

نمودارهای کنترلی MHWMA برای پایش پروفایل خطی چندگانه چند متغیره

زهره قاسمی^۱، احمد احمدی یزدی^{۲*}

۱. دکتری مهندسی صنایع، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع و سیستم‌ها، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

۲. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

خلاصه

در بسیاری از فرآیندهای صنعتی پیچیده، کیفیت محصول را می‌توان با استفاده از مدل پروفایل خطی چندگانه چند متغیره توصیف نمود که شامل روابط رگرسیونی میان متغیرهای پاسخ وابسته و متغیرهای توضیحی می‌باشد. در این پژوهش، سه روش کنترلی جدید مبتنی بر نمودار MHWMA برای پایش پروفایل‌های خطی چندگانه چند متغیره پیشنهاد شده است. این نمودارها با بهره‌گیری از ساختار میانگین متحرک وزنی یکنواخت، قابلیت شناسایی تغییرات ناگهانی در پارامترهای مدل پروفایل را دارا می‌باشند. سه روش پیشنهادی تحت عنوان‌های MHWMA، MHWMA² و MHWMA/χ² توسعه‌یافته، و MHWMA/χ²، به‌گونه‌ای طراحی شده‌اند که هر یک با رویکردی خاص به تحلیل ضرایب مدل و ساختار پراکندگی پروفایل‌ها می‌پردازند. به منظور ارزیابی عملکرد این روش‌ها، شاخص CVRL در یک مطالعه شبیه‌سازی مورد استفاده قرار گرفت و نتایج به‌دست آمده نشان‌داد روش‌های پیشنهادی، به‌ویژه روش MHWMA/χ² در اغلب موارد، قادر به تشخیص سریع انحرافات می‌باشند و عملکرد مناسبی دارند. همچنین، تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای کلیدی مؤثر در طراحی نمودارهای کنترلی، نظیر مقدار پارامتر هموارسازی و اندازه نمونه انجام شده و نتایج حاکی از آن بود که انتخاب مقادیر کوچک‌تر پارامتر هموارسازی و افزایش اندازه نمونه، سرعت تشخیص انحرافات را بهبود می‌بخشد. در ادامه، اثر تخمین پارامترهای پروفایل در فاز ۱ بر عملکرد نمودارها در فاز ۲ به‌صورت جداگانه بررسی شده و نتایج شبیه‌سازی نشان‌داد که تخمین پارامترها در فاز اول می‌تواند تأثیر معناداری بر قابلیت تشخیص انحرافات در فاز ۲ داشته باشد و سرعت شناسایی انحرافات در فاز ۲ را کاهش دهد. در نهایت، جهت ارزیابی کاربردپذیری روش‌های پیشنهادی در محیط واقعی، یک مطالعه موردی صنعتی بررسی شده و اثربخشی نمودارهای کنترلی پیشنهادی در شرایط عملیاتی نیز مورد تأیید قرار گرفت.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۲۶

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۶/۰۶

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۱۸

(مقاله پژوهشی)

کلمات کلیدی:

پایش پروفایل

نمودار MHWMA

پروفایل خطی چندگانه چند

متغیره

شاخص CVRL

۱. مقدمه

در اکثر کاربردهای کنترل فرآیند آماری، کیفیت یک محصول یا فرآیند توسط یک مشخصه کیفی با یک توزیع معین و یا در حالت کلی توسط چندین مشخصه کیفی بایک توزیع چند متغیره توصیف می‌شود و پارامترهای توزیع با استفاده از نمودارهای کنترلی تحت پایش قرار می‌گیرند. اما گاهی کیفیت یک محصول و یا عملکرد یک فرآیند

به‌وسیله رابطه رگرسیونی بین یک متغیر پاسخ و یک یا چند متغیر مستقل توصیف می‌شود [۱]. محققان این رابطه رگرسیونی را «پروفایل» نامیده‌اند که می‌تواند یک رابطه خطی، غیرخطی و یا حتی پیچیده‌تر باشد. پایش پروفایل یکی از موضوعات کاربردی است که اخیراً توسط پژوهشگران توسعه داده شده است. کنگ و آلبین [۲]، کیم و همکاران [۳]، نورالسنا و همکاران [۴]، محمود و وودال [۵]، زو و

* نویسنده مسئول: احمد احمدی یزدی

تلفن: ۰۳۵-۳۱۲۳۲۴۰۸؛ پست الکترونیکی: a.ahmadiyazdi@yazd.ac.ir

برای پایش همزمان بردار میانگین و ماتریس کوواریانس در پایش پروفایل خطی چندگانه چند متغیره ارائه کرده و عملکرد آن‌ها را با برخی روش‌های پایش موجود، مقایسه کردند. کاظم‌زاده و همکاران [۲۲] برای تشخیص شیفت خطی تدریجی و شیفت پله‌ای در پارامترهای پروفایل چندگانه چند متغیره، دو برآوردکننده حداکثر درست‌نمایی مطرح کردند و عملکرد آن‌ها را زمانی که از روش $MEWMA/\chi^2$ پیشنهادشده توسط ایوزیان و همکاران [۱۸] استفاده می‌شود، مقایسه کردند. همچنین اثر ثابت هموارسازی در نمودار $MEWMA$ ، داده گمشده و شیفت تدریجی چندگانه بر عملکرد هر دو برآوردکننده ارزیابی شده است. امیری و همکاران [۲۳] برای شناسایی پروفایل‌ها و پارامترهای خارج از کنترل در پروفایل چندگانه چند متغیره سه روش تشخیصی ارائه کردند و اثربخشی این روش‌ها را با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و یک مطالعه موردی واقعی نشان دادند. احمدی و همکاران [۲۴] با استفاده از رویکرد بیزین در نمودار $MEWMA$ روش جدیدی جهت پایش پروفایل خطی چندگانه چند متغیره مطرح کردند. آن‌ها با استفاده از شاخص ARL نشان دادند عملکرد این نمودار در مقایسه با استنباط سنتی برتری دارد. وانگ و همکاران [۲۵] شرایطی که استقلال بین زیرگروه‌ها برقرار نباشد را در نظر گرفته و با استفاده از دو نمودار $EWMA$ به پایش پروفایل خطی چندگانه چند متغیره پرداختند. آن‌ها عملکرد روش‌های پیشنهادی را با مطالعات شبیه‌سازی و براساس شاخص‌های میانگین و انحراف معیار طول دنباله ارزیابی نمودند. رحیمی و همکاران [۲۶] خودهمبستگی میان مشاهدات درون هر زیرگروه را در نظر گرفته و جهت پایش همزمان پارامترهای پروفایل، چندین نمودار کنترل مطرح کردند. خلیلی و نورالسنا [۲۷] نیز برای پایش این نوع پروفایل، سه روش پایش ارائه نمودند. صباح نو و امیری [۲۸] شش روش پایش برای پروفایل چند متغیره ارائه کرده و عملکرد آن‌ها را با پارامترهای ثابت و متغیر ارزیابی کردند. سه روش پیشنهاد ایشان بر مبنای نمودارهای کنترل T^2 ، $MEWMA$ و LRT و سه روش دیگر با استفاده از تکنیک‌های یادگیری ماشین بود. ژانگ و همکاران [۲۹] با استفاده از پروفایل خطی چندگانه چند متغیره، رابطه میان شکایات مشتری و متغیرهای توضیحی اثرگذار بر آن‌را تحت پایش قرار دادند. آن‌ها با استفاده از تکنیک‌های کاهش ابعاد، این پروفایل را مورد بررسی قرار داده و با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی و موردی اثربخشی روش پیشنهادی خود را نشان دادند. صباح‌نو و اریکسون [۳۰] نمودارهای کنترلی با پارامتر متغیر برای پایش همزمان میانگین و واریانس در پروفایل چندگانه چند متغیره معرفی کردند. آن‌ها نشان دادند که روش‌های معمول پایش پروفایل‌ها با افزایش تعداد متغیرهای توضیحی کارایی خود را از دست می‌دهند؛ بنابراین با استفاده از تکنیک‌های کاهش ابعاد، عملکرد نمودارها را بهبود داده و همچنین بایک مطالعه موردی خدمات هواپیمایی، اثربخشی روش پیشنهادی خود را نشان دادند. قاسمی و همکاران [۳۱] روش‌های نوینی مبتنی بر نمودار $MHWMA$ برای پایش فاز دوم پروفایل خطی چندگانه چند متغیره

همکاران [۶]، محمود و همکاران [۷]، روش‌هایی برای پایش پروفایل خطی ساده در فاز ۱ یا ۲ مطرح کردند. پروفایل خطی چندگانه توسط محمود [۸]، جنسن و همکاران [۹]، امیری و همکاران [۱۰] مورد بررسی قرار گرفت. جهت پایش پروفایل‌های چندجمله‌ای در فازهای ۱ و ۲، کاظم‌زاده و همکاران [۱۱]، زو و همکاران [۱۲]، عبدالله و همکاران [۱۳] روش‌هایی مطرح کردند. پایش پروفایل‌های غیرخطی توسط محققانی همچون ویلیام و همکاران [۱۴]، واکر و رایت [۱۵] و ویلیام و همکاران [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفت.

کیفیت یک فرآیند یا محصول را گاه می‌توان به‌وسیله چند پروفایل همزمان توصیف نمود که در آن‌ها، متغیرهای پاسخ به یکدیگر وابسته‌اند. در این شرایط چنانچه وابستگی بین متغیرهای پاسخ در نظر گرفته نشود و پروفایل‌ها جداگانه پایش شوند، ممکن است نتایج گمراه‌کننده‌ای ایجاد شود. برای رفع این مشکل، در نظر گرفتن ساختار چند متغیره برای متغیرهای پاسخ غیرقابل اجتناب است. پارکر و همکاران [۱۷] با طرح یک مثال کاربردی نشان دادند گاهی لازم است چند پروفایل مختلف به‌صورت همزمان تحت پایش قرار گیرند که به‌دلیل وابسته بودن متغیرهای پاسخ، لازم است از روش‌های پایش چند متغیره استفاده شود. آن‌ها در مطالعه خود به مثالی از کالیبراسیون تعادل نیرو در ناسا اشاره کردند که در آن هر یک از متغیرهای پاسخ به‌عنوان یک تابع خطی چندگانه مدل می‌شدند و با توجه به وابسته بودن متغیرهای پاسخ، یک رابطه رگرسیونی خطی چندگانه چند متغیره مطرح شد. پارکر و همکاران [۱۷] در این مطالعه پایش رابطه بین متغیرهای پاسخ و متغیرهای مستقل در حالت رگرسیون خطی چند متغیره را به‌عنوان یک شکاف تحقیقاتی و یک موضوع کاربردی مطرح کردند.

پروفایل‌های خطی چندگانه چند متغیره در فاز ۲ توسط برخی محققان مورد مطالعه قرار گرفته است. ایوزیان و همکاران [۱۸] برای پایش این نوع پروفایل در فاز دوم، چهار روش ارائه کردند. آن‌ها عملکرد این روش‌ها را با استفاده از معیار ARL (متوسط طول دنباله) مقایسه کرده و با استفاده از یک مطالعه موردی، کاربردی بودن روش‌های پیشنهادی را نشان دادند. زو و همکاران [۱۹] جهت پایش پارامترهای پروفایل و پراکندگی فرآیند یک نمودار کنترل چند متغیره براساس انتخاب متغیر پیشنهاد دادند که قادر است جهت انحراف ایجادشده را به‌صورت خودکار شناسایی کند. استفاده از این روش در یک سرویس لجستیک واقعی، عملکرد مناسب این روش را در عمل نشان داد. قشقایی و امیری [۲۰] برای پایش همزمان بردار میانگین و ماتریس کوواریانس در پروفایل چندگانه چند متغیره، چهار نمودار کنترل ارائه دادند. نتایج به‌دست‌آمده نشان‌داد این روش‌ها قادر به شناسایی پارامتر خارج از کنترل می‌باشند. همچنین عملکرد روش‌های پیشنهادشده در مقایسه با روش نسبت درست‌نمایی مطرح‌شده توسط ایوزیان و همکاران [۱۸] بررسی شده و عملکرد بهتر آن‌ها نشان داده شد. قشقایی و همکاران [۲۱] دو نمودار کنترل نیم‌دایره‌ای میانگین متحرک موزون نمایی و نیم‌دایره‌ای میانگین متحرک موزون عمومی

ارائه کردند. آن‌ها عملکرد روش‌های پیشنهادی خود را برحسب شاخص ARL با مطالعات پیشین مقایسه کرده و عملکرد بهتر این روش‌ها را نشان دادند.

ناصری و همکاران [۳۲] یک مدل پایش پروفایل چندگانه چند متغیره با در نظر گرفتن ریسک برای ارزیابی کیفیت قطعات و محصولات تأمین‌کننده ارائه کردند. در این مدل ابتدا شاخص‌های ارزیابی و تابع ریسک با نظر خبرگان و منابع استخراج می‌شود و سپس با روش‌های آماری، فرآیند کیفیت در طول زمان کنترل می‌گردد. آن‌ها مدل پیشنهادی خود را در صنعت خودروسازی ایران خودرو و تأمین‌کننده گیربکس شرکت نیرومحرکه پیاده‌سازی نمودند. ادیب‌فر و نورالسنا [۳۳] روشی نوین برای محاسبه شاخص قابلیت پروفایل خطی در فرآیندهای دو مرحله‌ای ارائه کردند. براساس نتایج آن‌ها به دلیل خاصیت آبخاری میان مراحل، روش‌های آماری متداول ممکن است نتایج دقیقی به همراه نداشته باشد؛ بنابراین رویکردی متناسب با ساختار چند مرحله‌ای طراحی و معرفی شد. آن‌ها اعتبار روش پیشنهادی خود را از طریق یک مثال عددی بررسی کرده و کارایی آن را نشان دادند.

همان‌طور که اشاره شد، پایش پروفایل‌ها توسط نمودارهای کنترل انجام می‌شود که نقش اساسی آن‌ها تعیین وضعیت فرآیند است. نمودارهای کنترل به دو گروه نمودارهای بدون حافظه و نمودارهای حافظه‌دار تقسیم‌بندی می‌شوند. در صنایع تولیدی و خدماتی، نمودارهای کنترل حافظه‌دار به‌طور گسترده‌ای جهت پایش فرآیندها استفاده می‌گردند. یکی از انواع نمودارهای حافظه‌دار نمودار کنترل میانگین متحرک وزنی یکنواخت است که توسط عباس [۳۴] مطرح شد. در این نمودار به مشاهده فعلی وزن مشخصی تخصیص داده شده و وزن باقی‌مانده به‌طور مساوی میان کلیه مشاهدات قبلی توزیع می‌شود. این ویژگی منجر به توانایی بهتر نمودار در تشخیص تغییرات پارامترهای فرآیند، به‌ویژه تغییرات کوچک، می‌شود. ادگوک و همکاران [۳۵] برای پایش بردار میانگین در یک فرآیند چند متغیره، نمودار میانگین متحرک موزون همگن چند متغیره را معرفی کردند. این نمودار، تعمیم نمودار HWMA مطرح‌شده توسط عباس [۳۴]، برای پایش فرآیند چند متغیره می‌باشد. آن‌ها عملکرد این نمودار را با نمودارهای کنترل χ^2 هاتلینگ [۳۶]، MEWMA مطرح‌شده توسط لوری و همکاران [۳۳]، MCI مطرح‌شده توسط پیگناتیلو و رانگر [۳۷] و MCUSUM مطرح‌شده توسط کروسیر [۳۸]، براساس شاخص ARL مقایسه کردند. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد نمودار MHWMA در مقایسه با سایر روش‌ها، مقادیر ARL خارج از کنترل کمتری داشته و در تشخیص شیفتهای کوچک مؤثرتر است. یوسفی و همکاران [۳۹] عملکرد نمودار کنترل MHWMA برای پایش میانگین فرآیند را با وجود خطای سیستم اندازه‌گیری بررسی کردند. آن‌ها تأثیر قابلیت پایین سیستم اندازه‌گیری را بر حساسیت نمودار کنترل MHWMA در فاز دوم مورد بررسی قرار داده و با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی، عملکرد طول دنباله این نمودار را بررسی کردند. نتایج به‌دست‌آمده

نشان داد اندازه‌گیری‌های نادقیق، توانایی تشخیص نمودار کنترل MHWMA را در تشخیص شیفتهای مختلف فرآیند کاهش می‌دهد و این تأثیر با افزایش واریانس خطا، افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش تعداد اندازه‌گیری‌ها، توانایی تشخیص نمودار MHWMA به حالت بدون خطا نزدیک‌تر می‌شود. ادگوک و همکاران [۴۰] برای پایش تغییرات در بردار میانگین فرآیند چند متغیره، نمودارهای کنترل یک‌طرفه براساس نمودار کنترل MHWMA پیشنهاد کردند. آن‌ها دو نمودار کنترل یک‌طرفه برای یافتن تغییرات مثبت میانگین معرفی کرده و همچنین با تجمیع دو نمودار یک‌طرفه، روشی برای شناسایی تغییرات مثبت و منفی میانگین در قالب یک نمودار ارائه کردند. مطالعات شبیه‌سازی نشان داد با در نظر گرفتن شیفتهای مختلف، عملکرد این نمودارها در مقایسه با نمودارهای موجود (MEWMA و CUSUM) بهتر بوده و شیفتهای کوچک میانگین سریع‌تر شناسایی می‌شوند. عباس و همکاران [۴۱] نمودار کنترل MHWMA را با یک ساختار کارآمد برای حالتی که اندازه نمونه بزرگ‌تر از یک باشد، طراحی کردند. آن‌ها همچنین تأثیر ماتریس کوواریانس برآوردشده را بر روی نمودار پیشنهادی خود بررسی کردند. عملکرد طول دنباله این نمودار بررسی شده و نتایج به‌دست‌آمده نشان داد در هر دو حالت پارامتر معلوم و پارامتر تخمین‌زده شده، نمودار پیشنهادی بهتر از نمودارهای مورد مقایسه عمل می‌کند. پیترز و همکاران [۴۲] استفاده از نمودارهای کنترل را تنها برای تعیین وضعیت پایداری فرآیند مناسب دانسته که اطلاعات اضافی دیگری در رابطه با فرآیند ارائه نمی‌دهند. آن‌ها با معرفی یک نمودار MHWMA توسعه‌یافته مبتنی بر یادگیری ماشین راه‌حلی برای رفع این ایراد ارائه کردند. عملکرد توزیع طول دنباله در نمودار پیشنهادی با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی بررسی شد و نتایج به‌دست‌آمده نشان داد تکنیک یادگیری ماشین استفاده شده می‌تواند منجر به طبقه‌بندی رویدادهای خارج از کنترل شود، به‌گونه‌ای که علل ریشه‌ای تغییر در فرآیند، بهتر شناسایی شود.

با وجود مطالعات متعدد در حوزه پایش پروفایل‌ها، تمرکز بسیاری از پژوهش‌ها بر پروفایل‌های تک‌متغیره مانند پروفایل خطی ساده بوده و بررسی پروفایل‌های خطی چندگانه چند متغیره، به‌ویژه در فاز دوم کنترل فرآیند، کمتر مورد توجه قرار گرفته است. همچنین، با وجود پتانسیل بالای نمودارهای میانگین متحرک با وزن‌دهی یکنواخت (MHWMA) در شناسایی تغییرات ناگهانی، توسعه و کاربرد آن‌ها در این حوزه محدود باقی مانده است. در راستای پوشش این شکاف تحقیقاتی، این مطالعه به دنبال توسعه و ارائه روش‌های کنترلی جدید مبتنی بر نمودار MHWMA برای پایش پروفایل‌های خطی چندگانه چند متغیره در فاز ۲ می‌باشد. بر این اساس سه روش پایش با هدف افزایش سرعت تشخیص انحرافات، بهبود عملکرد آماری نسبت به رویکردهای پیشین و بررسی اثر تخمین پارامترها در فاز اول طراحی شده‌اند. در ادامه، ساختار مقاله به تفصیل شرح داده شده است. در بخش دوم، مدل پروفایل خطی چندگانه چند متغیره تعریف شده و در بخش سوم روش‌های کنترلی پیشنهادی به تفصیل معرفی

۳. نمودارهای کنترلی پیشنهادی برای پایش پروفایل

خطی چندگانه چند متغیره در فاز ۲

در این بخش سه روش پایش جدید مبتنی بر نمودار کنترل MHWMA برای پایش پروفایل خطی چندگانه چند متغیره ارائه می‌شود. در ادامه، جزئیات هر روش به تفصیل شرح داده خواهد شد.

۳-۱. نمودار کنترلی MHWMA

در این روش ماتریس $\hat{\mathbf{B}}_k$ به صورت یک بردار تصادفی نرمال چند متغیره ($\hat{\mathbf{B}}_k$) با ابعاد $(q+1)p \times 1$ بازنویسی شده و از یک نمودار MHWMA برای پایش پارامترهای پروفایل در این بردار استفاده می‌شود. بردار $\hat{\mathbf{B}}_k$ که به صورت $(\hat{\beta}_{01k}, \dots, \hat{\beta}_{q1k}, \hat{\beta}_{02k}, \dots, \hat{\beta}_{q2k}, \dots, \hat{\beta}_{0pk}, \dots, \hat{\beta}_{qpk})'$ نمایش داده می‌شود، در صورت تحت کنترل بودن فرآیند، دارای توزیع نرمال چند متغیره با میانگین (β) و واریانس ($\Sigma_{\beta k}$) می‌باشد:

$$E(\hat{\mathbf{B}}_k) = \beta' = (\beta_{01}, \beta_{11}, \dots, \beta_{q1}, \beta_{02}, \beta_{12}, \dots, \beta_{q2}, \dots, \beta_{0p}, \beta_{1p}, \dots, \beta_{qp}) \quad (4)$$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{B}}_k} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \dots & \Sigma_{1p} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \dots & \Sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{p1} & \Sigma_{p2} & \dots & \Sigma_{pp} \end{bmatrix} \quad (5)$$

عناصر ماتریس $\Sigma_{\hat{\mathbf{B}}_k}$ به صورت ماتریس‌های Σ_{uv} با ابعاد $(q+1) \times (q+1)$ و برابر با $\Sigma_{uv}^{-1} \sigma_{uv}$ می‌باشند. عنصر سطر u ام و ستون v ام ماتریس Σ می‌باشد. بر این اساس، نمودار MHWMA برای پایش بردار $\hat{\mathbf{B}}_k$ به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\mathbf{H}_k = w\hat{\mathbf{B}}_k + (1-w)\bar{\hat{\mathbf{B}}}_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

که در آن w پارامتر هموارسازی ($0 < w \leq 1$) و $\bar{\hat{\mathbf{B}}}_{k-1}$ میانگین بردار پارامترها در نمونه‌های قبلی تا $k-1$ امین نمونه می‌باشد. $\bar{\hat{\mathbf{B}}}_0$ نیز برابر با β در نظر گرفته می‌شود. می‌توان نشان داد در یک فرآیند تحت کنترل، $\mathbf{H}_k$ دارای توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین β و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{\mathbf{H}_k}$ می‌باشد.

$\Sigma_{\mathbf{H}_k}$ یک ماتریس $2p \times 2p$ است که با استفاده از رابطه (۷) محاسبه می‌شود.

$$\Sigma_{\mathbf{H}_k} = \begin{cases} w^2 \Sigma_{\hat{\mathbf{B}}_k} & k = 1 \\ w^2 \Sigma_{\hat{\mathbf{B}}_k} + (1-w)^2 \frac{\Sigma_{\hat{\mathbf{B}}_k}}{k-1} & k \geq 2 \end{cases} \quad (7)$$

بنابراین برای زیرگروه k ام، مقدار آماره T_k^2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_k^2 = (\mathbf{H}_k - \beta)' \Sigma_{\mathbf{H}_k}^{-1} (\mathbf{H}_k - \beta) \quad (8)$$

اگر مقدار آماره T_k^2 از حد بالای h بیشتر شود، نمودار هشدار خارج از کنترل خواهد داد. همچنین مقدار h براساس شبیه‌سازی مونت کارلو و به گونه‌ای تعیین می‌شود که ARL تحت کنترل مورد انتظار به دست آید.

۳-۲. نمودار کنترلی MHWMA توسعه یافته (Modified MHWMA)

در روش MHWMA با افزایش تعداد پارامترهای پروفایل، ابعاد بردار

می‌گردند. بخش چهارم به طراحی و اجرای مطالعات شبیه‌سازی اختصاص دارد که عملکرد روش‌ها را مورد ارزیابی قرار می‌دهد. در بخش پنجم، تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای طراحی نمودارها بررسی شده و در بخش ششم اثر تخمین پارامترها در فاز اول بر عملکرد روش‌های پیشنهادی بررسی می‌شود. بخش هفتم به ارائه یک مطالعه‌ی موردی واقعی برای بررسی اثربخشی عملی روش‌های پیشنهادی می‌پردازد. در نهایت، در بخش هشتم نتایج کلی جمع‌بندی شده و پیشنهادهایی برای پژوهش‌های آتی ارائه می‌گردد.

۲. مدل رگرسیونی پروفایل خطی چندگانه چند متغیره

گاهی کیفیت یک محصول یا فرآیند توسط پروفایل‌های خطی چندگانه چند متغیره مطرح شود که منظور از چندگانه تعدد متغیرهای مستقل و منظور از چند متغیره تعدد متغیرهای وابسته است. در این نوع پروفایل چند متغیر پاسخ وجود دارد که به هم وابسته‌اند و به عنوان توابعی خطی از متغیرهای مستقل مطرح می‌شوند. $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iq}, y_{1ik}, y_{2ik}, \dots, y_{pik})$ نشان‌دهنده مشاهده i ام در زیرگروه k ام می‌باشد که در آن p تعداد متغیرهای پاسخ و q تعداد متغیرهای مستقل است. هنگامی که فرآیند تحت کنترل آماری است، مدلی که ارتباط متغیرهای پاسخ را با متغیرهای مستقل نشان می‌دهد، یک مدل رگرسیون خطی چندگانه چند متغیره است که به صورت $\mathbf{Y}_k = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E}_k$ نشان داده می‌شود و مدل مبسوط آن در رابطه (۱) نشان داده شده است.

$$\begin{bmatrix} y_{11k} & y_{12k} & \dots & y_{1pk} \\ y_{21k} & y_{22k} & \dots & y_{2pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1k} & y_{n2k} & \dots & y_{npk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1q} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{01} & \beta_{02} & \dots & \beta_{0p} \\ \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \dots & \beta_{qp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11k} & \varepsilon_{12k} & \dots & \varepsilon_{1pk} \\ \varepsilon_{21k} & \varepsilon_{22k} & \dots & \varepsilon_{2pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1k} & \varepsilon_{n2k} & \dots & \varepsilon_{npk} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\mathbf{Y}_k$ ماتریس $n \times p$ متغیرهای پاسخ در زیرگروه k ام، $\mathbf{X}$ ماتریس $n \times (q+1)$ متغیرهای مستقل و $\mathbf{E}_k$ ماتریس $n \times p$ عبارات خطاست. بردار عبارات خطا در هر سطر ماتریس، دارای توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس Σ می‌باشد.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\mathbf{B}$ ماتریس $(q+1) \times p$ پارامترهای مدل رگرسیونی است که برآورد آن‌ها در هر زیرگروه ($\hat{\mathbf{B}}_k$) با استفاده از روش حداقل مربعات به صورت زیر خواهد بود.

$$\hat{\mathbf{B}}_k = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}_k \quad (3)$$

که در آن w پارامتر هموارسازی ($0 < w \leq 1$) بوده و $\bar{\mathbf{E}}_{k-1}$ میانگین بردارهای میانگین خطا در نمونه‌های قبلی تا $k-1$ امین نمونه را نشان می‌دهد. $\bar{\mathbf{E}}_0$ بردار صفر در نظر گرفته می‌شود. در یک فرآیند تحت کنترل، $\mathbf{H}_k$ دارای توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{\mathbf{H}_k}$ می‌باشد. در این حالت $\Sigma_{\mathbf{H}_k}$ یک ماتریس $p \times p$ و به صورت زیر است:

$$\Sigma_{\mathbf{H}_k} = \begin{cases} w^2 \Sigma_{\bar{\mathbf{E}}} & k = 1 \\ w^2 \Sigma_{\bar{\mathbf{E}}} + (1-w)^2 \frac{\Sigma_{\bar{\mathbf{E}}}}{k-1} & k \geq 2 \end{cases} \quad (16)$$

آماره T_k^2 برای زیرگروه k ام برابر است با:

$$T_k^2 = (\mathbf{H}_k)' \Sigma_{\mathbf{H}_k}^{-1} (\mathbf{H}_k) \quad (17)$$

حد بالای کنترل نمودار برابر با h در نظر گرفته شده و به گونه‌ای حساب می‌شود که ARL تحت کنترل خاصی حاصل شود. جهت پایش تغییرپذیری فرآیند، آماره χ^2 به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ik} \Sigma^{-1} \varepsilon'_{ik} \quad (18)$$

که در آن ε_{ik} سطر k ام ماتریس $\mathbf{E}_k$ ، دارای توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس Σ می‌باشد. در این مورد هنگامی که فرآیند تحت کنترل است، χ_k^2 دارای توزیع کای دو با np درجه آزادی است. بنابراین $UCL = \chi_{np, \alpha}^2$ خواهد بود. این آماره برای تشخیص تغییرات بزرگ در درایه‌های بردار میانگین خطاها نیز کاربرد دارد.

۴. مقایسه عملکرد نمودارهای کنترلی پیشنهادی

جهت مقایسه عملکرد روش‌های پیشنهادی، رویکردی براساس شبیه‌سازی مونت کارلو توسعه داده شده است که مراحل آن به صورت زیر می‌باشد:

(۱) با فرض تحت کنترل بودن فرآیند و معلوم بودن پارامترها (ماتریس‌های $\mathbf{B}$ و Σ)، حدود کنترل هر یک از نمودارهای کنترل به گونه‌ای محاسبه شده که ARL تحت کنترل ۲۰۰ حاصل شود. این حدود در جدول (۱) ارائه شده است.

(۲) یک زیرگروه تحت کنترل و تصادفی براساس پارامترهای معلوم با استفاده از توزیع نرمال چند متغیره با میانگین صفر و کوواریانس Σ تولید می‌شود.

(۳) آماره هر یک از نمودارهای کنترل براساس پارامترهای معلوم محاسبه شده و با حدود کنترل به دست آمده در مرحله ۱ مقایسه می‌شوند.

(۴) مراحل ۲ و ۳ تا زمان مشاهده یک هشدار خارج از کنترل، تکرار می‌شوند. با مشاهده هشدار خارج از کنترل، مقدار طول دنباله (RL) ثبت می‌شود.

(۵) مراحل ۲ تا ۴ را ۱۰۰۰۰ بار تکرار کرده تا ۱۰۰۰۰ مقدار برای RL به دست آید. با میانگین گرفتن از مقادیر RL، مقدار ARL

حاصل از آن‌ها ($\hat{\beta}_k$) معمولاً بزرگ می‌شود. محمود [۸] در مطالعه خود برای کاهش ابعاد پروفایل خطی چندگانه روشی ارائه کرد که در آن، صرف‌نظر از تعداد متغیرهای مستقل، تنها با استفاده از سه پارامتر عرض از مبدأ، شیب و واریانس می‌توان این پروفایل را پایش نمود. در این بخش، با استفاده از همین روش، ساختار رگرسیون خطی چندگانه چند متغیره به رگرسیون خطی ساده چند متغیره تغییر می‌کند. در نتیجه بعد بردار $\hat{\beta}_k$ از $(q+1)p$ به $2p$ کاهش می‌یابد. در این روش برای زیرگروه k ام، مدل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} y_{1jk} \\ y_{2jk} \\ \vdots \\ y_{njk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_{1j} \\ 1 & u_{2j} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0jk} \\ A_{1jk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1jk} \\ \varepsilon_{2jk} \\ \vdots \\ \varepsilon_{njk} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (9)$$

که در آن میانگین u_{ij} زامین متغیر پاسخ بوده و برابر است با:

$$u_{ij} = E(y_{ij}) = \beta_{0j} + \beta_{1j}x_{1i} + \dots + \beta_{qj}x_{qi} \quad (10)$$

پارامترهای A_{0jk} و A_{1jk} برای تمامی متغیرهای پاسخ ($j = 1, 2, \dots, p$) با استفاده از روش تخمین حداقل مربعات، برآورد می‌شوند و با توجه به همبسته بودن برآوردکننده‌ها بهتر آن است که این پارامترها جداگانه پایش نشوند.

با استفاده از مدل (۹) برای هر زیرگروه، پارامترهای برآورد شده در هر زیرگروه به صورت بردار زیر تجمیع می‌شوند:

$$\hat{\mathbf{A}}_k = (\hat{A}_{01k}, \hat{A}_{11k}, \hat{A}_{02k}, \hat{A}_{12k}, \dots, \hat{A}_{0pk}, \hat{A}_{1pk})' \quad (11)$$

در یک فرآیند تحت کنترل، امید ریاضی $\hat{\mathbf{A}}_k$ برابر است با:

$$E(\hat{\mathbf{A}}_k) = \mathbf{A} = (A_{01}, A_{11}, A_{02}, A_{12}, \dots, A_{0p}, A_{1p})' \quad (12)$$

$$= (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)'$$

و ماتریس واریانس کوواریانس آن:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{A}}_k} = \begin{bmatrix} \Sigma'_{11} & \Sigma'_{12} & \dots & \Sigma'_{1p} \\ \Sigma'_{21} & \Sigma'_{22} & \dots & \Sigma'_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma'_{p1} & \Sigma'_{p2} & \dots & \Sigma'_{pp} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Σ'_{uv} یک ماتریس 2×2 بوده و عناصر آن به شرح زیر می‌باشند:

$$\Sigma'_{rt} = \begin{bmatrix} cov(\hat{A}_{0rk}, \hat{A}_{0tk}) & cov(\hat{A}_{0rk}, \hat{A}_{1tk}) \\ cov(\hat{A}_{1rk}, \hat{A}_{0tk}) & cov(\hat{A}_{1rk}, \hat{A}_{1tk}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

ایوزیان و همکاران [۱۸] در مطالعه خود به تشریح عناصر این ماتریس پرداختند. در نهایت مشابه روش قبل، از یک نمودار MHWMA برای پایش ساختار رگرسیون خطی ساده چند متغیره در طول زمان استفاده می‌شود.

۳-۳. نمودار کنترلی $MHWMA/\chi^2$

در این روش از نمودارهای MHWMA و χ^2 برای پایش تفاوت پروفایل مرجع و پروفایل نمونه استفاده می‌شود. $\bar{\mathbf{E}}_k = (\bar{E}_{1k}, \bar{E}_{2k}, \dots, \bar{E}_{pk})$. بردار $1 \times p$ میانگین خطاهاست که در آن $\bar{E}_{jk} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ijk}$ و $j = 1, 2, \dots, p$ می‌باشد. در یک فرآیند تحت کنترل، بردار میانگین خطاها ($\bar{\mathbf{E}}_k$) از توزیع نرمال p متغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{\bar{\mathbf{E}}} = n^{-1} \Sigma$ پیروی می‌کند. برای k امین زیرگروه، آماره MHWMA جهت پایش بردار میانگین خطاها به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{H}_k = w \bar{\mathbf{E}}'_k + (1-w) \bar{\mathbf{E}}'_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

$MHWMA/\chi^2$ در تشخیص تغییرات پارامتر شیب بهتر از روش‌های دیگر می‌باشد. روش‌های $MHWMA$ توسعه‌یافته و $MHWMA$ نیز عملکرد مشابه و مناسبی دارند. با افزایش مقدار ρ ، عملکرد کلیه روش‌ها بهبود می‌یابد. مشابه این نتایج برای پارامترهای β_{21} ، β_{12} و β_{22} نیز به‌دست می‌آید که به‌دلیل تشابه ذکر نشده است.

جدول (۴) مقادیر شبیه‌سازی‌شده CVRL را برای انحراف معیار پروفایل اول از σ_1 به $\gamma\sigma_1$ نشان می‌دهد. همه روش‌ها به‌طور نسبی عملکرد مناسبی دارند. روش $MHWMA/\chi^2$ به‌ازای همه تغییرات در نظر گرفته‌شده، به‌طور یکنواخت بهتر از سایر روش‌ها عمل می‌کند. نمودار χ^2 در این روش، توانایی تشخیص تغییرات انحراف معیار پروفایل را افزایش می‌دهد. مقایسه دو روش دیگر نیز نشان می‌دهد روش $MHWMA$ توسعه‌یافته در تشخیص تغییرات کوچک‌تر و روش $MHWMA$ در تشخیص تغییرات بزرگ‌تر عملکرد بهتری دارند. به‌طریق مشابهی عملکرد کلیه روش‌ها با افزایش مقدار ρ بهبود می‌یابند. در صورت ایجاد تغییر در پارامتر σ_2 نیز نتایج مشابهی حاصل شده که ذکر نشده است.

۵. آنالیز حساسیت پارامترها

در این بخش، حساسیت عملکرد روش‌های کنترلی پیشنهادی نسبت به تغییرات پارامترهای طراحی با استفاده از شبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. انجام این بررسی، دید دقیق‌تری نسبت به نقاط قوت و محدودیت‌های هر روش فراهم کرده و اهمیت انتخاب مناسب پارامترها را برجسته می‌سازد.

۵-۱. تأثیر اندازه نمونه بر عملکرد روش‌های پیشنهادی

جهت بررسی تأثیر اندازه نمونه بر عملکرد روش‌های پیشنهادی، به ازای مقادیر $n = 10$ ، $n = 20$ و $n = 50$ نیز شبیه‌سازی انجام و مقادیر ARL خارج از کنترل محاسبه گردید. نتایج به‌دست‌آمده نشان داد با افزایش اندازه نمونه عملکرد روش‌های پیشنهادی در تشخیص تغییرات، بهبود می‌یابد. به‌عنوان مثال در شرایطی که اندازه نمونه برابر با ۱۰ بوده و تغییری به اندازه ۰/۲ در پارامتر β_{01} رخ دهد، مقدار ARL برابر با ۱۱/۹ می‌باشد و اگر اندازه نمونه برابر با ۲۰ باشد، مقدار ARL برابر با ۷/۱ خواهد بود. قابل ذکر است که در عملکرد روش‌های $MHWMA$ و $MHWMA$ توسعه‌یافته در تشخیص تغییرات انحراف معیار بهبود قابل توجهی مشاهده نشد. جهت جلوگیری از طولانی شدن متن، از آوردن جزئیات نتایج شبیه‌سازی خودداری شده است.

۵-۲. تأثیر پارامتر هموارسازی بر عملکرد روش‌های پیشنهادی

در این بخش تأثیر پارامتر هموارسازی بر عملکرد روش‌های پیشنهادی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد با افزایش مقدار w ، عملکرد کلیه روش‌ها براساس شاخص ARL، به‌جز روش‌های $MHWMA$ و $MHWMA$ توسعه‌یافته در تشخیص تغییرات انحراف معیار، کاهش می‌یابد. همان‌طور که ادگوک و همکاران [۳۵] مطرح کردند با افزایش پارامتر هموارسازی، توانایی نمودار کنترل

محاسبه می‌شود. واریانس مقادیر RL نیز به‌عنوان SDRL محاسبه شده و نهایتاً مقدار CVRL به‌دست می‌آید.

پارامتر هموارسازی (w) در نمودارهای $MHWMA$ برابر با ۰/۳ در نظر گرفته شده است. تجزیه و تحلیل و مقایسه روش‌های پیشنهادی را به‌ازای مقادیر مختلف p می‌توان انجام داد. مثال مورد استفاده در این بخش عبارت است از:

$$Y_1 = 3 + 2x_1 + x_2 + \varepsilon_1 \quad (19)$$

$$Y_2 = 2 + x_1 + x_2 + \varepsilon_2$$

جفت‌های مرتب $(1, 2)$ ، $(2, 3)$ ، $(3, 4)$ و $(4, 2)$ به‌عنوان ۴ مشاهده برای متغیرهای مستقل x_1 و x_2 در نظر گرفته شده‌اند. بردار عبارات خطای $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ دارای توزیع نرمال دومتغیره با بردار میانگین صفر و ماتریس کوواریانس معلوم Σ است.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

که در آن $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ می‌باشد. مقدار ضریب همبستگی نیز برابر با $\rho = 0.5$ در نظر گرفته می‌شود.

تغییرات در نظر گرفته شده برای بررسی عملکرد روش‌های پیشنهادی، شامل تغییر در (۱) عرض از مبدأ پروفایل اول (β_{01}) ، (۲) تغییر در شیب پروفایل اول (β_{11}) ، (۳) تغییر در پراکندگی پروفایل اول (σ_1) می‌باشد. شاخص مورد استفاده جهت ارزیابی روش‌ها، شاخص ضریب تغییرات (CVRL) است که جهت اندازه‌گیری پراکندگی داده‌های آماری به‌کار می‌رود. این شاخص توسط بات و مالگاوی [۴۳] معرفی شد و میزان پراکندگی را به ازای یک واحد از میانگین بیان می‌کند. مقدار CVRL با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$CVRL = \frac{SDRL}{ARL} \quad (21)$$

نتایج حاصل‌شده از شبیه‌سازی در جداول (۲) تا (۴) ارائه شده است.

جدول (۲) مقادیر CVRL شبیه‌سازی‌شده را برای شیفتهای عرض از مبدأ اولین پروفایل (β_{01}) برحسب واحدهای σ_1 نشان می‌دهد. کلیه روش‌های پیشنهادی عملکرد نسبتاً مناسبی داشته و تغییرات ایجادشده را با سرعت قابل قبولی تشخیص می‌دهند. با این حال، نمودار کنترلی $MHWMA/\chi^2$ به‌ازای همه تغییرات در نظر گرفته‌شده، به‌طور یکنواخت بهتر از سایر روش‌ها عمل می‌کند. مقایسه دوروش دیگر نیز نشان می‌دهد روش $MHWMA$ در تشخیص تغییرات کوچک‌تر و روش $MHWMA$ توسعه‌یافته در تشخیص تغییرات بزرگ‌تر عملکرد بهتری دارند. باید توجه داشت که با افزایش مقدار ρ عملکرد روش‌ها بهبود می‌یابد. همچنین جهت تشخیص تغییرات عرض از مبدأ دومین پروفایل (برحسب واحد σ_2) نتایج مشابهی حاصل می‌شود که جهت جلوگیری از طولانی شدن متن، از ارائه نتایج خودداری شده است.

مقادیر CVRL شبیه‌سازی‌شده برای تغییر در شیب اولین پروفایل از β_{11} به $\beta_{11} + \delta\sigma_1$ در جدول (۳) نشان داده شده است. روش‌های پیشنهادی عملکرد مناسبی داشته و تغییرات ایجادشده را به‌خوبی تشخیص می‌دهند. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد عملکرد روش

با توجه به مقادیر مطلوب AARL و SDARL در شرایطی که از پارامترهای تخمین زده شده در فاز ۲ استفاده می‌کنیم، مقدار مطلوب شاخص CVARL برابر با صفر خواهد بود.

جدول (۶) عملکرد CVARL روش‌های پیشنهادی را در شرایط تحت کنترل نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشخص است عملکرد روش‌ها به شدت از تخمین پارامترها تأثیر می‌پذیرد. براساس نتایج شبیه‌سازی و با استفاده از m زیرگروه در فاز ۱ جهت تخمین پارامترها، روش $MHWMA/\chi^2$ عملکردی بهتر از سایر روش‌ها دارد چراکه مقادیر CVARL آن به‌ازای مقادیر مختلف m کمتر می‌باشد.

برای ارزیابی عملکرد خارج از کنترل روش‌های پایش فاز ۲ با استفاده از پارامترهای تخمین زده شده، در یکی از پارامترهای فرآیند شیف‌ت مشخصی ایجاد می‌شود، اما هشدار خارج از کنترل نمودار در این حالت علاوه بر آن که نشان‌دهنده خارج از کنترل بودن فرآیند است، می‌تواند به دلیل تأثیر تخمین پارامترها نیز باشد. بنابراین هر یک از این روش‌ها باید به گونه‌ای طراحی شوند که ARL تحت کنترل یکسانی داشته باشند تا هشدار خارج از کنترل نمودار، تنها نشان‌دهنده خارج از کنترل بودن فرآیند باشد. به این منظور در طراحی نمودارهای کنترل می‌توان از حدود کنترل اصلاح‌شده استفاده کرد تا ARL تحت کنترل مطلوب حاصل شود. این حدود با استفاده از رویکرد شبیه‌سازی مشابه مطالعه نورالسنا و همکاران [۴۷] به منظور دستیابی به $ARL_0 = 200$ با ۵۰۰۰ تکرار شبیه‌سازی به دست آمده است.

به منظور بررسی عملکرد خارج از کنترل هر یک از روش‌های پیشنهادی، می‌توان تغییرات مختلفی در پارامترها در نظر گرفت. در این بخش، تغییر در پارامتر β_{01} (عرض از مبدأ پروفایل اول) مورد توجه است. جدول (۷) حدود کنترل اصلاح‌شده در روش‌های پیشنهادی و جدول (۸) مقادیر CVARL به دست آمده طی شبیه‌سازی فرآیند خارج از کنترل را نشان می‌دهد. در صورت ایجاد تغییر در پارامترهای شیب و پراکندگی، نتایج به همین صورت حاصل می‌شود.

همان‌طور که از نتایج به دست آمده مشخص است، زمانی که پارامتر β_{01} به $\beta_{01} + \delta\sigma_1$ تغییر یابد، روش $MHWMA$ توسعه یافته در تشخیص تغییرات کوچک و روش $MHWMA/\chi^2$ در تشخیص تغییرات بزرگ پارامتر β_{01} بهترین عملکرد را دارند. هرچه تعداد زیرگروه بیشتری جهت تخمین پارامترها استفاده شود، عملکرد CVARL کلیه روش‌ها بهبود می‌یابد. با افزایش m ، عملکرد روش‌های $MHWMA$ و $MHWMA/\chi^2$ تقریباً مشابه خواهد بود.

۷. مطالعه موردی

همان‌طور که در بخش‌های قبلی اشاره شد، پارکر و همکاران [۱۷] با طرح مثالی از کالیبراسیون تعادل نیرو در ناسا، یک پروفایل چندگانه چند متغیره را معرفی کردند که در آن ۶ نیرو و گشتاور به عنوان متغیرهای مستقل، و ۶ مقدار الکتریکی اندازه‌گیری نیروها و گشتاورها به عنوان متغیرهای پاسخ در نظر گرفته شده‌اند. در این بخش روش‌های پیشنهادی برای پایش این پروفایل در فاز ۲ به کار برده شده و عملکرد

MHWMA در تشخیص تغییرات کاهش می‌یابد. حدود بالای کنترل روش‌های پیشنهادی به‌ازای مقادیر $w = 0.1$ و $w = 0.2$ در جدول (۵) نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است با افزایش مقدار w ، حدود کنترل بازتر می‌شوند. بدیهی است که حد بالای کنترل نمودار χ^2 بدون تغییر باقی مانده است.

۶. بررسی اثر تخمین پارامترها در فاز ۱ بر عملکرد روش‌های پیشنهادی

اساساً در پایش آماری فرآیند در فاز ۲ کنترلی، پارامترهای فرآیند که در این تحقیق همان ضرایب ساختار رگرسیونی پروفایل است، معلوم در نظر گرفته می‌شود و نمودارهای کنترل براساس پارامترهای معلوم طراحی می‌شوند. این فرض، توسعه و ارزیابی نمودار کنترل را ساده‌تر می‌کند، اما در واقعیت این پارامترها اغلب نامعلوم هستند و نمودار کنترل باید با استفاده از پارامترهای تخمین زده شده از فرآیند تحت کنترل در فاز ۱، طراحی شود. اگر در طراحی یک نمودار کنترل، به‌جای پارامترهای معلوم از پارامترهای برآورد شده استفاده شود، تغییرپذیری برآوردکننده‌ها بر عملکرد نمودار تأثیر گذاشته و عملکرد این نمودار با نمودار طراحی‌شده بر مبنای پارامترهای معلوم، متفاوت خواهد بود [۴۴]. بنابراین بررسی اثر تخمین پارامترها بر عملکرد نمودارهای کنترل در پایش فاز ۲ پروفایل‌ها، از جمله مسائل مهمی است که باید مورد توجه واقع شود.

از میان روش‌های پایش پروفایل در فاز ۲، روشی که تأثیرپذیری کمتری از پارامترهای تخمین‌زده‌شده داشته باشد، روش مناسب‌تری قلمداد می‌شود [۴۴]. بنابراین به منظور ارزیابی این تأثیر، باید شاخص مناسبی مورد استفاده قرار گیرد. ژانگ و همکاران [۴۵] استفاده از معیارهای ARL و SDRL را در بررسی اثر تخمین پارامترها بر عملکرد نمودارهای کنترل کافی نمی‌دانند. زیرا در این شرایط توزیع طول دنباله کاملاً هندسی نبوده و میانگین و انحراف معیار آن به خوبی بیانگر عملکرد نمودار نمی‌باشند. همچنین به دلیل تفاوت در برآورد پارامترها توسط افراد مختلف، ARL به یک متغیر تصادفی تبدیل می‌شود که میانگین و انحراف معیار آن عملکرد نمودار را بهتر نشان می‌دهند. در بیشتر مطالعات انجام‌شده در این زمینه از دو شاخص اصلی متوسط میانگین طول دنباله (AARL) و انحراف استاندارد میانگین طول دنباله (SDARL) به منظور بررسی عملکرد نمودارهای کنترل در فاز ۲ براساس پارامترهای تخمین زده شده، استفاده می‌شود. محاسبه این شاخص‌ها با استفاده از الگوریتم مطرح‌شده در بخش ۴ انجام می‌شود که با تکرار ۵۰۰۰ مرتبه شبیه‌سازی، مقدار ARL به دست می‌آید و میانگین و انحراف معیار این مقادیر محاسبه می‌گردد. از طرفی در مطالعات جدید برای در نظرگیری همزمان میانگین و انحراف معیار توزیع شاخص ARL، از شاخص CVARL برای مقایسه عملکرد نمودارهای کنترلی در فاز ۲ استفاده می‌کنند [۴۶]. این شاخص با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$CVARL = \frac{SDARL}{AARL} \times 100 \quad (22)$$

استفاده از شبیه‌سازی و معیار CVRL بایکدیگر مقایسه گردید. مطالعات شبیه‌سازی نشان‌داد روش‌های پیشنهادی در تشخیص تغییرات پله‌ای ضرایب رگرسیونی پروفایل عملکرد مطلوبی دارند. براساس نتایج به‌دست آمده روش $MHWMA/\chi^2$ نسبت به روش‌های دیگر، سرعت بهتری در تشخیص تغییرات دارد. از دیدگاه عملی، این روش‌ها به مهندسان کیفیت امکان می‌دهند تا فرآیندهای تولید و خدمات خود را به‌طور دقیق‌تر پایش کنند و واکنش سریع‌تری به مشکلات احتمالی داشته باشند، که منجر به کاهش ضایعات، افزایش کیفیت و رضایت مشتری می‌گردد. علاوه بر این تأثیر پارامترهای ثابت مانند اندازه نمونه و ثابت هموارسازی نمودار MHWMA مورد بررسی قرار گرفت و عملکرد روش‌های پیشنهادی تحت تأثیر مقادیر مختلف این پارامترها ارزیابی شد. نتایج تحلیل حساسیت نشان‌داد انتخاب مناسب پارامترها نقش مهمی در افزایش توانایی نمودارها دارد و لازم است در کاربردهای صنعتی این پارامترها متناسب با ویژگی‌های فرآیند تنظیم گردد. معلوم بودن پارامترهای پروفایل در فاز ۲، یکی از فروض لحاظ شده بود که عدم برقرار بودن آن مورد بررسی قرار گرفت و عملکرد روش‌های پیشنهادی با فرض استفاده از پارامترهای تخمین‌زده شده و براساس شاخص CVARL بررسی شد. نتایج حاصل شده نشان‌داد روش‌های MHWMA توسعه‌یافته و $MHWMA/\chi^2$ در این شرایط عملکرد بهتری داشتند. درنهایت با استفاده از یک مثال واقعی در فرآیند کالیبراسیون، عملکرد روش‌های پیشنهادی در دنیای واقعی نیز مورد بررسی قرار گرفت و نتایج به‌دست آمده، عملکرد مناسب این روش‌ها را تأیید کرد.

ازجمله زمینه‌ها جهت انجام تحقیقات آتی می‌توان به استفاده از نمودارهای MHWMA و HWMA در پایش سایر پروفایل‌ها اشاره نمود. همچنین استفاده از انواع توسعه‌یافته نمودار MHWMA در پایش پروفایل خطی چندگانه چند متغیره پیشنهاد می‌گردد.

جدول (۱). حدود بالای کنترلی نمودارهای کنترلی برای دستیابی به

$ARL_0 = 200$		
حد بالای کنترلی	نمودار کنترلی	روش
۱۱/۹۰	MHWMA	MHWMA
۸/۸۰	MHWMA توسعه‌یافته	MHWMA توسعه‌یافته
۶/۹۸	MHWMA	$MHWMA/\chi^2$
۲۳/۷۷	χ^2	

جدول (۲). مقایسه عملکرد خارج از کنترل روش‌های پایش زمانی که پارامتر β_{01} به $\beta_{01} + \delta\sigma_1$ تغییر کند

روش	δ									
	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
MHWMA	۸۹/۵	۷۴/۳	۶۰/۷	۵۴/۵	۵۵/۶	۵۶/۵	۵۷/۰	۵۳/۴	۴۳/۵	۲۸/۶
Modified MHWMA	۹۲/۴	۷۲/۸	۶۰/۷	۵۸/۴	۵۵/۸	۶۰/۱	۵۳/۷	۴۸/۰	۳۶/۴	۱۹/۲
$MHWMA/\chi^2$	۸۲/۵	۶۷/۰	۵۶/۲	۵۲/۶	۵۲/۹	۵۶/۴	۵۰/۴	۴۳/۵	۲۸/۳	۹/۸

روش‌ها در این مطالعه موردی بررسی می‌شود. مدل تحت کنترل که بیانگر رابطه میان متغیرهای پاسخ و مستقل در این مطالعه موردی می‌باشد، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= -0.05 + 10x_1 - 0.01x_2 - 0.03x_3 \\
 &\quad + 0.26x_4 + 0x_5 + 0.03x_6 \\
 &\quad + \varepsilon_1 \\
 y_2 &= 0.48 + 0.24x_1 + 21.01x_2 - 0.09x_3 \\
 &\quad + 0.03x_4 - 0.12x_5 + 0.01x_6 \\
 &\quad + \varepsilon_2 \\
 y_3 &= 0.37 + 0.09x_1 + 0.01x_2 + 6.81x_3 \\
 &\quad + 0.04x_4 + 0.02x_5 - 0.03x_6 \quad (۲۳) \\
 &\quad + \varepsilon_3 \\
 y_4 &= 0.04 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 10.53x_4 \\
 &\quad - 0.47x_5 + 0.21x_6 + \varepsilon_4 \\
 y_5 &= 0.09 - 0.021x_1 + 0x_2 + 0.01x_3 + 0.02x_4 \\
 &\quad + 7x_5 - 0.34x_6 + \varepsilon_5 \\
 y_6 &= 0.09 + 0.04x_1 + 0x_2 - 0.01x_3 + 0.18x_4 \\
 &\quad - 0.34x_5 + 11.46x_6 + \varepsilon_6
 \end{aligned}$$

ماتریس کوواریانس متغیرهای پاسخ که با استفاده از مجموعه داده‌های فاز ۱ برآورد شده و همچنین مقادیر متغیر مستقل، در مطالعه آن‌ها به تشریح ارائه شده است.

جهت بررسی عملکرد روش‌های پیشنهادی، ۱۰ زیرگروه تحت کنترل براساس مدل بالا تولید شده و سپس در پنج زیرگروه بعدی، پارامتر β_{12} (شیب پروفایل دوم) از ۰/۲۴ به ۰/۵۰ تغییر کرده است. نمودارهای کنترل مربوط به روش‌های پیشنهادی در شکل‌های (۱) تا (۳) نشان داده شده‌اند. حدود بالای کنترل در روش‌های پیشنهادی با کمک شبیه‌سازی و به‌گونه‌ای تعیین شده‌اند که ARL تحت کنترل کلی تقریباً برابر با ۲۰۰ ایجاد کنند.

شکل‌های (۱) تا (۳) نشان می‌دهند هر نمودار کنترل در شناسایی تغییر ایجادشده در ضریب شیب دومین پروفایل رگرسیون چندگانه چگونه عمل می‌کند. همان‌طور که مشخص است کلیه روش‌ها تغییر ایجاد شده را در اولین زیرگروه پس از ایجاد آن (زیرگروه یازدهم) تشخیص می‌دهند. این نتیجه عملکرد مناسب روش‌های پیشنهادی را تأیید می‌کند.

۸. نتیجه‌گیری

در این مطالعه سه روش برای پایش پروفایل خطی چندگانه چند متغیره در فاز ۲ ارائه شد. در این روش‌ها از نمودار کنترل MHWMA برای پایش پارامترهای رگرسیونی پروفایل و از نمودار χ^2 جهت پایش پراکندگی پروفایل استفاده شده است. عملکرد روش‌های پیشنهادی با

جدول (۳). مقایسه عملکرد خارج از کنترل روش‌های پایش زمانی که پارامتر β_{11} به $\lambda\sigma_1 + \beta_{11}$ تغییر کند

روش	λ									
	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۰۷۵	۰/۱	۰/۱۲۵	۰/۱۵	۰/۱۷۵	۰/۲	۰/۲۲۵	۰/۲۵
MHWMA	۱۰۱/۶	۸۳/۶	۷۲/۰	۶۲/۵	۵۶/۷	۵۳/۳	۵۲/۶	۵۳/۸	۵۸/۵	۵۵/۶
MHWMA توسعه یافته	۱۰۰/۶	۸۳/۷	۷۲/۰	۶۱/۳	۵۷/۴	۵۴/۷	۵۴/۴	۵۴/۷	۵۸/۱	۵۶/۳
MHWMA/ χ^2	۸۷/۸	۷۶/۵	۶۸/۵	۶۰/۸	۵۴/۵	۵۴/۶	۵۲/۴	۵۳/۸	۵۳/۵	۵۴/۸

جدول (۴). مقایسه عملکرد خارج از کنترل روش‌های پایش زمانی که پارامتر σ_1 به $\gamma\sigma_1$ تغییر کند

روش	γ									
	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲/۰	۲/۲	۲/۴	۲/۶	۲/۸	۳/۰
MHWMA	۱۶۲/۰	۲۰۲/۳	۲۲۷/۶	۲۲۳/۲	۲۳۴/۴	۱۷۷/۵	۱۵۲/۸	۱۱۴/۱	۹۲/۰	۸۲/۸
MHWMA توسعه یافته	۱۵۴/۱	۱۸۶/۷	۲۲۲/۲	۲۳۴/۳	۲۲۸/۲	۲۱۴/۳	۱۸۸/۷	۱۷۵/۶	۱۴۱/۶	۱۱۶/۸
MHWMA/ χ^2	۱۱۷/۴	۱۱۳/۸	۱۰۰/۷	۸۹/۴	۸۴/۰	۷۰/۷	۶۵/۹	۵۳/۷	۵۱/۵	۴۶/۹

جدول (۵). حدود بالای کنترلی نمودارهای کنترلی پیشنهادی به ازای مقادیر مختلف پارامتر هموارسازی

w	روش	نمودار کنترل	حد بالای کنترلی
۰/۱	MHWMA	MHWMA	۱۶/۶۰
	Modified MHWMA	Modified MHWMA	۱۳/۰۵
	MEWMA/ χ^2	MEWMA	۱۰/۳۵
		χ^2	۲۳/۷۷
۰/۲	MHWMA	MHWMA	۱۸/۱۵
	Modified MHWMA	Modified MHWMA	۱۴/۴۵
	MEWMA/ χ^2	MEWMA	۱۱/۴۰
		χ^2	۲۳/۷۷

جدول (۶). مقادیر CVARL تحت کنترل روش‌های پیشنهادی زمانی که m زیرگروه برای تخمین پارامترها در فاز ۱ استفاده می‌شود ($w = 0.03$)

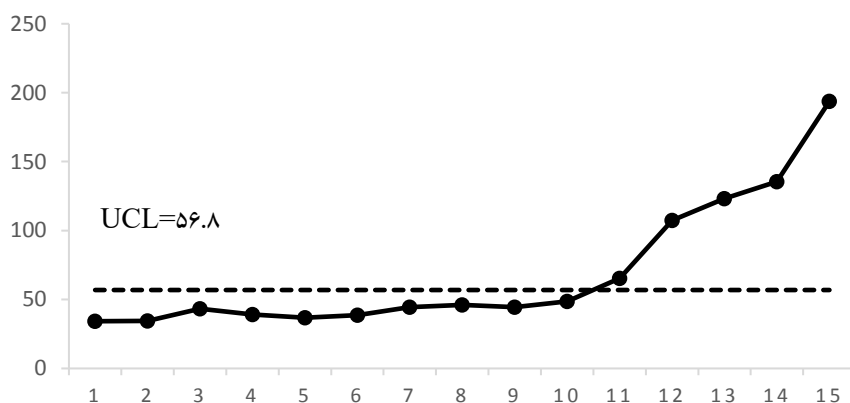
m	MHWMA	MHWMA توسعه یافته	MHWMA/ χ^2
۳۰	۴۷/۰۹	۳۷/۱۴	۲۸/۸۹
۱۰۰	۳۸/۶۱	۳۳/۱۱	۱۸/۸۷
۵۰۰	۱۲/۳۲	۱۱/۹۹	۹/۱۵

جدول (۷). حدود کنترل اصلاح شده برای نمودارهای کنترلی پیشنهادی زمانی که m زیرگروه برای تخمین پارامترها در فاز ۱ استفاده می‌شود

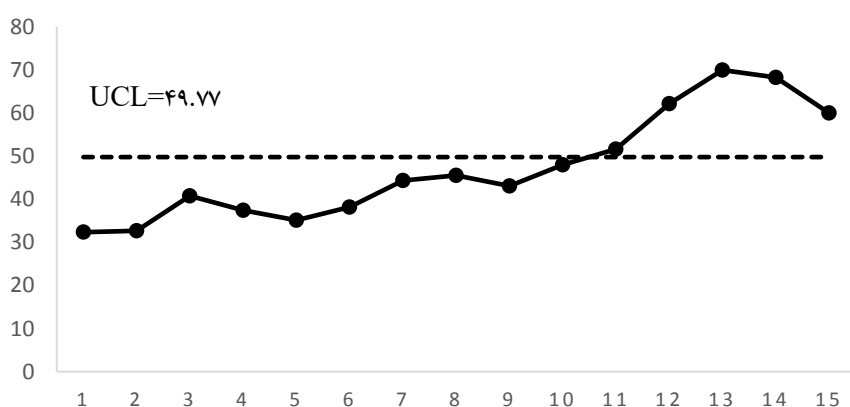
m	MHWMA	MHWMA توسعه یافته	MHWMA/ χ^2	
			MHWMA	χ^2
۳۰	۳۵/۹	۲۲/۲	۱۸/۰	۲۷/۳۴
۱۰۰	۱۹/۳	۱۳/۴	۱۰/۲	۲۵/۲۴
۵۰۰	۱۳/۵	۸/۸	۷/۵	۲۴/۱۱

جدول (۸). مقادیر CVARL خارج از کنترل زمانی که m زیرگروه برای تخمین پارامترها در فاز ۱ استفاده می‌شود و پارامتر $\beta_{01} + \delta\sigma_1$ تغییر کند

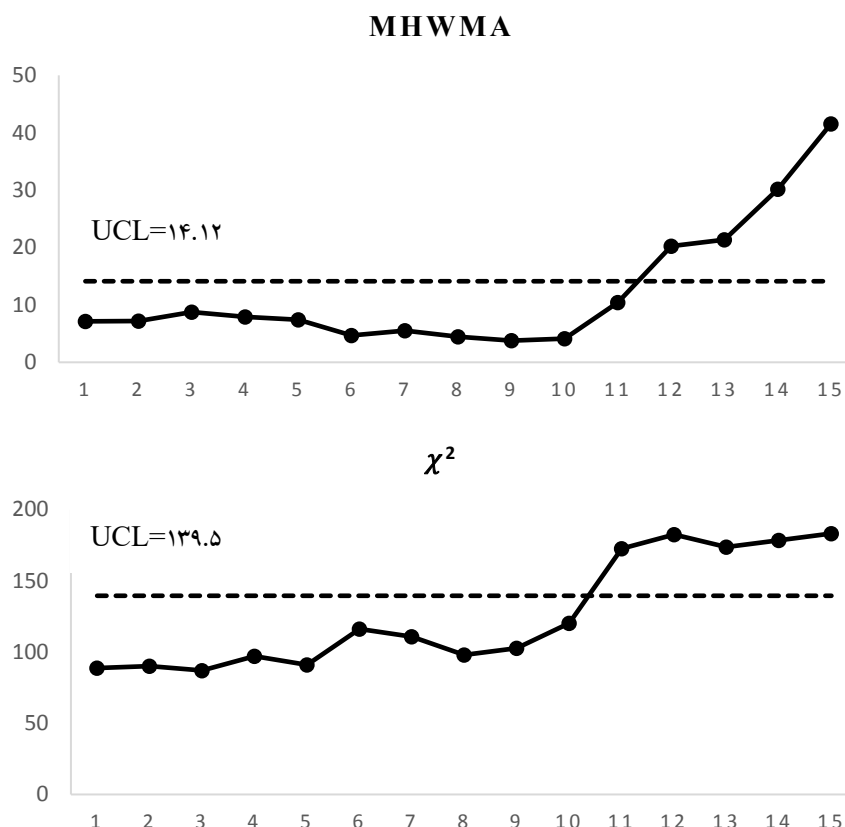
m	روش	δ									
		۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱/۰	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲/۰
۳۰	MHWMA	۳۸/۲	۱۹/۱	۱۳/۶	۱۱/۱	۱۰/۷	۱۰/۵	۶/۲	۳/۳	۰/۰	۰/۰
	MHWMA توسعه یافته	۳۶/۰	۱۶/۶	۷/۵	۷/۴	۸/۳	۶/۸	۲/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
	MHWMA/ χ^2	۴۳/۰	۱۹/۶	۱۶/۵	۱۵/۷	۱۲/۷	۵/۱	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۱۰۰	MHWMA	۲۰/۲	۱۰/۰	۷/۵	۷/۷	۷/۰	۳/۱	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
	MHWMA توسعه یافته	۱۹/۵	۸/۰	۵/۳	۴/۷	۲/۹	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
	MHWMA/ χ^2	۲۰/۲	۹/۲	۷/۹	۶/۹	۲/۶	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
۵۰۰	MHWMA	۸/۷	۴/۲	۳/۵	۳/۰	۱/۴	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
	MHWMA توسعه یافته	۶/۴	۳/۲	۲/۱	۱/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
	MHWMA/ χ^2	۸/۴	۴/۱	۳/۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰



شکل (۱). عملکرد روش MHWMA در مثال کالیبراسیون ناسا با تغییر از $\beta_{12} = 0.24$ به $\beta_{12} = 0.5$ در زیرگروه ۱۱



شکل (۲). عملکرد روش MHWMA توسعه یافته در مثال کالیبراسیون ناسا با تغییر از $\beta_{12} = 0.24$ به $\beta_{12} = 0.5$ در زیرگروه ۱۱



شکل (۳). عملکرد روش $MHWMA/\chi^2$ در مثال کالیبراسیون ناسا با تغییر از $\beta_{12} = 0.24$ به $\beta_{12} = 0.5$ در زیرگروه ۱۱

linear profile data". *Quality and Reliability Engineering International*, 23(2): 247-268. <https://doi.org/10.1002/qre.788>.

- [8] Mahmoud, M.A., (2008). "Phase I analysis of multiple linear regression profiles". *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 37(10): 2106-2130. <https://doi.org/10.1080/03610910802305017>.
- [9] Jensen, W.A., Birch, J.B. & Woodall, W.H., (2008). "Monitoring correlation within linear profiles using mixed models". *Journal of Quality Technology*, 40(2): 167-183. <https://doi.org/10.1080/00224065.2008.11917723>.
- [10] Amiri, A., Eyvazian, M., Zou, C. & Noorossana, R., (2012). "A parameters reduction method for monitoring multiple linear regression profiles". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 58(5): 621-629. <https://doi.org/10.1007/s00170-011-3406-3>.
- [11] Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. & Amiri, A., (2008). "Phase I monitoring of polynomial profiles". *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 37(10): 1671-1686. <https://doi.org/10.1080/03610920701691714>.
- [12] Zou, C., Tsung, F. & Wang, Z., (2007). "Monitoring general linear profiles using multivariate exponentially weighted moving average schemes". *Technometrics*, 49(4): 395-408. <https://doi.org/10.1198/004017007000000164>.

مراجع

- [1] Noorossana, R., Saghaei, A. & Amiri, A., (2011). "Statistical analysis of profile monitoring". *Wiley Online Library*. <https://doi.org/10.1002/9781118071984>.
- [2] Kang, L. & Albin, S.L., (2000). "On-line monitoring when the process yields a linear profile". *Journal of quality Technology*, 32(4): 418-426. <https://doi.org/10.1080/00224065.2000.11980027>.
- [3] Kim, K., Mahmoud, M.A. & Woodall, W.H., (2003). "On the monitoring of linear profiles". *Journal of Quality Technology*, 35(3): 317-328. <https://doi.org/10.1080/00224065.2003.11980225>.
- [4] Noorossana, R., Amiri, A., Vaghefi, S.A. & Roghanian, E., (2004). "Monitoring quality characteristics using linear profile". *Proceedings of the 3rd international industrial engineering conference*. Tehran, Iran.
- [5] Mahmoud, M.A. & Woodall, W.H., (2004). "Phase I analysis of linear profiles with calibration applications". *Technometrics*, 46(4): 380-391. <https://doi.org/10.1198/004017004000000455>.
- [6] Zou, C., Zhang, Y. & Wang, Z., (2006). "A control chart based on a change-point model for monitoring linear profiles". *IIE transactions*, 38(12): 1093-1103. <https://doi.org/10.1080/07408170600728913>.
- [7] Mahmoud, M.A., Parker, P.A., Woodall, W.H. & Hawkins, D.M., (2007). "A change point method for

- Grzegorzczuk, M., (2019). "A new Bayesian multivariate exponentially weighted moving average control chart for phase II monitoring of multivariate multiple linear profiles". *Quality and Reliability Engineering International*, 35(7): 2152-2177. <https://doi.org/10.1002/qre.2496>.
- [25] Wang, Y.H.T. & Zhan, S.H., (2024). "Monitoring autocorrelated multivariate multiple linear profiles". *Quality and Reliability Engineering International*, 40(1): 619-643. <https://doi.org/10.1002/qre.2694>.
- [26] Rahimi, S. B., Amiri, A., Khoo, M.B.C. & Shadman, A., (2022). "Simultaneous monitoring of mean vector and covariance matrix of auto-correlated multivariate multiple linear profiles". *Quality and Reliability Engineering International*, 38(7): 3513-3542. <https://doi.org/10.1002/qre.3149>.
- [27] Khalili, S. & Noorossana, R., (2022). "Online monitoring of autocorrelated multivariate linear profiles via multivariate mixed models". *Quality Technology & Quantitative Management*, 19(3): 319-340. <https://doi.org/10.1080/16843703.2021.2015834>.
- [28] Sabahno, H. & Amiri, A., (2023). "New statistical and machine learning based control charts with variable parameters for monitoring generalized linear model profiles". *Computers & Industrial Engineering*, 184: 109562. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109562>.
- [29] Zhang, T., Wang, G.A., He, Z. & Mukherjee, A., (2024). "Service failure monitoring via multivariate multiple linear regression profile schemes with dimensionality reduction". *Decision Support Systems*, 178: 114122. <https://doi.org/10.1016/j.dss.2023.114122>.
- [30] Sabahno, H. & Eriksson, M., (2024). "Variable parameters memory-type control charts for simultaneous monitoring of the mean and variability of multivariate multiple linear regression profiles". *Scientific Reports*, 14(1): 9288. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-59549-8>.
- [31] Ghasemi, Z., Yazdi, A.A. & Hamadani, A.Z., (2025). "New Methods for Phase II Monitoring of Multivariate Multiple Linear Profiles". *Quality and Reliability Engineering International*, 41(5): 2093-2110. <https://doi.org/10.1002/qre.3756>.
- [۳۲] ناصری، پوریا، عباسی، مرتضی و آتشگر، کریم، (۱۴۰۲). «طراحی مدلی برای پایش پروفایلی کیفیت تأمین کننده با ریسک». نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، ۱۱(۲۲): ۱۳۹-۱۵۷. <https://doi.org/10.22084/IER.2023.5425>.
- [۳۳] ادیب‌فر، سعید و نورالسنا، رسول، (۱۴۰۱). «توسعه شاخص قابلیت فرآیند برای پروفایل خطی ساده در فرآیند دومرحله‌ای». نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، ۱۰(۲۰): ۱۸۳-۱۹۱. <https://doi.org/10.22084/ier.2022.5047>.
- [13] Abdella, G.M., Kim, J., Al-Khalifa, K.N. & Hamouda, A.M., (2016). "Double EWMA-based polynomial quality profiles monitoring". *Quality and Reliability Engineering International*, 32(8): 2639-2652. <https://doi.org/10.1002/qre.2093>.
- [14] Williams, J.D., Woodall, W.H. & Birch, J.B., (2007). "Statistical monitoring of nonlinear product and process quality profiles". *Quality and Reliability Engineering International*, 23(8): 925-941. <https://doi.org/10.1002/qre.858>.
- [15] Walker, E. & Wright, S.P., (2002). "Comparing curves using additive models". *Journal of Quality Technology*, 34(1): 118-129. <https://doi.org/10.1080/00224065.2002.11980134>.
- [16] Williams, J.D., Woodall, W.H. & Birch, J.B., (2003). "Phase I monitoring of nonlinear profiles". *quality and productivity research conference, Yorktown Heights, New York*.
- [17] Parker, P.A., Morton, M., Draper, N. & Line, W., (2001). "A single-vector force calibration method featuring the modern design of experiments". *39th Aerospace sciences meeting and exhibit*. <https://doi.org/10.2514/6.2001-170>.
- [18] Eyvazian, M., Noorossana, R., Saghaei, A. & Amiri, M., (2011). "Phase II monitoring of multivariate multiple linear regression profiles". *Quality and Reliability Engineering International*, 27(3): 281-296. <https://doi.org/10.1002/qre.1119>.
- [19] Zou, C., Ning, X. & Tsung, F., (2012). "LASSO-based multivariate linear profile monitoring". *Annals of operations research*, 192(1): 3-19. <https://doi.org/10.1007/s10479-010-0797-8>.
- [20] Ghashghaei, R. & Amiri, A., (2017). "Sum of squares control charts for monitoring of multivariate multiple linear regression profiles in phase II". *Quality and Reliability Engineering International*, 33(4): 767-784. <https://doi.org/10.1002/qre.2055>.
- [21] Ghashghaei, R., Amiri, A. & Khosravi, P., (2019). "New control charts for simultaneous monitoring of the mean vector and covariance matrix of multivariate multiple linear profiles". *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 48(5): 1382-1405. <https://doi.org/10.1080/03610918.2017.1414246>.
- [22] Kazemzadeh, R.B., Noorossana, R. & Ayoubi, M., (2015). "Change point estimation of multivariate linear profiles under linear drift". *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 44(6): 1570-1599. <https://doi.org/10.1080/03610918.2013.824093>.
- [23] Amiri, A., Saghaei, A., Mohseni, M. & Zerehsaz, Y., (2014). "Diagnosis aids in multivariate multiple linear regression profiles monitoring". *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(14): 3057-3079. <https://doi.org/10.1080/03610926.2012.694543>.
- [24] Ahmadi Yazdi, A., Hamadani, A.Z., Amiri, A. &

- Mathematics, 8(5): 823. <https://doi.org/10.3390/math8050823>.
- [42] Pieters, L., Malela-Majika, J., Human, S. & Castagliola, P., (2023). "A new multivariate extended homogeneously weighted moving average monitoring scheme incorporated with a support vector machine". *Quality and Reliability Engineering International*, 39(6): 2454-2475. <https://doi.org/10.1002/qre.3356>.
- [43] Bhat, S.V. & Malagavi, C., (2021). "R-Posterior Control Charts for Process Variation". *International Journal of Research in Engineering and Science (IJRES)*, 9(6):14-33. <https://doi.org/10.6084/m9.figshare.14506732.v1>.
- [44] Jensen, W.A., Allison Jones-Farmer, L., Champ, C. W. & Woodall, W. H., (2006). "Effects of parameter estimation on control chart properties: a literature review". *Journal of Quality Technology*, 38(4): 349-364. <https://doi.org/10.1080/00224065.2006.11917761>.
- [45] Zhang, M., Peng, Y., Schuh, A., Megahed, F. M. & Woodall, W.H., (2013). "Geometric charts with estimated control limits". *Quality and Reliability Engineering International*, 29(2): 209-223. <https://doi.org/10.1002/qre.1304>.
- [46] Aly, A.A., Mahmoud, M.A. & Hamed, R., (2016). "The performance of the multivariate adaptive exponentially weighted moving average control chart with estimated parameters". *Quality and Reliability Engineering International*, 32(3): 957-967. <https://doi.org/10.1002/qre.1806>.
- [47] Noorossana, R., Eyvazian, M. & Vaghefi, A., (2010). "Phase II monitoring of multivariate simple linear profiles". *Computers & Industrial Engineering*, 58(4): 563-570. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2009.12.003>.
- [34] Abbas, N., (2018). "Homogeneously weighted moving average control chart with an application in substrate manufacturing process". *Computers & Industrial Engineering*, 120: 460-470. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2018.05.009>.
- [35] Adegoke, N.A., Abbasi, S.A., Smith, A.N.H., Anderson, M.J. & PAWLEY, M.D.M., (2019). "A multivariate homogeneously weighted moving average control chart". *IEEE Access*, 7: 9586-9597. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2891988>.
- [36] Hotelling, H., (1947). "Multivariate quality control illustrated by air testing of sample bombsights". *Techniques of statistical analysis*, 111-184. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0179-0_3.
- [37] Pignatiello Jr, J.J. & Runger, G.C., (1990). "Comparisons of multivariate CUSUM charts". *Journal of quality technology*, 22(3): 173-186. <https://doi.org/10.1080/00224065.1990.11979237>.
- [38] Crosier, R.B., (1988). "Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes". *Technometrics*, 30(3): 291-303. <https://doi.org/10.1080/00401706.1988.10488402>.
- [39] Yousefi, S., Maleki, M.R., Salmasnia, A. & Anbohi, M.K., (2023). "Performance of multivariate homogeneously weighted moving average chart for monitoring the process mean in the presence of measurement errors". *Journal of Advanced Manufacturing Systems*, 22(01): 27-40. <https://doi.org/10.1142/S0219686723500026>.
- [40] Adegoke, N.A., Riaz, M., Ganiyu, K.O. & Abbasi, S.A., (2021). "One-sided and two one-sided multivariate homogeneously weighted moving charts for monitoring process mean". *IEEE Access*. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2891988>.
- [41] Abbas, N., Riaz, M., Ahmad, S., Abid, M. & Zaman, B., (2020). "On the efficient monitoring of multivariate processes with unknown parameters".



DOI: <https://doi.org/10.22084/ier.2025.31437.2211>

MHWMA Control Charts for Monitoring Multivariate Multiple Linear Profiles

Zohre Ghasemi¹, Ahmad Ahmadi Yazdi^{2*}

¹ PhD in Industrial Engineering, Department of Industrial and system Engineering, Faculty of Engineering, Isfahan University of Technology (IUT), Isfahan, Iran

² Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

ARTICLE INFO

Article history:

Received: 2025/07/17

Revised: 2025/08/28

Accepted: 2025/09/09

Keywords:

Profile Monitoring
MHWMA Control Chart
Multivariate Multiple Linear
Profile
CVRL Metric

ABSTRACT

In many industrial processes, quality can be characterized using a multivariate multiple linear profile model, which describes the regression relationships between response variables and explanatory variables. This paper proposes three control schemes based on the Multivariate Homogeneously Weighted Moving Average (MHWMA) chart for monitoring multivariate multiple linear profiles. These charts utilize a uniformly weighted moving average structure, enabling the detection of shifts in the profile parameters. The proposed methods—MHWMA, Extended MHWMA, and MHWMA/ χ^2 —are designed to monitor the regression coefficients and covariance matrix of the profiles. The performance of these methods was evaluated using the CVRL metric in a simulation study, and the results showed that the MHWMA/ χ^2 method outperforms other methods in detecting deviations. Additionally, a sensitivity analysis was conducted to assess the impact of design parameters, such as the smoothing constant and sample size, on the change detection. Furthermore, the effect of parameter estimation in Phase I on the performance of the control charts in Phase II was investigated. The simulation results indicated that parameter estimation in Phase I can significantly affect the ability to detect shifts in Phase II. Finally, a practical application of the new control chart is illustrated using a real case study.

* Corresponding author. A. Ahmadi Yazdi
Tel.: 035-31232408; E-mail: a.ahmadiyazdi@yazd.ac.ir