخت دارای ARL خارج از کنترل کمتری است و عملکرد بهتری نسبت به نمودار کنترل T^2 ارائه شده توسط کنگ و آلباین در جدول (۲) دارد.

در جدول (۴) به ترتیب مقادیر ARL و SDRL خارج از کنترل نمودار کنترل RSMEWMA با رویکرد شبیه‌سازی تحت شیفتهای مختلف عرض از مبدأ، شیب، انحراف معیار و شیفتهای همزمان در دو حالت صفر و پایدار ارائه شده است. از بررسی جدول (۴) این نتایج حاصل می‌شود که نمودار کنترل RSMEWMA در شیفتهای کوچک و متوسط عرض از مبدأ، شیب و شیفتهای همزمان دارای ARL خارج از کنترل کمتری است و عملکرد بهتری نسبت به نمودار کنترل RST^2 در هر دو رویکرد شبیه‌سازی و مارکوف دارد اما در شیفتهای بزرگ عرض از مبدأ، شیب و شیفتهای همزمان و همچنین در تمامی شیفتهای انحراف معیار، عملکرد نمودار کنترل RST^2 از نمودار کنترل RSMEWMA بهتر است. همچنین از دیگر نتایج بررسی جدول (۴) این است که نمودار کنترل RSMEWMA پیشنهادی با رویکرد شبیه‌سازی، به‌طور یکنواخت دارای ARL خارج از کنترل کمتری است و عملکرد بسیار بهتری نسبت به نمودار کنترل T^2 کنگ و آلباین دارد.

در جدول (۵) نیز به ترتیب مقادیر ARL و SDRL خارج از کنترل نمودار کنترل MEWMA با رویکرد شبیه‌سازی تحت شیفتهای مختلف عرض از مبدأ، شیب، انحراف معیار و شیفتهای همزمان در دو

جدول (۱). مقادیر متوسط طول دنباله (ARL) خارج از کنترل نمودار کنترل RST^2 با رویکرد زنجیره مارکوف

L	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
ZSARL ₁	125	46	17	8.2	4.8	3.3	2.4	1.9	1.6	1.3
SSARL ₁	123	44	15	6.4	3.3	2.1	1.5	1.2	1.1	1.05
B	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
ZSARL ₁	158	89	44	22	12	7.7	5.3	3.9	3.1	2.5
SSARL ₁	156	87	41	20	10	5.9	3.7	2.6	1.9	1.5
G	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
ZSARL ₁	31	12	6.9	4.8	3.7	3.04	2.6	2.3	2.08	1.9
SSARL ₁	29	10	5.8	3.9	2.9	2.4	2.1	1.8	1.7	1.5
B	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
L	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	
ZSARL ₁	36	13	6.2	3.8	2.6	2.02	1.6	1.3	1.1	
SSARL ₁	34	11	4.6	2.4	1.6	1.2	1.1	1.05	1.01	

جدول (۲). مقادیر متوسط طول دنباله (ARL) خارج از کنترل نمودار کنترل T^2 کنگ و آلباین

L	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
ARL ₁	139	63	27	13	6.9	4	2.6	1.8	1.5	1.2
B	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
ARL ₁	168	106	60	34	19	12	7.8	5.2	3.7	2.7
G	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
ARL ₁	39	14	7.9	5.1	3.8	3	2.5	2.2	2	1.8
B	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
L	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	

ARL ₁	52	21	9.5	4.8	2.9	1.9	1.5	1.2	1	
جدول (۳). مقادیر متوسط طول دنباله (ARL) و انحراف معیار طول دنباله (SDRL) خارج از کنترل نمودار کنترل RST ² با رویکرد شبیه‌سازی										
<i>L</i>	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
ZSARL ₁	124	46	17	8.1	4.8	3.2	2.4	1.9	1.59	1.37
SDRL ₁	123	43	14	6.1	3.03	1.7	1.2	0.9	0.7	0.5
SSARL ₁	120	45	16	7.8	4.5	3.1	2.3	1.8	1.52	1.31
SDRL ₁	120	44	15	6.2	3.02	1.8	1.2	0.9	0.7	0.5
<i>B</i>	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
ZSARL ₁	158	89	44	22	12	7.7	5.3	3.9	3.1	2.5
SDRL ₁	153	87	41	20	9.9	5.6	3.5	2.3	1.6	1.3
SSARL ₁	156	86	42	21	11	7.2	4.9	3.7	2.9	2.4
SDRL ₁	157	86	41	19	10	5.5	3.4	2.2	1.6	1.2
<i>G</i>	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
ZSARL ₁	31	12	6.8	4.8	3.6	3.06	2.6	2.29	2.07	1.9
SDRL ₁	29	10	5.4	3.5	2.5	2.1	1.7	1.4	1.2	1.1
SSARL ₁	30	11	6.5	4.6	3.5	2.8	2.5	2.24	2.01	1.8
SDRL ₁	28	10	5.4	3.6	2.6	2	1.6	1.5	1.2	1.1
<i>B</i>	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
<i>L</i>	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	
ZSARL ₁	36	13	6.2	3.8	2.6	2.02	1.6	1.34	1.18	
SDRL ₁	33	10	4.3	2.2	1.3	0.9	0.7	0.5	0.4	
SSARL ₁	35	12	5.8	3.5	2.5	1.9	1.5	1.31	1.15	
SDRL ₁	33	10	4.3	2.2	1.3	0.9	0.7	0.5	0.4	

جدول (۴). مقادیر متوسط طول دنباله (ARL) و انحراف معیار طول دنباله (SDRL) خارج از کنترل نمودار کنترل RSMEWMA با رویکرد شبیه‌سازی

<i>L</i>	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
ZSARL ₁	44	14	8.1	5.9	4.7	4.09	3.5	3.1	2.8	2.5
SDRL ₁	38	8.5	3.2	1.7	1.1	0.8	0.7	0.6	0.5	0.5
SSARL ₁	43	13	7.6	5.5	4.4	3.8	3.3	3	2.6	2.4
SDRL ₁	39	8.9	3.7	2.2	1.5	1.2	1.09	0.9	0.8	0.7
<i>B</i>	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
ZSARL ₁	77	26	13	9.1	6.9	5.7	4.9	4.4	3.9	3.6
SDRL ₁	69	20	7.9	3.9	2.4	1.6	1.2	1.01	0.8	0.7
SSARL ₁	76	25	12	8.6	6.5	5.4	4.6	4.1	3.7	3.4
SDRL ₁	74	21	8.1	4.4	2.8	2.1	1.7	1.4	1.2	1.1
<i>G</i>	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
ZSARL ₁	62	31	19	14	11	8.7	7.3	6.2	5.5	4.8
SDRL ₁	58	27	15	10	8.1	6.2	5.07	4.1	3.5	3.1
SSARL ₁	61	29	18	13	10	8.1	6.8	5.8	5.07	4.5
SDRL ₁	62	27	16	11	8.4	6.3	5.3	4.4	3.5	3.2
<i>B</i>	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
<i>L</i>	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	
ZSARL ₁	12	7.1	5.3	4.3	3.7	3.2	2.8	2.5	2.3	
SDRL ₁	6.3	2.5	1.4	0.9	0.7	0.6	0.5	0.5	0.4	
SSARL ₁	11	6.7	4.9	4.07	3.4	3.05	2.7	2.4	2.2	

SDRL ₁	6.8	3.04	1.8	1.3	1.1	0.9	0.8	0.7	0.7	
جدول (۵). مقادیر متوسط طول دنباله (ARL) و انحراف معیار طول دنباله (SDRL) خارج از کنترل نمودار کنترل MEWMA با رویکرد شبیه‌سازی										
<i>L</i>	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
ZSARL ₁	51	15	7.6	5.05	3.7	3.05	2.5	2.2	2.06	1.9
SDRL ₁	45	10	4.02	2.1	1.3	0.9	0.7	0.5	0.4	0.4
SSARL ₁	50	14	7.3	4.8	3.6	2.9	2.4	2.1	1.9	1.7
SDRL ₁	46	10	4.1	2.3	1.5	1.1	0.9	0.7	0.6	0.6
<i>B</i>	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
ZSARL ₁	86	29	14	8.7	6.2	4.8	3.9	3.3	2.9	2.6
SDRL ₁	81	24	9.8	4.9	2.9	2.03	1.4	1.1	0.9	0.7
SSARL ₁	85	29	13	8.4	5.9	4.6	3.8	3.2	2.8	2.5
SDRL ₁	82	25	9.9	5.1	3.1	2.1	1.6	1.3	1.1	0.9
<i>G</i>	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
ZSARL ₁	55	25	15	10	7.6	6.1	5.07	4.2	3.7	3.2
SDRL ₁	52	22	13	8.5	6.1	4.7	3.9	3.2	2.7	2.3
SSARL ₁	52	23	14	9.5	7.09	5.5	4.6	3.9	3.3	3.07
SDRL ₁	51	22	13	8.5	6.3	4.7	3.8	3.1	2.6	2.4
<i>B</i>	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
<i>L</i>	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	
ZSARL ₁	12	6.4	4.3	3.3	2.7	2.3	2.07	1.8	1.7	
SDRL ₁	7.9	3.1	1.6	1.07	0.7	0.5	0.4	0.4	0.4	
SSARL ₁	11	6.1	4.1	3.1	2.6	2.2	1.9	1.7	1.6	
SDRL ₁	8.1	3.2	1.8	1.2	0.9	0.8	0.6	0.5	0.5	

جدول (۶). مقادیر متوسط طول دنباله (ARL) و انحراف معیار طول دنباله (SDRL) خارج از کنترل نمودار کنترل RST² با رویکرد شبیه‌سازی و $r = 50, 75, 100$

<i>r</i>	<i>L</i>	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
50	SSARL ₁	122	45	16	7.8	4.5	3.08	2.3	1.8	1.5	1.3
50	SDRL ₁	121	44	15	6.2	3.06	1.7	1.2	0.9	0.7	0.5
75	SSARL ₁	121	44	16	7.9	4.5	3.07	2.3	1.8	1.5	1.3
75	SDRL ₁	122	44	15	6.2	3.02	1.8	1.2	0.9	0.7	0.5
100	SSARL ₁	122	45	16	7.7	4.5	3.1	2.3	1.8	1.5	1.3
100	SDRL ₁	122	45	15	6.1	3.1	1.7	1.2	0.9	0.7	0.5
<i>r</i>	<i>B</i>	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
50	SSARL ₁	155	86	42	21	11	7.2	4.9	3.7	2.9	2.3
50	SDRL ₁	154	86	41	20	10	5.6	3.5	2.3	1.6	1.2
75	SSARL ₁	156	88	42	21	11	7.2	4.9	3.7	2.9	2.4
75	SDRL ₁	152	87	42	20	10	5.6	3.4	2.3	1.6	1.2
100	SSARL ₁	154	86	43	21	11	7.2	4.9	3.7	2.9	2.4
100	SDRL ₁	156	86	41	19	10	5.6	3.4	2.3	1.6	1.3
<i>r</i>	<i>G</i>	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
50	SSARL ₁	30	11	6.4	4.5	3.5	2.8	2.5	2.2	2	1.8
50	SDRL ₁	29	10	5.2	3.5	2.5	2	1.7	1.4	1.2	1.1
75	SSARL ₁	30	11	6.6	4.5	3.6	2.8	2.4	2.2	1.9	1.8
75	SDRL ₁	28	10	5.5	3.5	2.6	2.06	1.6	1.4	1.2	1.1
100	SSARL ₁	30	11	6.5	4.5	3.5	2.9	2.4	2.2	2.01	1.8
100	SDRL ₁	29	10	5.4	3.5	2.6	2.04	1.6	1.4	1.2	1.1
<i>r</i>	<i>B</i>	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
	<i>L</i>	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	
50	SSARL ₁	35	12	5.8	3.5	2.5	1.9	1.5	1.3	1.1	
50	SDRL ₁	34	10	4.2	2.1	1.3	0.9	0.7	0.5	0.4	
75	SSARL ₁	35	12	5.8	3.5	2.5	1.8	1.5	1.3	1.1	
75	SDRL ₁	33	11	4.3	2.1	1.3	0.9	0.7	0.5	0.4	
100	SSARL ₁	35	12	5.9	3.5	2.5	1.9	1.5	1.3	1.1	
100	SDRL ₁	33	10	4.3	2.1	1.3	0.9	0.7	0.5	0.4	

جدول (۷). مقادیر متوسط طول دنباله (ARL) و انحراف معیار طول دنباله (SDRL) خارج از کنترل نمودار کنترل RSMEWMA با رویکرد

شبیه‌سازی و ۵۰، ۷۵، ۱۰۰ $r =$

r	L	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
50	SSARL ₁	43	13	7.6	5.5	4.5	3.8	3.3	3.02	2.6	2.4
50	SDRL ₁	39	8.9	3.7	2.2	1.6	1.2	1.09	0.9	0.8	0.7
75	SSARL ₁	44	13	7.6	5.5	4.5	3.8	3.3	3.01	2.7	2.4
75	SDRL ₁	39	8.7	3.7	2.2	1.6	1.2	1.09	0.9	0.8	0.7
100	SSARL ₁	43	13	7.6	5.5	4.4	3.8	3.3	3.01	2.7	2.4
100	SDRL ₁	40	8.7	3.7	2.2	1.6	1.2	1.1	0.9	0.8	0.7
r	B	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2	0.225	0.25
50	SSARL ₁	78	25	12	8.5	6.5	5.4	4.6	4.1	3.7	3.4
50	SDRL ₁	75	21	8.1	4.4	2.8	2.1	1.7	1.4	1.2	1.09
75	SSARL ₁	77	25	12	8.6	6.5	5.4	4.6	4.1	3.7	3.4
75	SDRL ₁	75	20	8.4	4.4	2.8	2.1	1.7	1.4	1.2	1.1
100	SSARL ₁	78	26	12	8.5	6.5	5.4	4.6	4.1	3.7	3.4
100	SDRL ₁	75	21	8.3	4.4	2.9	2.1	1.7	1.4	1.2	1.1
r	G	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
50	SSARL ₁	62	29	18	13	10	8.1	6.8	5.8	5.09	4.5
50	SDRL ₁	61	28	16	11	8.3	6.5	5.2	4.2	3.6	3.2
75	SSARL ₁	61	29	18	13	10	8.1	6.8	5.7	5.07	4.5
75	SDRL ₁	61	28	16	11	8.1	6.4	5.2	4.2	3.6	3.1
100	SSARL ₁	62	29	18	13	10	8.3	6.7	5.7	5.1	4.5
100	SDRL ₁	61	27	16	11	8.2	6.5	5.1	4.3	3.7	3.2
r	B	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.7	-0.8	-0.9	-1	
r	L	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	
50	SSARL ₁	11	6.7	4.9	4.08	3.4	3.06	2.7	2.4	2.2	
50	SDRL ₁	6.7	3.08	1.8	1.4	1.1	0.9	0.8	0.7	0.6	
75	SSARL ₁	11	6.7	4.9	4.06	3.4	3.09	2.7	2.4	2.2	
75	SDRL ₁	7.05	3.07	1.9	1.4	1.1	0.9	0.8	0.7	0.6	
100	SSARL ₁	11	6.7	5	4.07	3.5	3.06	2.7	2.4	2.2	
100	SDRL ₁	6.8	3	1.8	1.4	1.1	0.9	0.8	0.7	0.6	

۴. تحلیل حساسیت و مثال عددی

در این بخش تحلیل حساسیت روی تعداد پروفایل‌های تحت کنترل انجام و سپس یک مثال عددی ارائه می‌شود. در بخش قبل برای بررسی نمودارها در حالت پایدار، تعداد پروفایل‌های تحت کنترل ۲۵ در نظر گرفته شده بود که در اینجا مقادیر ۵۰ و ۷۵ و ۱۰۰ بررسی می‌شوند. در جدول (۶) به ترتیب مقادیر ARL و SDRL خارج از کنترل نمودار کنترل RST² با رویکرد شبیه‌سازی تحت شیفت‌های مختلف عرض از مبدأ، شیب، انحراف معیار و شیفت همزمان در حالت پایدار با تعداد پروفایل‌های تحت کنترل ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ ارائه شده است.

از مقایسه مقادیر جداول (۳) و (۴) نتیجه‌گیری می‌شود که با تغییر تعداد پروفایل‌های تحت کنترل در نمودار کنترل RST²، خللی در عملکرد این نمودار کنترل ایجاد نشده و اعداد ARL و SDRL به‌دست آمده تقریباً ثابت هستند و عملکرد نمودار کنترل با تغییر پروفایل‌های تحت کنترل تغییر نمی‌کند و عملکرد مناسب و قابل قبولی را از خود به نمایش می‌گذارد.

در جدول (۷) نیز به ترتیب مقادیر ARL و SDRL خارج از کنترل

نمودار کنترل RSMEWMA با رویکرد شبیه‌سازی تحت شیفت‌های مختلف عرض از مبدأ، شیب، انحراف معیار و شیفت همزمان در حالت پایدار با تعداد پروفایل‌های تحت کنترل ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ ارائه شده است.

از مقایسه مقادیر جداول (۴) و (۷) نتیجه‌گیری می‌شود که با تغییر تعداد پروفایل‌های تحت کنترل در نمودار کنترل RSMEWMA، خللی در عملکرد این نمودار کنترل ایجاد نشده و اعداد ARL و SDRL به‌دست آمده تقریباً ثابت هستند و عملکرد نمودار کنترل با تغییر پروفایل‌های تحت کنترل تغییر نمی‌کند.

در ادامه عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز دوم، با استفاده از یک مثال عددی و شیفت در عرض از مبدأ، مورد بررسی قرار گرفته و با نمودارهای موجود در ادبیات مقایسه می‌شوند. داده‌ها با شبیه‌سازی تولید شده و از ابتدا خارج از کنترل هستند.

در شکل (۲)، مقایسه‌ای بین نمودارهای کنترل T² و RST² انجام شده و تغییر در عرض از مبدأ پروفایل خطی ساده به میزان ۰/۵ واحد

ایجاد شده است.

همان‌طور که در شکل (۲) مشخص است، نمودار کنترل RST^2 توانسته است تغییر در عرض از مبدأ را به‌خوبی شناسایی کند و آماره از حدود کنترل نمودار ($UCL-RST^2$) عبور کرده و خارج از کنترل بودن فرآیند را در زیرگروه ۸ تشخیص داده است در حالی‌که نمودار کنترل T^2 نتوانسته است تغییر در عرض از مبدأ را تا آن زمان شناسایی نماید.

در شکل (۳) نیز، مقایسه‌ای بین نمودارهای کنترل MEWMA و RSMEWMA انجام شده و تغییر در عرض از مبدأ پروفایل به میزان ۰/۲ واحد ایجاد شده است.

همان‌طور که در شکل (۳) مشخص است، نمودار کنترل MEWMA نتوانسته است پایش پروفایل را به درستی انجام دهد و تغییر در عرض از مبدأ را به درستی تشخیص نداده است اما نمودار کنترل RSMEWMA توانسته است به درستی پایش پروفایل را انجام دهد و تغییر در عرض از مبدأ را به‌خوبی شناسایی کرده است و آماره مربوط از حدود کنترل نمودار ($UCL-RSMEWMA$) عبور کرده و خارج از کنترل بودن فرآیند را در زیرگروه ۳۸ تشخیص داده است. در نتیجه، عملکرد برتر هر دو نمودار کنترل جمع دنباله در پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز دوم، نسبت به نمودارهای موجود در ادبیات مشخص شده است.

در این بخش، به منظور بررسی عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز دوم، مطالعات شبیه‌سازی و تحلیل حساسیت انجام شده و مثال عددی نیز بیان شده است.

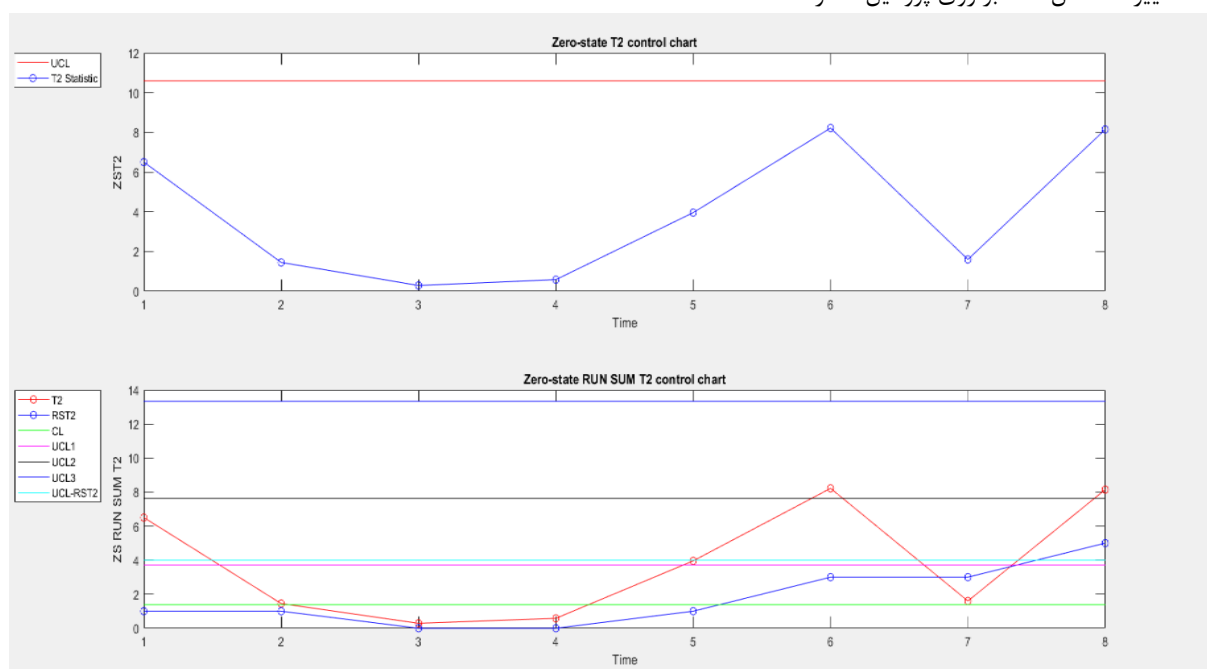
با استفاده از شبیه‌سازی و معیارهای متوسط طول دنباله و انحراف معیار طول دنباله نشان داده شده که نمودارهای کنترل پیشنهادی عملکرد مناسب و قابل قبولی در مقایسه با نمودار کنترل‌های رقیب در کشف تغییرات اعمال شده بر روی پروفایل‌ها دارند.

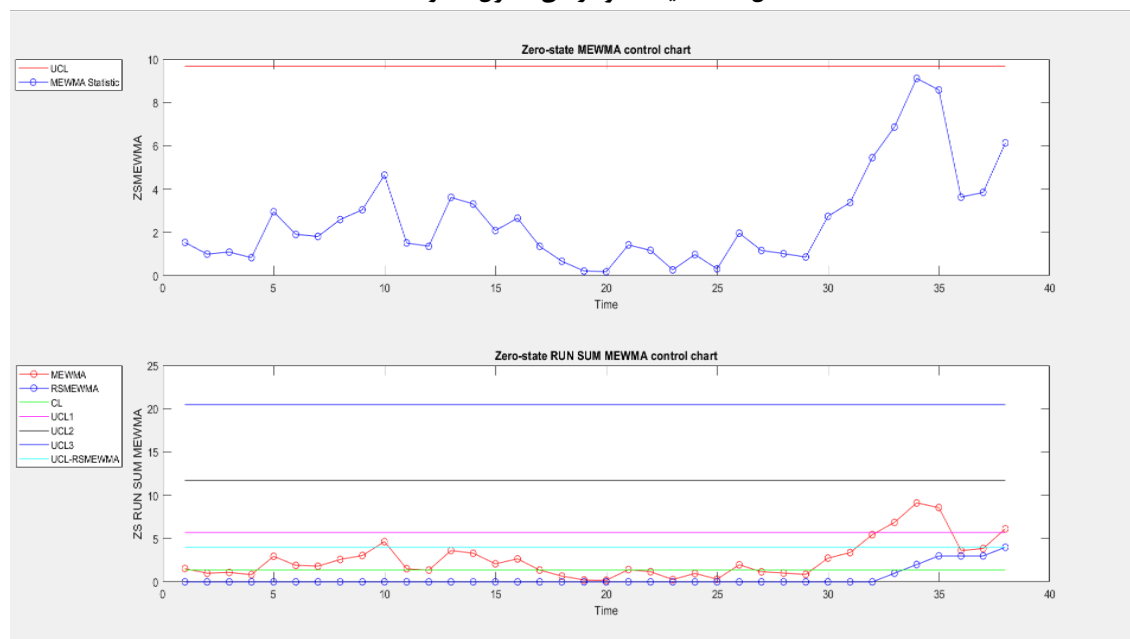
۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای مطالعات آتی

در این پژوهش، نمودارهای کنترل جمع دنباله برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲ توسعه داده شد و با استفاده از زنجیره مارکوف و شبیه‌سازی، معیارهای متوسط طول دنباله و انحراف معیار طول دنباله محاسبه شد. عملکرد نمودارهای کنترل جمع دنباله پیشنهادی در دو حالت صفر و پایدار مورد بررسی قرار گرفت. از مقایسات انجام شده نتیجه‌گیری شد که برای شیفت‌های کوچک عرض از مبدأ، شیب و شیفت همزمان، نمودار کنترل RSMEWMA بهترین عملکرد را دارد. در ادامه به تحلیل حساسیت روی تعداد پروفایل‌های تحت کنترل پرداخته شد و نتیجه‌گیری شد که با تغییر مقادیر، خللی در عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی ایجاد نمی‌شود. در انتها نیز عملکرد نمودارهای کنترل پیشنهادی توسط مثال عددی مورد بررسی قرار گرفت و عملکرد برتر هر دو نمودار کنترل جمع دنباله را به وضوح نمایش داد.

از جمله پژوهش‌های آتی در خصوص نمودارهای کنترل جمع دنباله می‌توان به موارد زیر پرداخت:

- (۱) توسعه نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش انواع دیگری از پروفایل‌ها: شامل پروفایل خطی چندگانه، پروفایل چندجمله‌ای، پروفایل غیرخطی، پروفایل موجی شکل، پروفایل اسپیلاین و پروفایل تعمیم یافته.
- (۲) توسعه نمودار کنترل جمع دنباله برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۱.
- (۳) طراحی نمودار کنترل جمع دنباله با افزودن HeadStart برای پایش پروفایل‌های خطی ساده در فاز ۲: با افزودن ویژگی شروع با مقداری غیر از صفر (HeadStart) و افزایش حساسیت نمودار.



شکل (۲). مقایسه نمودارهای کنترل T^2 و RST^2 

شکل (۳). مقایسه نمودارهای کنترل MEWMA و RSMEWMA

International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research, 8(6), 885-890.
<https://doi.org/10.18178/ijmerr.8.6.885-890>.

- [8] Saha, S., Khoo, M. B. C., Ng, P. S. & Khatun, M., (2018). "Variable sampling interval run sum chart with estimated process parameters". In *MATEC Web of Conferences* (Vol. 192, p. 01012).
<https://doi.org/10.1051/mateconf/201819201012>.

- [9] Antzoulakos, D. L., Fountoukidis, K. G. & Rakitzis, A. C., (2023). "A phase II run sum chart for monitoring process mean and variability". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 93(13), 2276-2296.
<https://doi.org/10.1080/00949655.2023.2178652>.

- [10] Mim, F. N., Khoo, M. B. C., Saha, S. & Haq, A., (2022). "New run sum t charts with variable sampling intervals for process mean". *Communications in Statistics Simulation and Computation*, 51(9), 5350-5372.
<https://doi.org/10.1080/03610918.2020.1770285>.

- [11] Antzoulakos, D. L., Fountoukidis, K. G. & Rakitzis, A. C., (2025). "The variable sample size and sampling interval run sum Max chart". *Quality Technology & Quantitative Management*, 22(2), 321-344.
<https://doi.org/10.1080/16843703.2024.2315837>.

- [12] Yeong, W. C., Lim, S. L., Khoo, M. B., Ng, P. S. & Chong, Z. L., (2022). "A variable sampling interval run sum chart for the coefficient of variation". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 92(15), 3150-3166.
<https://doi.org/10.1080/00949655.2022.2061486>.

- [13] Antzoulakos, D. L., Fountoukidis, K. G. & Rakitzis, A. C., (2025). "A Max-type Run Sum Chart for Monitoring a Shifted Exponential Process". *Published online in Quality and*

مراجع

- [1] Acosta-Mejia, C. & Pignatiello Jr, J. J., (2010). "The run sum R chart with fast initial response". *Communications in Statistics Simulation and Computations*, 39(5), 921-932.
<https://doi.org/10.1080/03610911003663899>.
- [2] Teoh, W. L. & Khoo, M. B. C., (2012). "A study on the run sum control chart with unknown parameters". In *AIP Conference Proceedings*, (Vol. 1482, No. 1, pp. 357-362).
<https://doi.org/10.1063/1.4757494>.
- [3] Sitt, C. K., Khoo, M. B. C., Shamsuzzaman, M. & Chen, C. H., (2014). "The run sum t control chart for monitoring process mean changes in manufacturing". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 70(5), 1487-1504. <https://doi.org/10.1007/s00170-013-5333-y>.
- [4] Chew, X. Y., Khoo, M. B. C., Teh, S. Y. & Castagliola, P., (2015). "The variable sampling interval run sum control chart". *Computers & Industrial Engineering*, 90, 25-38.
<https://doi.org/10.1016/j.cie.2015.08.015>.
- [5] Rakitzis, A. C. & Antzoulakos, D. L., (2016). "Run sum control charts for the monitoring of process variability". *Quality Technology & Quantitative Management*, 13(1), 58-77.
<https://doi.org/10.1080/16843703.2016.1139842>.
- [6] Saha, S., Khoo, M. B. C., Teoh, W. L. & Lee, M. H., (2017). "Run sum control chart with estimated process parameters". *Quality and Reliability Engineering International*, 33(8), 1885-1899.
<https://doi.org/10.1002/qre.2153>.
- [7] Gao, H., Khoo, M. B. C., Teh, S. Y. & Teoh, W. L., (2019). "A study on the median run length performance of the run sum S control chart".

- [۱۹] میربیک، حمیدرضا، برادران کاظم زاده، رضا و امیری، امیرحسین، (۱۳۹۵). تخمین نقطه تغییر پله‌ای در پایش پروفایل‌های خطی ساده‌ی خودهمبسته با استفاده از روش‌های ماکزیمم درستنمایی و خوشه بندی. نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، ۴(۷)، ۳۷-۴۷.
<https://doi.org/10.22084/ier.2016.1567>
- [۲۰] قاسمی، زهره و احمدی یزدی، احمد، (۱۴۰۴). نمودارهای کنترلی MHWMA برای پایش پروفایل خطی چندگانه چندمتغیره. نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، ۱۳(۲۶)، ۱۸۳-۱۹۷.
<https://doi.org/10.22084/ier.2025.31437.2211>
- [۲۱] استوده، امین، امیری، امیرحسین، ملکی، محمد رضا و جمشیدی، سینا، (۱۴۰۲). طراحی نمودارهای کنترل میانگین پیش‌رونده برای پایش پروفایل‌های خطی ساده چندمتغیره در فاز ۲. مهندسی صنایع و مدیریت، ۳۹ (۲)، ۹۹-۱۰۸.
<https://doi.org/10.24200/J65.2020.60203.229>
- [22] Sherwani, R. A. K., Qasim, H., Abbas, S., Abbas, T. & Aslam, M., (2023). "Performance evaluation of DEWMA3 in phase-II for capturing changes in simple linear profiles based on run rule mechanism". Scientific Reports, 13(1), 8609.
<https://doi.org/10.1038/s41598-023-35779-0>
- [23] Ghasemi, Z., Yazdi, A. A., & Zeinal Hamadani, A., (2025). "New methods for phase II monitoring of multivariate multiple linear profiles". Quality and Reliability Engineering International, 41(5), 2093-2110. <https://doi.org/10.1002/qre.3756>
- Reliability Engineering International, <https://doi.org/10.1002/qre.3773>.
- [14] Khoo, M. B. C., Sitt, C. K., Zhang, W. & Castagliola, P., (2013). "A run sum Hotelling's χ^2 control chart". Computers & Industrial Engineering, 64, 686-695.
<https://doi.org/10.1016/j.cie.2012.11.008>
- [15] Chew, X. Y., Khoo, M. B. C., Teh, S. Y. & Lee, M. H., (2016). "The run sum Hotelling's χ^2 control chart with variable sampling intervals". Quality and Reliability Engineering International, 32(7), 2573-2590.
<https://doi.org/10.1002/qre.1960>
- [16] Abubakar, S. S., Khoo, M. B. C., Saha, S. & Teoh, W. L., (2022). "Run sum control chart for monitoring the ratio of population means of a bivariate normal distribution". Communications in Statistics-Theory and Methods, 51(13), 4559-4588.
<https://doi.org/10.1080/03610926.2020.1818099>
- [17] Hemmati, M., Amiri, A. & Jalilbal, Z., (2022). "Design of multivariate run sum control chart for monitoring coefficient of variation in the presence of measurement error". Sharif Industrial Engineering and Management, 1-38, 1,111-117.
<https://doi.org/10.24200/j65.2021.58429.2232>.
 [InPersian].
- [18] Saha, S., Khoo, M. B. C., Babatunde, O. T., Teh, S. Y. & Teoh, W. L., (2025). "Run Sum Hotelling's Chart for Autocorrelated processes". Published online in Quality and Reliability Engineering International. <https://doi.org/10.1002/qre.3775>.

Developing Run Sum control charts for monitoring simple linear profiles in Phase II

Seyed Sajad Ehteshami¹, Amirhossein Amiri^{*2}

1. Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Shahed University, Tehran, Iran

2. Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Shahed University, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article history:

Received 2025/11/29

Revised 2026/02/26

Accepted 2026/03/06

Keywords:

Run Sum Control Chart,
Statistical Process Control (SPC),
Average Run Length (ARL),
Profile Monitoring.

ABSTRACT

In this paper, a Shewhart Run Sum control chart based on the Hotelling's T^2 statistic (RST²) and a Multivariate Exponentially Weighted Moving Average control chart (RSMEWMA) are developed for monitoring simple linear profiles in Phase II. The objective is to enhance the performance of existing control charts in detecting small and moderate shifts in the parameters of simple linear profiles. To evaluate the performance of the proposed control charts, both Markov chain methods and Monte Carlo simulation techniques are employed, using the Average Run Length (ARL) and Standard Deviation of the Run Length (SDRL) as performance criteria. The results indicate that the proposed control charts outperform their existing counterparts in the literature. Furthermore, a sensitivity analysis is conducted with respect to the number of in-control profiles, and its impact on the ARL and SDRL performance measures is investigated. Finally, a numerical example is provided to illustrate the practical application of the proposed control charts.

* Corresponding author. A. Amiri
Tel.: 021-51212065; E-mail address: amiri@shahed.ac.ir