

DOI: <https://dx.doi.org/10.22084/IER.2024.5571>

## ارائه یک مدل ریاضی جهت برنامه‌ریزی نگهداری و تعمیرات بر مبنای اطلاعات نمودارهای کنترل با رویکرد زنجیره مارکوف

هیوا فاروقی<sup>۱</sup>، حسن رسائی<sup>۲\*</sup>، سمیه آغهرمضانی<sup>۳</sup>

۱. استاد گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران
۲. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مدیریت مهندسی، دانشگاه صنعتی کرمانشاه، کرمانشاه، ایران
۳. کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

### خلاصه

کنترل فرآیند آماری (SPC) و برنامه‌های مدیریت نگهداری و تعمیرات (نت) دو تکنیک کلیدی برای کنترل فرآیندهای تولیدی است که هدف هر دو دستیابی به کیفیت بهینه و کاهش هزینه‌های مرتبط می‌باشد؛ لذا بررسی مدل‌های یکپارچه نمودارهای کنترل و مدیریت نگهداری و تعمیرات کارآمدتر است. در این مقاله یک مدل یکپارچه نت و کنترل کیفیت توسعه داده شده است. جهت پایش واریانس فرآیند و تعیین شیفت از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل از نمودارهای کنترل کیفیت آماری استفاده می‌شود به طوری که پایش واریانس فرآیند همانند پایش وضعیت در سیاست‌های نت مبتنی بر شرایط عمل می‌کند. برخلاف تحقیقات مشابه در زمینه مدل‌های یکپارچه نت و کیفیت، در این تحقیق فرض می‌شود که انحراف‌های بادلیل و زوال فرآیند بر میانگین فرآیند تأثیرگذار نیست بلکه واریانس فرآیند را تحت تأثیر قرار خواهد داد و بر این مبنای رویکرد زنجیره مارکوف استفاده شده و مدل توسعه داده شده است. مدل ارائه شده پارامترهای نمودار کنترل پایش واریانس (اندازه نمونه، فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل) را به توجه به بهینه‌سازی هزینه‌های عملیاتی سیستم به صورت بهینه مشخص می‌کند. مثال‌ها و تحلیل‌های عددی ارائه شده بیانگر این است که مدل ارائه شده به طور مؤثری پارامترهای نمودار کنترل را مشخص می‌کند به طوری که در کنار حداقل‌سازی هزینه توام نت و کیفیت، نمودار مذکور از خصوصیات آماری مطلوبی هم برخوردار می‌باشد.

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۴۰۲/۷/۲۷

پذیرش ۱۴۰۲/۱۰/۲۵

(مقاله پژوهشی)

کلمات کلیدی:

زنجیره مارکوف  
نگهداری و تعمیرات  
نمودارهای کنترل  
پایش واریانس  
پایش وضعیت

### ۱. مقدمه

یکی از عواملی که تأثیر چشم‌گیری بر کارایی عملیات فرآیندهای تولیدی دارد، برنامه‌ریزی نگهداری و تعمیرات (نت) می‌باشد. نت عبارت است از کلیه فعالیت‌هایی که به منظور حفظ<sup>۲</sup> سیستم در شرایط مناسب عملیاتی و یا بازگرداندن<sup>۳</sup> سیستم به شرایط مطلوب عملیاتی انجام می‌شود. جهت حمایت از تولید، برنامه‌ی نت باید

دسترس‌پذیری تجهیزات<sup>۴</sup> را تضمین کند؛ طوری که تولید براساس کیفیت و کمیت مطلوب صورت گیرد [۱،۲]. سیاست‌های نت را می‌توان براساس روش برخورد با خرابی‌های سیستم، به شیوه‌های مختلف دسته‌بندی کرد [۳،۴].

از طرف دیگر، کیفیت یکی از شاخص‌های مهم در تصمیم‌گیری افراد است. همچنین تغییر سریع در بازار و افزایش تنوع محصولات،

2. Retain
3. Restore
4. Equipment availability

\* نویسنده مسئول: حسن رسائی

تلفن: ۰۰۱-۳۸۳۰۵۰۱-۰۸۳، پست الکترونیکی: H.Rasay@kut.ac.ir

باعث افزایش اتوماسیون و نیازمند تجهیزات پیچیده‌تر شد [۵،۶]. با این اوصاف می‌توان به اهمیت وضعیت ماشین‌آلات در فرآیندهای تولیدی پی برد؛ زیرا از طرفی عدم انجام درست و به موقع فعالیت‌های نت، باعث کمبود کیفیت محصولات و افزایش هزینه‌های ضایعات، دوباره‌کاری و محصولات معیوب می‌شود. از طرف دیگر، نت زیاد منجر به تحمیل هزینه‌های مازاد بر سیستم می‌شود. بنابراین داشتن یک برنامه‌ی نت مناسب، یکی از راه‌های اصلی کاهش هزینه‌های سیستم و بهبود کیفیت می‌باشد.

یکی از مواردی که بر کیفیت محصول تأثیرگذار بوده و باعث افزایش واریانس فرآیند می‌شود، داشتن فعالیت‌های نت ضعیف روی تجهیزات است. از آنجا که کاهش عملکرد تجهیزات، منجر به کاهش کیفیت محصول می‌شود، یک برنامه‌ی نت مناسب می‌تواند منجر به کاهش واریانس فرآیند و افزایش کیفیت محصول شود. با توجه به ارتباط نزدیک بین نت و کیفیت، ارائه‌ی مدل‌های یکپارچه نت و کیفیت، در تحقق اهداف اقتصادی و آماری بسیار مؤثر هستند [۹-۷]. در مدل‌های یکپارچه‌ی نت و کیفیت، معمولاً هدف از نت دو مورد است: اول این که نت منجر به حذف هزینه‌های کیفیتی می‌شود که در نتیجه عملکرد فرآیند در حالت خارج از کنترل ایجاد می‌شود که معمولاً هدف SPC نیز هست. دوم این که منجر به بهبود قابلیت اطمینان و حداقل‌سازی احتمال خرابی می‌شود که هدف اولیه نت است. در برخی از مدل‌های یکپارچه، بازرسی کیفیت محصول را معادل بازرسی ماشین دانسته‌اند. در واقع با بازرسی محصول می‌توان به طور غیرمستقیم از وضعیت سیستمی که آن محصول را تولید می‌کند، مطلع شد [۱۰-۱۲]. نت یکی از عوامل مهم در کیفیت محصول است؛ زیرا عدم ثبات در عملکرد ماشین‌آلات و تجهیزات باعث افزایش نوسان در محصول شده و می‌تواند منجر به تولید محصول معیوب شود. در نتیجه جهت دستیابی به کیفیت بالای محصول، تجهیزات باید تحت شرایط مشخصی کار کنند که از طریق فعالیت‌های نت مناسب امکان‌پذیر است [۱۳،۱۴].

دو دسته از عملیات نت که در مدل این تحقیق مورد توجه قرار گرفته‌اند، نت پیش‌گویانه<sup>۱</sup> و نت اصلاحی<sup>۲</sup> می‌باشد. به این ترتیب که با توجه به موقعیت آماره روی نمودار و وضعیت تجهیز سیاست نت مناسب اتخاذ می‌شود؛ یعنی زمانی که نمودار هشدار اعلام می‌کند نت پیش‌گویانه و زمانی که تجهیز دچار خرابی می‌شود، نت اصلاحی روی سیستم اعمال می‌شود. طراحی اقتصادی-آماري نمودارهای کنترل با لحاظ کردن معیارهای اقتصادی و آماری نقطه‌ضعف طراحی اقتصادی و طراحی آماری را برطرف می‌کند. در واقع بسیاری از مدل‌های اقتصادی-آماري نمودارهای کنترل به صورت مسائل برنامه‌ریزی مقید هستند که هدف آن‌ها حداقل‌سازی هزینه‌های نمونه‌گیری و آزمایش، هزینه‌های مربوط به بررسی یک هشدار خارج از کنترل و رفع هرگونه انحراف بادلیل مشاهده‌شده، و هزینه‌های مربوط به تولید محصولات غیرمنطبق، تحت یک سری محدودیت آماری است که خصوصیات

آماري مطلوب نمودار را تضمین می‌کند.

ادامه این مقاله به صورت زیر می‌باشد: در قسمت دوم مرور ادبیات ارائه می‌شود و در قسمت سوم به بیان مسأله پرداخته می‌شود. استخراج مدل ریاضی مسأله به صورت مرحله‌ای در قسمت چهارم مورد بحث قرار گرفته است. قسمت پنجم مثال‌های عددی و تحلیل‌ها ارائه شده و سرانجام در قسمت ۶م به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

## ۲. مرور ادبیات

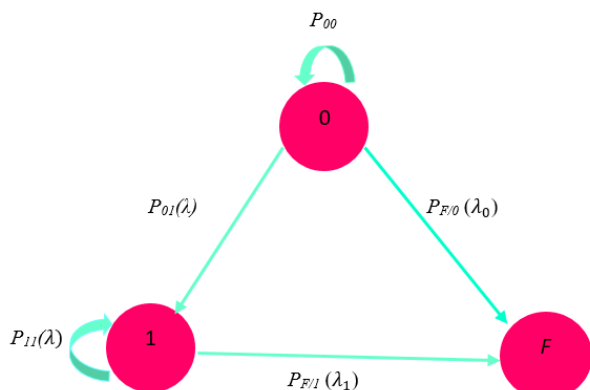
در این قسمت برخی از کارهای تحقیقاتی که به مدل‌سازی یکپارچه نت و کنترل کیفیت آماری پرداخته‌اند و ارتباط نزدیکی با مقاله فعلی دارند مورد بررسی قرار خواهد گرفت. رسائی و همکاران [۵] یک مدل یکپارچه نت و کنترل کیفیت برای بهینه‌سازی هزینه‌های عملیاتی در یک فرآیند تولید دو مرحله توسعه داده‌اند که در آن کیفیت قطعات تولیدی مرحله دوم وابسته به مرحله اول می‌باشد. در هر مرحله از نمودارهای کنترل مختلفی استفاده شده و فرض شده است که انحراف‌های بادلیلی که رخ می‌دهد تنها بر میانگین فرآیند تأثیرگذار است. هادیان و همکاران [۸] سیستم تولیدی را در نظر گرفته‌اند که در آن کیفیت قطعات تولیدی به دلیل وقوع انحراف‌های بادلیل کاهش پیدا می‌کند. برای فرآیند دو وضعیت عملیاتی به همراه یک حالت خرابی کامل در نظر گرفته شده است. جهت بهبود وضعیت فرآیند، عملیات‌های نت اصلاحی و پیش‌گیرانه در مواجهه با حالت‌های خرابی کامل و حالت خارج از کنترل (به ترتیب) روی فرآیند اعمال می‌شود. همچنین جهت بررسی تحت کنترل بودن فرآیند نمودار کنترل X-bar استفاده شده است. در هنگام انجام عملیات نت فرض شده است تقاضای سیستم از موجودی اطمینان تأمین می‌شود. در نهایت نویسندگان یک مدل ریاضی برای مسأله ارائه داده و از رویکرد بهینه‌سازی مبتنی بر شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی مدل و محاسبه مقدار بهینه متغیرهای تصمیم استفاده نموده‌اند.

یک مدل یکپارچه نت و کنترل کیفیت آماری توسط یین و همکاران [۱۵] برای یک فرآیند یک‌مرله‌ای ارائه شده در حالی که از نمودار کنترل X-bar برای پایش میانگین فرآیند استفاده شده است. فرض شده است که فرآیند مذکور دارای دو حالت عملیاتی (تحت کنترل و خارج از کنترل) است و یک حالت خرابی کامل است که در آن فرآیند تولید به طور کامل متوقف می‌شود. بر اساس وضعیت فرآیند عملیات‌های نت مختلفی بر روی فرآیند اعمال می‌شود. مدل ریاضی ارائه شده به دنبال بهینه‌سازی هزینه‌های کیفیت و نت سیستم است. در [۱۶] توسعه مدل نت و کنترل کیفیت با فرض استفاده از نمودار CUSUM صورت گرفته است. مدل توسعه داده شده پارامترهای نمودار کنترل شامل اندازه نمونه، فواصل نمونه‌گیری، حدود کنترل به همراه فواصل انجام تعمیرات پیش‌گیرانه را طوری محاسبه می‌کند که ارزش انتظاری هزینه‌های عملیاتی سیستم در واحد زمان حداقل شود. در این مقاله همچنین عملکرد مدل یکپارچه توسعه داده شده با

تحت تأثیر زوال و یا رخداد انحراف‌های بادلیل قرار می‌گیرد. از این‌رو پرداختن به موضوع تغییر در واریانس فرآیند در مدل‌های ریاضی یکپارچه نت و کیفیت شایان توجه و بررسی است. براین اساس این تحقیق با مبنا قرار دادن و توسعه کارهای [۱۲، ۱۳] فرض می‌کند که در نتیجه زوال فرآیند و وقوع انحراف‌های بادلیل واریانس فرآیند تغییر می‌کند درحالی‌که میانگین بدون تغییر باقی می‌ماند. از این‌رو نوآوری اصلی تحقیق حاضر ارائه یک مدل یکپارچه نت و کیفیت با رویکرد زنجیره مارکوف است درحالی‌که پایش واریانس در آن مورد توجه قرار خواهد گرفت. مدل ارائه شده پارامترهای نمودار کنترل پایش واریانس (اندازه نمونه، فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل) را طوری تعیین می‌کند که هزینه‌های توام نت و کنترل کیفیت حداقل شود. همچنین خصوصیات آماری مطلوب در قالب محدودیت به مدل اضافه شده است.

### ۳. بیان مسأله

یک فرآیند تولیدی که در حالت تحت کنترل آماری شروع به تولید می‌کند، در نظر گرفته می‌شود. فرض می‌شود مشخصه‌های کیفی مورد بررسی، متغیرهای تصادفی پیوسته با توزیع نرمال می‌باشند که دارای بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس واریانس-کوواریانس هدف  $\Sigma_0$  (در حالت یک متغیره واریانس  $\sigma_0^2$ ) هستند. فرآیند مفروض، دارای دو حالت عملیاتی و یک حالت غیرعملیاتی می‌باشد: حالت عملیاتی تحت کنترل با نماد ۰، حالت عملیاتی خارج از کنترل با نماد ۱ و حالت غیرعملیاتی که تجهیز دچار خرابی شده است، با نماد F نشان داده می‌شود. وقوع انحراف‌های بادلیل دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\lambda$  بوده که با وقوع آن‌ها فرآیند به حالت خارج از کنترل منتقل می‌شود. زمان‌های خرابی نیز دارای توزیع نمایی هستند و در حالت تحت کنترل تجهیز با نرخ  $\lambda_0$  و در حالت خارج از کنترل با نرخ  $\lambda_1$  دچار خرابی شده و فرآیند تولید متوقف می‌شود. فرض می‌شود وقوع انحراف‌های بادلیل بر بردار میانگین مشخصه‌های کیفی فرآیند تأثیر ندارد ولی ماتریس واریانس-کوواریانس فرآیند را تحت تأثیر قرار داده و از مقدار هدف  $\Sigma_0$  به  $\Sigma_1 = \delta \Sigma_0$  تغییر پیدا می‌کند. بنابراین فرآیند یک زنجیره مارکوف است که دیاگرام انتقال آن مطابق شکل (۱) است.



شکل (۱). دیاگرام انتقال بین حالات مختلف فرآیند

مدل‌های جداگانه نت و کیفیت مورد مقایسه قرار گرفته است. در برخی از مدل‌های یکپارچه توسعه داده شده از نمودار کنترل EWMA برای پایش میانگین فرآیند استفاده شده است. در [۱۷] نمودار EWMA و در [۱۸] از نمودار MEWMA برای پایش همزمان چندمشخصه کیفی استفاده شده است. لیو و همکاران [۱۹] فرآیند تولیدی را در نظر گرفته‌اند که زوال آن براساس توزیع نمایی فرض شده و فرآیند شامل دو حالت عملیاتی و حالت خرابی کامل است. پایش میانگین فرآیند به کمک نمودار X-bar صورت گرفته، و از یک فرآیند تصادفی هندسی برای مدل‌سازی زوال فرآیند پس از انجام هر بار تعمیرات استفاده شده است. در این تحقیق فرض شده است که سیستم پس از انجام هر بار تعمیرات پیش‌گیرانه به حالت نو مثل اول برمی‌گردد اما تعداد محدودی تعمیر می‌توان انجام گیرد و پس از آن لازم است تعمیرات اساسی روی سیستم اعمال شود. در برخی از تحقیقات در مورد مدل‌های یکپارچه نت و کنترل کیفیت آماری همچنین از نمودارهای وصفی برای پایش فرآیند استفاده شده است [۲۰]. استفاده از رویکرد زنجیره مارکوف در مدل‌های نت و کنترل کیفیت توسط برخی از محققین مورد توجه قرار گرفته است. در [۲۱] با استفاده از زنجیره‌های مارکوف گسسته یک مدل یکپارچه نت و کنترل کیفیت توسعه داده شده است. فرض شده سیستم مورد نظر دارای m حالت مختلف است و زوال فرآیند که به معنی انتقال بین حالت‌های مختلف فرآیند است براساس یک زنجیره مارکوف گسسته صورت می‌گیرد و از نمودار کنترل X-bar برای پایش میانگین فرآیند استفاده شده است. نادرخانی [۲۲] و همکاران از مدل‌سازی بر مبنای زنجیره مارکوف برای توسعه یک مدل یکپارچه ریاضی کیفیت و نت استفاده کرده‌اند درحالی‌که فرآیند تولید دارای بیش از یک مشخصه کیفی است و به همین جهت از نمودارهای کنترل چندمتغیره استفاده شده است.

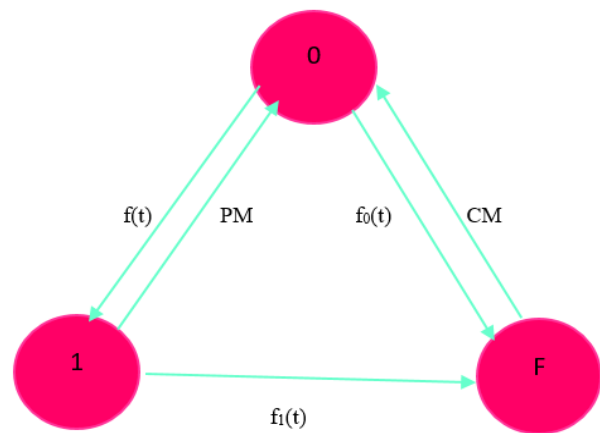
در [۱۲] با استفاده از رویکرد زنجیره مارکوف پیوسته یک مدل ریاضی برای بهینه‌سازی توام هزینه‌های نت و کیفیت ارائه شده است درحالی‌که پایش همزمان میانگین چند مشخصه کیفی مورد نظر است و در این راستا از نمودار مربع کای استفاده شده است. شبیه کارهای مشابه، در این تحقیق نیز فرآیند به صورت سه حالت فرض شده است و توزیع نمایی زمان‌های تصادفی انتقال بین حالت‌های مختلف فرآیند را مدل‌سازی می‌کند. در [۱۳] با استفاده از رویکرد زنجیره مارکوف مدل ریاضی برای بهینه‌سازی هزینه‌های نت و کیفیت در یک فرآیند تولید سه‌حالتی توسعه داده شده است. فرآیند مذکور دارای حالت تحت کنترل، حالت خارج از کنترل و حالت خرابی کامل می‌باشد و فرض می‌شود انتقال بین این حالت‌ها براساس توزیع نمایی صورت می‌گیرد. نمودار کنترل X-bar برای پایش میانگین فرآیند پیشنهاد شده است و مدل پارامترهای اصلی این نمودار را (فواصل نمونه‌گیری، اندازه نمونه و حدود کنترل) به صورت بهینه مشخص می‌کند. همان‌طور که مرور ادبیات صورت گرفته نشان می‌دهد توسعه مدل‌های یکپارچه نت و کیفیت بیش از ۳ دهه است که مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. اما در بیشتر این مدل‌ها فرض شده است که تنها میانگین فرآیند

- ۵) در نتیجه وقوع انحراف بادلیل فرآیند از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل شیفت می‌یابد اما انحراف بادلیل تنها بر واریانس فرآیند تأثیرگذار است.
- ۶) حالت خرابی کامل مستقیماً قابل مشاهده است و در صورت انتقال سیستم به این حالت عملیات نت اصلاحی (CM) صورت می‌گیرد.
- ۷) برای تشخیص شیفت فرآیند از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل از نمودار کنترل جهت پایش واریانس فرآیند استفاده می‌شود.
- ۸) در صورتی که فرآیند به حالت خارج از کنترل شیفت پیدا کند و این حالت توسط نمودار تشخیص داده شود در این صورت عملیات نت پیش‌گیرانه روی سیستم صورت گرفته و سیستم به حالت تحت کنترل برگردانده می‌شود.

پارامترها

میانگین فرآیند در حالت تک‌متغیره	$\mu$
واریانس فرآیند در حالت تحت کنترل	$\sigma_0^2$
واریانس فرآیند در حالت خارج از کنترل	$\sigma_1^2$
میزان تغییر واریانس فرآیند در حالت تک‌متغیره	$\delta^2$
بردار میانگین $m$ مشخصه‌ی کیفی فرآیند	$\mu$
نرخ وقوع انحراف بادلیل	$\lambda$
نرخ خرابی در حالت تحت کنترل	$\lambda_0$
نرخ خرابی در حالت خارج از کنترل	$\lambda_1$
شماره نمونه‌ها	$t$
هزینه‌ی ثابت نمونه‌گیری	$b$
هزینه‌ی متغیر نمونه‌گیری	$c$
هزینه‌ی عملیات در واحد زمان در حالت خارج از کنترل	$M$
هزینه‌ی بازرسی فرآیند	$W_I$
هزینه‌ی بازگردانی فرآیند به حالت تحت کنترل در صورت تشخیص یک تغییر کیفیت	$W_R$
هزینه‌ی تعمیر در حالت خرابی	$W_{CM}$
متوسط زمان بازرسی	$Z_I$
متوسط زمان بازگردانی فرآیند در صورت تشخیص یک تغییر کیفی	$Z_R$
متوسط زمان تعمیر تجهیز در حالت خرابی	$Z_{CM}$
متوسط هزینه‌ی یک گام انتقال	$EC$
متوسط زمان یک گام انتقال	$ET$
متوسط هزینه‌ی یک گام انتقال در واحد زمان	$ECT$
احتمالات انتقال برای حالات مختلف فرآیند $(i, j = 0, 1)$	$P_{kl}^{ij}$
احتمالات حالات پایدار	$\pi_{ik}$
تابع چگالی احتمال زمان تغییر کیفی	$f(t)$
تابع چگالی زمان خرابی در حالت ۰	$f_0(t)$
تابع چگالی احتمال زمان خرابی در حالت ۱	$f_1(t)$
تابع توزیع تجمعی زمان تغییر کیفی	$F(t)$
تابع توزیع تجمعی زمان خرابی در حالت ۰	$F_0(t)$
تابع توزیع تجمعی زمان خرابی در حالت ۱	$F_1(t)$
مکمل	$R_t$

برای پایش ماتریس واریانس-کوواریانس فرآیند مفروض، در فواصل زمانی  $n$ ، یک نمونه‌ی تصادفی به حجم  $n$  گرفته می‌شود، آماره‌ی نمونه محاسبه شده و روی نمودار رسم می‌شود. اگر آماره در ناحیه‌ی کنترل قرار گیرد، فرآیند عملیاتش را بدون نیاز به عملیات نت ادامه می‌دهد. اگر آماره در ناحیه‌ی خارج از کنترل قرار گیرد، نمودار هشدار اعلام می‌کند؛ پس یک بازرسی به منظور بررسی صحت هشدار نمودار روی سیستم اعمال می‌شود؛ اگر هشدار اشتباه باشد، یعنی فرآیند تحت کنترل است و فرآیند عملیاتش را بدون نیاز به عملیات نت ادامه می‌دهد اما اگر هشدار درست باشد، عملیات نت پیش‌گیرانه (PdM) روی فرآیند اعمال می‌شود. در حالت خرابی تجهیز نیز عملیات نت اصلاحی (CM) روی فرآیند اعمال می‌شود. در شکل (۲) عملیات مختلف نت در حالات مختلف فرآیند نشان داده شده است.



شکل (۲). انواع اقدامات نت فرآیند

با فرض این که فرآیند از حالت تحت کنترل شروع به تولید می‌کند، با استفاده از اطلاعات به دست آمده از نمودار کنترل، عملیات نت مناسب روی سیستم اعمال می‌شود. تحقیق حاضر با تعیین مقادیر بهینه‌ی سه متغیر تصمیم اندازه‌ی نمونه ( $n$ )، فاصله‌ی نمونه‌گیری ( $h$ ) و ضریب حد کنترل ( $k$ ) به حداقل سازی هزینه‌های کیفیت و نت سیستم در واحد زمان می‌پردازد.

در ادامه به معرفی مفروضات اصلی مسأله و نمادهای به کار گرفته شده در مدل سازی می‌پردازیم.

۳-۱. مفروضات مدل

- ۱) فرآیند دارای دو حالت عملیاتی (حالت تحت کنترل و حالت خارج از کنترل) و یک حالت غیرعملیاتی (خرابی کامل) می‌باشد.
- ۲) انتقال بین حالت‌های مختلف سیستم براساس توزیع‌های نمایی با نرخ‌های خرابی متفاوت می‌باشد (مطابق شکل (۱)).
- ۳) سیستم می‌تواند از حالت تحت کنترل به حالت خارج از کنترل و یا حالت خرابی کامل شیفت پیدا کند.
- ۴) پس از انتقال سیستم به حالت خارج از کنترل، در نهایت در صورت انجام نگرفتن نت، سیستم از این حالت به حالت خرابی کامل شیفت پیدا خواهد کرد.

رابطه‌ی (۵) احتمال وقوع خرابی تجهیز در بازه‌ی  $h$  را نشان می‌دهد؛ باتوجه به این که بازه از حالت خارج از کنترل شروع شده است.  $P_{F/1}(h) = 1 - e^{-\lambda_1 h}$  (۵)  
جزئیات استخراج روابط (۲) و (۴) در پیوست مورد اشاره قرار گرفته است.

$R_0(t)$	مکمل $F_0(t)$
$R_1(t)$	مکمل $F_1(t)$
$P$	ماتریس زنجیره مارکوف
$\pi$	بردار احتمالات حدی

**متغیرهای تصمیم**

$h$	بازه‌ی نمونه‌گیری طرح نمونه‌گیری
$n$	اندازه‌ی نمونه‌ی طرح نمونه‌گیری
$k$	ضریب حد کنترل طرح نمونه‌گیری

**اندیسه‌ها**

$F$	اندیسی که خرابی تجهیزات را مشخص می‌کند.
$s$	اندیسی که هشدار نمودار را مشخص می‌کند.
$c$	اندیسی که ادامه عملیات فرآیند را مشخص می‌کند.



شکل (۳). مراحل استخراج مدل

**۴. استخراج مدل ریاضی**

در این قسمت به استخراج مدل ریاضی مسأله می‌پردازیم. هدف از ارائه این مدل مشخص کردن مقادیر بهینه پارامترهای نمودار کنترل برای پایش واریانس فرآیند است به طوری که ارزش انتظاری هزینه فرآیند در واحد زمان حداقل شود. پارامترهای نمودار کنترل شامل اندازه نمونه، فواصل نمونه‌گیری و حدود کنترل نمودار است. استخراج مدل به صورت مرحله به مرحله در ادامه ذکر می‌شود. همچنین شکل (۳) مراحل استخراج مدل ریاضی را ارائه می‌دهد.

**۴-۱. محاسبه احتمال‌های انتقال**

فرآیند دارای سه وضعیت مختلف تحت کنترل، خارج از کنترل و خرابی است که با احتمال ثابت و مشخصی از یک وضعیت به وضعیت دیگر انتقال پیدا خواهد کرد. در ادامه به محاسبه‌ی احتمال انتقال بین حالات مختلف فرآیند پرداخته می‌شود. زمانی که فرآیند در حالت تحت کنترل است، لازمی تحت کنترل باقی ماندن فرآیند، عدم وقوع انحراف بادلیل و خرابی در بازه‌ی  $h$  است که مقدار احتمال آن به صورت رابطه‌ی (۱) است:

$$P_{00}(h) = e^{-(\lambda + \lambda_0)h} \quad (1)$$

در شرایط تحت کنترل بودن فرآیند، احتمال وقوع یک انحراف بادلیل در بازه‌ی  $h$  به شرط آن که تجهیز تا پایان بازه دچار خرابی نشود، برابر با رابطه‌ی (۲) خواهد بود:

$$P_{01}(h) = \frac{\lambda(e^{-\lambda_1 h} - e^{-(\lambda + \lambda_0)h})}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} \quad (2)$$

درحالی که فرآیند در حالت خارج از کنترل است، احتمال اینکه فرآیند در بازه‌ی  $h$  در حالت خارج از کنترل باقی بماند و تجهیز دچار خرابی نشود، به صورت رابطه‌ی (۳) می‌باشد:

$$P_{11}(h) = e^{-\lambda_1 h} \quad (3)$$

احتمال انتقال به حالت غیرعملیاتی فرآیند و خرابی تجهیز در بازه‌ی  $h$ ، باتوجه به اینکه فرآیند در حالت تحت کنترل است، به صورت زیر است:

$$P_{F/0}(h) = 1 - \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)e^{-(\lambda + \lambda_0)h} - \lambda e^{-\lambda_1 h}}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} \quad (4)$$

**۴-۲. محاسبه‌ی خطای نوع اول و دوم نمودار کنترل**

در این حالت، برای پایش واریانس فرآیند از نمودار کنترل  $S^2$  یک طرفه با حد بالای  $UCL$  مطابق رابطه‌ی (۶) استفاده می‌شود که  $k$  ضریب حد کنترل نمودار می‌باشد.

$$UCL_{S^2} = k \sigma_0^2 \quad (6)$$

طبق مفروضات مسأله، با وقوع انحراف بادلیل، واریانس فرآیند از  $\sigma_0^2$  به  $\sigma_1^2 = \delta^2 \sigma_0^2$  تغییر می‌کند. در این حالت خطای نوع اول ( $\alpha$ ) و خطای نوع دوم ( $\beta$ ) به صورت روابط (۷) و (۸) خواهد بود. لازم به

$$P_{cs}^{00} = P_{ss}^{00} = P_{ss}^{10} = P_{F_s^0} = \alpha \cdot P_{00}(h) \quad (11)$$

$$P_{cc}^{01} = P_{sc}^{01} = P_{sc}^{11} = P_{F_c^1} = \beta \cdot P_{01}(h) \quad (12)$$

$$P_{cs}^{01} = P_{ss}^{01} = P_{ss}^{11} = P_{F_s^1} = (1 - \beta) \cdot P_{01}(h) \quad (13)$$

$$P_{cc}^{11} = \beta \cdot P_{11}(h) \quad (14)$$

$$P_{cs}^{11} = (1 - \beta) \cdot P_{11}(h) \quad (15)$$

$$P_{0F} = P_{0F} = P_{1F} = P_{FF} \\ = 1 - \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)e^{-(\lambda+\lambda_0)h} - \lambda e^{-\lambda_1 h}}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} \\ = P_{F/0}(h) \quad (16)$$

$$P_{1F} = 1 - e^{-\lambda_1 h} = P_{F/1}(h) \quad (17)$$

$$P_{cc}^{10} = P_{cs}^{10} = 0 \quad (18)$$

۴-۴. محاسبه‌ی احتمالات حدی (احتمالات حالت پایدار)

اگر احتمالات حالت پایدار با  $\pi = (\pi_{0c}, \pi_{0s}, \pi_{1c}, \pi_{1s}, \pi_F)$  نشان داده شود، خواهیم داشت:

$$\pi = \pi P; \quad (19)$$

$$\pi_i = \sum_j \pi_j P_{ij}; \quad \forall i \quad (20)$$

$$\sum \pi_i = 1; \quad (21)$$

رابطه‌ی (۱۹) دستگاه معادلات خطی را به صورت ماتریسی و فشرده بیان می‌کند که در آن  $P$  ماتریس مارکوف ارائه شده در رابطه‌ی (۹) می‌باشد. رابطه‌ی (۲۰) نیز بیانگر دستگاه معادلات خطی بدون نمادگذاری ماتریسی است. در رابطه‌ی (۲۱) برابر بودن مجموع احتمالات حدی با یک نشان داده شده است.

۴-۵. ارزش انتظاری طول یک سیکل تولید

در یک بازه‌ی زمانی  $h$ ، حالات مختلف فرآیند شامل پنج حالت می‌باشد که در ادامه‌ی این بخش به تشریح و محاسبه‌ی زمان هر حالت پرداخته می‌شود. در جدول (۱) نیز به صورت خلاصه، زمان حالات مختلف فرآیند ارائه شده است.

- حالت  $(0,c)$ : در این حالت، فرآیند در شروع بازه‌ی  $h$  تحت کنترل بوده و آماره‌ی نمودار نیز در ناحیه‌ی کنترل قرار می‌گیرد. در این حالت زمان عملیاتی فرآیند به صورت  $\tau_{0/0}(h) + \tau_{1/0}(h)$  می‌باشد.
- حالت  $(0,s)$ : زمانی که فرآیند تحت کنترل است و نمودار هشدار اشتباه اعلام می‌کند. در این حالت، یک بازرسی جهت بررسی صحت هشدار در زمان  $Z_1$  انجام می‌شود؛ سپس فرآیند عملیات خود را از سر می‌گیرد. در نتیجه زمان بازرسی به متوسط زمان عملیاتی فرآیند اضافه می‌شود و زمان در حالت اعلام هشدار نادرست به صورت  $Z_1 + \tau_{0/0}(h) + \tau_{1/0}(h)$  می‌باشد.
- حالت  $(1,s)$ : فرآیند در حالت خارج از کنترل است و هشدار نمودار نیز صحیح می‌باشد. در این حالت، لازم است در زمان  $Z_1$  به منظور شناسایی انحراف بادلایل، فرآیند مورد بازرسی قرار گیرد و در زمان  $Z_R$  به حالت تحت کنترل بازگردانده شود؛ سپس عملیات خود را از سر می‌گیرد. در نتیجه زمان در حالت هشدار درست به صورت  $Z_1 + Z_R + \tau_{0/0}(h) + \tau_{1/0}(h)$  می‌باشد.

ذکر است در روابط (۷) و (۸)،  $F_{\chi^2}(\cdot)$  تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی مربع کای با  $n-1$  درجه‌ی آزادی  $(\chi_{n-1}^2)$  می‌باشد.

$$\alpha_{s^2} = 1 - F_{\chi^2}((n-1)k) \quad (7)$$

$$\beta_{s^2} = F_{\chi^2}\left(\frac{(n-1)k}{\delta^2}\right) \quad (8)$$

جزئیات به دست آوردن روابط (۷) و (۸) در پیوست ارائه شده است.

۴-۳. محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس مارکوف

برای توصیف عملکرد نمودار، از یک ماتریس مارکوف با مرتبه‌ی ۵ استفاده می‌شود. برای تعریف حالات ماتریس، از دو عامل وضعیت سیستم و تصمیمات اتخاذ شده در هر مرحله‌ی نمونه‌گیری استفاده می‌شود؛ طوری که در هر مرحله‌ی نمونه‌گیری، وضعیت واقعی فرآیند (تحت کنترل، خارج از کنترل یا  $F$ ) و تصمیمی را که باید براساس موقعیت آماره روی نمودار گرفته شود ( $c$ ، آماره در ناحیه‌ی تحت کنترل قرار می‌گیرد و نمودار هشدار اعلام نمی‌کند؛  $s$ ، آماره در ناحیه‌ی تحت کنترل قرار نمی‌گیرد و یک هشدار اعلام می‌کند)، نشان می‌دهد. ماتریس مارکوف فرآیند به صورت رابطه‌ی (۹) می‌باشد.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} (0,c) & (0,s) & (1,c) & (1,s) & F \end{matrix} \\ \begin{matrix} (0,c) \\ (0,s) \\ (1,c) \\ (1,s) \\ F \end{matrix} & \begin{bmatrix} P_{cc}^{00} & P_{cs}^{00} & P_{cc}^{01} & P_{cs}^{01} & P_{cF}^0 \\ P_{sc}^{00} & P_{ss}^{00} & P_{sc}^{01} & P_{ss}^{01} & P_{sF}^0 \\ P_{cc}^{10} & P_{cs}^{10} & P_{cc}^{11} & P_{cs}^{11} & P_{cF}^1 \\ P_{sc}^{10} & P_{ss}^{10} & P_{sc}^{11} & P_{ss}^{11} & P_{sF}^1 \\ P_{F_c^0} & P_{F_s^0} & P_{F_c^1} & P_{F_s^1} & P_{FF} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (9)$$

حالات ماتریس به شرح زیر است:

- حالت  $(0,c)$ : فرآیند تحت کنترل باشد و آماره در ناحیه‌ی کنترل قرار گیرد؛
- حالت  $(0,s)$ : فرآیند تحت کنترل باشد و آماره در خارج از ناحیه‌ی کنترل قرار گیرد؛
- حالت  $(1,c)$ : فرآیند در حالت خارج از کنترل باشد و آماره در ناحیه‌ی کنترل قرار گیرد؛
- حالت  $(1,s)$ : فرآیند در حالت خارج از کنترل باشد و آماره در خارج از ناحیه‌ی کنترل قرار گیرد؛
- حالت  $F$ : تجهیز دچار خرابی می‌شود.

هر درایه‌ی ماتریس  $P$ ، احتمال فرارگرفتن فرآیند در وضعیت مشخص ( $0$  یا  $1$  یا  $F$ ) و موقعیت آماره در ناحیه‌ی مشخصی از نمودار را نشان می‌دهد. به عنوان مثال،  $P_{cc}^{00}$  یعنی در نمونه‌گیری دوره‌ی فعلی، فرآیند در وضعیت صفر است، نمودار هشدار نمی‌دهد (آماره در ناحیه‌ی کنترل است) و در نمونه‌گیری دوره‌ی بعدی آماره در ناحیه کنترل قرار می‌گیرد و فرآیند نیز در حالت صفر باقی می‌ماند؛ یا،  $P_{ss}^{01}$  یعنی در نمونه‌گیری دوره‌ی فعلی، فرآیند در وضعیت صفر است، نمودار هشدار نمی‌دهد و در نمونه‌گیری دوره‌ی بعد، فرآیند در وضعیت یک قرار دارد و نمودار هشدار می‌دهد. مفهوم سایر درایه‌های ماتریس مشابه موارد ذکر شده می‌باشد. در ادامه به محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس پرداخته می‌شود.

$$P_{cc}^{00} = P_{sc}^{00} = P_{ss}^{10} = P_{F_c^0} \\ = (1 - \alpha) \cdot P_{00}(h) \quad (10)$$

است. بنابراین مجموع هزینه‌ی انتقال از این حالت برابر است با

$$(b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$$

- حالت (0,s): فرآیند تحت کنترل است و نمودار هشدار خارج از کنترل اعلام می‌کند. هزینه‌ی بازرسی  $W_I$  به‌منظور بررسی صحت هشدار نمودار به سیستم تحمیل می‌شود که پس از آن فرآیند عملیات خود را از حالت تحت کنترل ازسر گرفته و هزینه‌ی آن مشابه حالت (0,c) و برابر با

$$(b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$$

خواهد بود. پس مجموع هزینه‌ی این حالت به‌صورت

$$W_I + (b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$$

است.

- حالت (1,c): در این حالت، فرآیند در حالت خارج از کنترل است؛ ولی نمودار آن را تشخیص نداده و عملیات در حالت خارج از کنترل ادامه پیدا می‌کند. هزینه‌ی عملیات در واحد زمان در حالت خارج از کنترل برابر با  $M$  و مدت زمان عملیات خارج از کنترل برابر با  $\tau_{1/1}(h)$  است. اگر تا پایان بازه خرابی رخ ندهد، هزینه‌ی نمونه‌گیری به‌صورت  $(b + cn) \left(1 - P_{F/1}(h)\right)$  می‌باشد. در نتیجه، کل هزینه‌ی این حالت برابر با

$$\left((b + cn) \left(1 - P_{F/1}(h)\right)\right) + M\tau_{1/1}(h)$$

می‌باشد.

- حالت (1,s): فرآیند در حالت خارج از کنترل است و نمودار هشدار صحیح اعلام می‌کند. هزینه‌ی  $W_I$  به‌منظور بازرسی فرآیند و شناسایی انحراف بادلیل و هزینه‌ی  $W_R$  به‌منظور بازگرداندن فرآیند به حالت کنترل در نظر گرفته می‌شود. پس از آن فرآیند به عملیاتی در حالت کنترل ادامه می‌دهد که هزینه‌ی نمونه‌گیری آن معادل  $(b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$  است. بنابراین کل هزینه‌ی فرآیند در این حالت برابر با  $W_I + W_R + (b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$  می‌باشد.

- حالت (F): تجهیز دچار خرابی شده و تولید متوقف شده است. با هزینه‌ی  $W_{CM}$  تجهیز تعمیر شده و به عملیات تولید خود در حالت تحت کنترل ادامه می‌دهد؛ بنابراین هزینه‌ی عملیاتی برابر با  $(b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$  است. پس کل هزینه‌ی حالت خرابی برابر با  $W_{CM} + (b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$  است.

- حالت (F): اگر تجهیز دچار خرابی شود، در زمان  $Z_{CM}$  تعمیر می‌شود و پس از آن به حالت تحت کنترل بازگردانده می‌شود و عملیات خود را ازسر می‌گیرد. بنابراین متوسط زمان در حالت وقوع خرابی به‌صورت  $Z_{CM} + \tau_{0/0}(h) + \tau_{1/0}(h)$  می‌باشد.

- حالت (1,c): در این حالت فرآیند در بازه‌ی  $h$  خارج از کنترل می‌باشد و زمان آن برابر با  $\tau_{1/1}(h) = \frac{1 - e^{-\lambda_1 h}}{\lambda_1}$  می‌باشد. براساس تفاسیر فوق، ارزش انتظاری طول یک سیکل تولید به‌صورت زیر است که در نهایت به‌صورت رابطه‌ی (۲۲) ساده می‌شود:

$$ET = (\pi_{0c} + \pi_{0s} + \pi_{1s} + \pi_F) \left(\tau_{0/0}(h) + \tau_{1/0}(h)\right) + \pi_{1c} \left(\tau_{1/1}(h)\right) + \pi_{0s} Z_I + \pi_{1s} (Z_I + Z_R) + \pi_F Z_{CM} \quad (22)$$

- در رابطه‌ی فوق،  $\tau_{0/0}(h)$  و  $\tau_{1/0}(h)$  به‌ترتیب بیانگر زمان عملیاتی تحت کنترل و زمان عملیاتی خارج از کنترل با شروع بازه از حالت تحت کنترل و  $\tau_{1/1}(h)$  بیانگر زمان عملیاتی خارج از کنترل با شروع از حالت خارج از کنترل می‌باشد، به‌ترتیب از روابط (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) محاسبه می‌شود.

$$\tau_{0/0}(h) = \frac{1 - e^{-(\lambda + \lambda_0)h}}{\lambda + \lambda_0} \quad (23)$$

$$\tau_{1/0}(h) = \frac{\lambda}{\lambda_1} \left( \frac{1 - e^{-(\lambda + \lambda_0)h}}{\lambda + \lambda_0} + \frac{e^{-(\lambda + \lambda_0)h} - e^{-\lambda_1 h}}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} \right) \quad (24)$$

$$\tau_{1/1}(h) = \frac{1 - e^{-\lambda_1 h}}{\lambda_1} \quad (25)$$

- جزئیات استخراج روابط (۲۳)، (۲۴) و (۲۵) در مرجع [۱۳] مورد اشاره قرار گرفته است.

#### ۴-۶. ارزش انتظاری هزینه‌ی یک سیکل تولید

- مشابه محاسبه‌ی ارزش انتظاری طول یک سیکل تولید، در این بخش به محاسبه‌ی ارزش انتظاری هزینه‌ها در یک سیکل تولید پرداخته می‌شود؛ بنابراین به‌صورت مجزا متوسط هزینه‌ی هر کدام از حالات فرآیند بررسی می‌شود. در جدول (۱) نیز به‌صورت خلاصه، هزینه‌ی حالات مختلف فرآیند ارائه شده است.

- حالت (0,c): در این حالت، فرآیند تحت کنترل است و با احتمال  $1 - P_{F/0}(h)$  فرآیند تا نمونه‌گیری بعدی دوام آورده و دچار خرابی نمی‌شود که فقط هزینه‌ی نمونه‌گیری معادل  $b + cn$  وجود دارد. همچنین هزینه‌ی عملکرد خارج از کنترل در واحد زمان  $M$  است که برای مدت زمان  $\tau_{1/0}(h)$  برابر با  $M\tau_{1/0}(h)$

جدول (۱). ارزش انتظاری هزینه‌ها و طول یک سیکل تولید

حالت	احتمال حالت پایدار	متوسط زمان	متوسط هزینه
(0,c)	$\pi_{0c}$	$\tau_{0/0}(h) + \tau_{1/0}(h)$	$(b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$
(0,s)	$\pi_{0s}$	$Z_I + \tau_{0/0}(h) + \tau_{1/0}(h)$	$W_I + (b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$
(1,c)	$\pi_{1c}$	$\tau_{1/1}(h)$	$(b + cn) \left(1 - P_{F/1}(h)\right) + M\tau_{1/1}(h)$
(1,s)	$\pi_{1s}$	$Z_I + Z_R + \tau_{0/0}(h) + \tau_{1/0}(h)$	$W_I + W_R + (b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$
F	$\pi_F$	$Z_I + Z_R + \tau_{0/0}(h) + \tau_{1/0}(h)$	$W_{CM} + (b + cn) \left(1 - P_{F/0}(h)\right) + M\tau_{1/0}(h)$

جدول (۲). مقدار پارامترهای ثابت

پارامتر	c	b	WR	ZI	ZR	ZCM	ARL1_goal	ARL0_goal	λ۰	λ۱
مقدار	۱	۰	۱۰۰	۰	۱	۱	۱۰	۲۰۰	۰/۰۱	۰/۰۵

مسئله شامل اندازه نمونه (n)، فواصل نمونه‌گیری (h) و ضریب حدود کنترل (k) می‌باشد. در این الگوریتم متغیرهای پیوسته (در اینجا h, k) را در فواصل مناسب به گسسته تبدیل شده و با مشخص کردن حدود منطقی و عملی برای متغیرهای گسسته (در اینجا n) جستجو در نقاط فضای جواب به منظور یافتن نقطه بهینه صورت می‌گیرد

جدول (۳). مقادیر پارامترهای متغیر مثال‌های عددی برای فرآیند تک‌متغیره

حالت	پارامتر	M	WI	WCM	λ	δ
۱	۱۰۰	۵۰	۵۰۰	۰/۰۱	۱/۴	
۲	۵۰۰	۵۰	۵۰۰	۰/۰۱	۱/۴	
۳	۱۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۰/۰۱	۱/۴	
۴	۵۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۰/۰۱	۱/۴	
۵	۱۰۰	۵۰	۱۰۰۰	۰/۰۱	۱/۴	
۶	۵۰۰	۵۰	۱۰۰۰	۰/۰۱	۱/۴	
۷	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۱	۱/۴	
۸	۵۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۱	۱/۴	
۹	۱۰۰	۵۰	۵۰۰	۰/۰۲	۱/۴	
۱۰	۵۰۰	۵۰	۵۰۰	۰/۰۲	۱/۴	
۱۱	۱۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۰/۰۲	۱/۴	
۱۲	۵۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۰/۰۲	۱/۴	
۱۳	۱۰۰	۵۰	۱۰۰۰	۰/۰۲	۱/۴	
۱۴	۵۰۰	۵۰	۱۰۰۰	۰/۰۲	۱/۴	
۱۵	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۲	۱/۴	
۱۶	۵۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۲	۱/۴	
۱۷	۱۰۰	۵۰	۵۰۰	۰/۰۱	۱/۶	
۱۸	۵۰۰	۵۰	۵۰۰	۰/۰۱	۱/۶	
۱۹	۱۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۰/۰۱	۱/۶	
۲۰	۵۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۰/۰۱	۱/۶	
۲۱	۱۰۰	۵۰	۱۰۰۰	۰/۰۱	۱/۶	
۲۲	۵۰۰	۵۰	۱۰۰۰	۰/۰۱	۱/۶	
۲۳	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۱	۱/۶	
۲۴	۵۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۱	۱/۶	
۲۵	۱۰۰	۵۰	۵۰۰	۰/۰۲	۱/۶	
۲۶	۵۰۰	۵۰	۵۰۰	۰/۰۲	۱/۶	
۲۷	۱۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۰/۰۲	۱/۶	
۲۸	۵۰۰	۱۰۰	۵۰۰	۰/۰۲	۱/۶	
۲۹	۱۰۰	۵۰	۱۰۰۰	۰/۰۲	۱/۶	
۳۰	۵۰۰	۵۰	۱۰۰۰	۰/۰۲	۱/۶	
۳۱	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۲	۱/۶	
۳۲	۵۰۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۰/۰۲	۱/۶	

بر اساس توضیحات فوق ارزش انتظاری هزینه‌ها در یک سیکل تولید رابطه‌ی (۲۶) ساده می‌شود.

$$EC = [(\pi_{0c} + \pi_{0s} + \pi_{1s} + \pi_F)(1 - P_{F/0}(h)) + \pi_{1c}(1 - P_{F/1}(h))] (b + cn) + [(\pi_{0c} + \pi_{0s} + \pi_{1s} + \pi_F)\tau_{1/0}(h) + \pi_{1c}\tau_{1/1}(h)]M + \pi_{0s}W_I + \pi_{1s}(W_I + W_R) + \pi_F W_{CM} \quad (26)$$

۴-۷. محاسبه‌ی ECT

تابع هدف تحقیق حاضر به صورت حداقل‌سازی هزینه‌های سیستم در واحد زمان می‌باشد و از تقسیم ارزش انتظاری هزینه‌های سیستم در طول یک سیکل تولید به ارزش انتظاری طول یک سیکل تولید به دست می‌آید.

$$ECT = \frac{EC}{ET} \quad (27)$$

۴-۸. مدل بهینه‌سازی مسئله

باتوجه به توضیحات ارائه شده در قسمت‌های قبلی این بخش، تابع هدف مدل متوسط هزینه‌های سیستم در واحد زمان می‌باشد که می‌خواهیم آن را حداقل کنیم. محدودیت اول مدل تضمین می‌کند که ARL1 نمودار بزرگ‌تر از مقدار معینی نباشد. محدودیت دوم تضمین می‌کند که ARL0 نمودار کوچک‌تر از مقدار هدف نباشد. محدودیت سوم هم، مثبت بودن مقدار متغیرهای تصمیم و صحیح بودن حجم نمونه را تضمین می‌کند. متغیرهای تصمیم مدل n, h و k می‌باشند. مدل بهینه‌سازی مسئله در رابطه‌ی (۲۸) ارائه شده است:

$$\begin{aligned} &Min ECT(h, n, k) \\ &S.t: \\ &\frac{1}{1 - \beta} \leq ARL_{1,goal} \\ &\frac{1}{\alpha} \geq ARL_{0,goal} \\ &n \in Z^+, h, k > 0 \end{aligned} \quad (28)$$

۵. مثال‌های عددی

در این قسمت، به بررسی مثال‌های عددی برای تحلیل پارامترهای اقتصادی و آماری طرح پیشنهادی برای فرآیند تک‌متغیره می‌پردازیم. برای این منظور، ۳۲ حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد که به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای اقتصادی شامل M, WI و WCM؛ و پارامترهای آماری فرآیند شامل λ و δ که در جدول (۳) ارائه شده‌اند، مقدار بهینه‌ی متغیرهای تصمیم و تابع هدف مدل محاسبه شده و نتایج در جدول (۴) ارائه شده است. مقدار پارامترهای ثابت مدل در جدول (۲) ارائه شده است. برای حل مدل بهینه‌سازی (معادله (۲۸))، از الگوریتم جستجوی شبکه‌ای (Grid search) استفاده شده و کدنویسی آن در نرم‌افزار برنامه‌نویسی متلب انجام گرفته است. متغیرهای تصمیم مدل

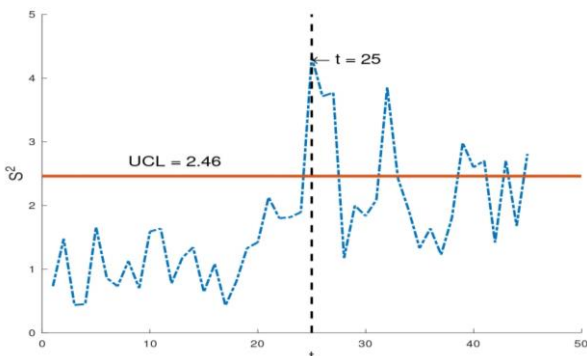


کنترل به سیستم تحمیل می‌شود، در نتیجه مقدار تابع هدف بزرگ‌تر می‌شود.

- پارامتر هزینه‌ای  $M$  بیشتر از سایر پارامترهای هزینه روی تابع هدف تأثیر می‌گذارد.
- پارامتر هزینه‌ای  $W_1$  کمتر از سایر پارامترها منجر به افزایش تابع هدف می‌شود.

در ادامه یک نمونه از نمودار کنترل  $S^2$  ارائه می‌شود. فرض کنید مشخصه‌ی کیفی محصول تولیدی یک فرآیند تولیدی از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک پیروی می‌کند. برای پایش واریانس فرآیند مذکور ابتدا ۲۰ نمونه به حجم ۱۵ در حالت تحت کنترل با  $\mu=0$  و  $\sigma^2 = 1$  به صورت تصادفی تولید می‌شود. سپس ۲۵ نمونه به حجم ۱۵ در حالت خارج از کنترل با میزان شیف  $1/6$  ( $\delta=1/6$ ) تولید می‌شود. در این حالت آماره‌ای که بر روی نمودار کنترل رسم می‌شود، واریانس نمونه ( $S^2$ ) می‌باشد که مقادیر آن در جدول (۵) ارائه شده است.

برای طراحی نمودار  $S^2$  ابتدا  $UCL$  نمودار را با استفاده از رابطه‌ی (۶) محاسبه می‌کنیم که به ازای  $k=2/46$  و  $\sigma^2 = 1$  برابر با  $2/46$  می‌باشد. سپس مقادیر  $S^2$  ارائه شده در جدول (۵) را روی نمودار رسم می‌کنیم. همان طوری که در نمودار ارائه شده در شکل (۴) نشان داده شده است، نمودار تغییر را در نمونه‌ی ۲۵ کشف می‌کند.



شکل (۴). نمودار کنترل  $S^2$  برای مثال شبیه‌سازی شده‌ی فرآیند تک‌متغیره

#### ۵-۱. تحلیل حساسیت $ARL_1$ نمودار $S^2$

برای ارزیابی عملکرد نمودار  $S^2$  از متوسط طول دنباله‌ی خارج از کنترل ( $ARL_1$ ) استفاده می‌کنیم. برای این امر پس از به دست آوردن  $UCL$  و در نظر گرفتن فرض‌های آماری، ابتدا خطای نوع دوم نمودار مطابق رابطه‌ی (۸) محاسبه شده و سپس با استفاده از رابطه‌ی  $ARL_1 = \frac{1}{1-\beta}$  محاسبه می‌شود. مقادیر  $ARL_1$  به این معنی است که اگر فرآیند دچار تغییر شود، نمودار کنترل پس از چند نمونه انحراف فرآیند را تشخیص می‌دهد. به ازای مقادیر مختلف پارامترها، مقادیر  $ARL_1$  در جداول (۶) و (۷) ارائه شده است. شکل (۵) تغییرات  $ARL_1$  را نسبت به مقدار  $k$  (ضریب حدود کنترل) نشان می‌دهد. همان طور که مشخص است با افزایش  $k$  مقدار  $ARL_1$  به سرعت کاهش می‌یابد که به معنی کاهش قدرت نمودار در تشخیص حالت خارج از کنترل فرآیند می‌باشد.

جدول (۴). جواب بهینه‌ی پارامترهای مدل برای فرآیند تک‌متغیره

حالت	متغیر تصمیم				
	ECT	$ARL_1$	N	K	H
۱	۱۳/۹۶۵۶	۱/۵۴۱۳	۱۰	۱/۵	۵
۲	۲۳/۹۲۹۶	۱/۵۴۱۳	۱۰	۱/۵	۲
۳	۱۵/۴۴۲۰	۱/۴۳۲۵	۱۴	۱/۵	۵
۴	۲۶/۵۸۵۸	۱/۳۹۲۹	۱۶	۱/۵	۲/۵
۵	۱۹/۶۲۱۶	۱/۵۴۱۳	۱۰	۱/۵	۴/۵
۶	۲۹/۲۰۰۲	۱/۵۴۱۳	۱۰	۱/۵	۲
۷	۲۱/۰۷۲۴	۱/۴۱۱۸	۱۵	۱/۵	۵
۸	۳۱/۸۷۶۲	۱/۳۷۵۶	۱۷	۱/۵	۲/۵
۹	۱۸/۵۵۰۸	۱/۵۴۱۳	۱۰	۱/۵	۳/۵
۱۰	۳۲/۵۷۹۶	۱/۵۰۹۰	۱۱	۱/۵	۱/۵
۱۱	۲۰/۵۶۱۱	۱/۳۹۲۹	۱۶	۱/۵	۴/۵
۱۲	۳۶/۵۳۷۷	۱/۳۵۹۶	۱۸	۱/۵	۲
۱۳	۲۴/۴۵۸۲	۱/۵۴۱۳	۱۰	۱/۵	۳
۱۴	۳۷/۹۷۴۷	۱/۵۰۹۰	۱۱	۱/۵	۱
۱۵	۲۶/۶۴۱۲	۱/۳۹۲۹	۱۶	۱/۵	۴
۱۶	۴۲/۰۰۱۵	۱/۳۵۹۶	۱۸	۱/۵	۲
۱۷	۱۲/۹۴۸۴	۱/۲۳۴۸	۱۰	۱/۵	۵
۱۸	۲۱/۳۰۱۰	۱/۲۰۹۳	۱۱	۱/۵	۲/۵
۱۹	۱۳/۷۵۵۹	۱/۵۷۷۶	۱۰	۲	۴/۵
۲۰	۲۲/۹۲۹۵	۱/۵۴۵۲	۱۱	۲	۲
۲۱	۱۸/۴۶۳۲	۱/۲۰۹۳	۱۱	۱/۵	۵
۲۲	۲۶/۵۲۱۹	۱/۱۸۷۶	۱۲	۱/۵	۲/۵
۲۳	۱۹/۳۴۷۵	۱/۵۷۷۶	۱۰	۲	۴
۲۴	۲۸/۱۷۳۰	۱/۵۷۷۶	۱۰	۲	۱/۵
۲۵	۱۷/۰۲۸۳	۱/۲۰۹۳	۱۱	۱/۵	۴
۲۶	۲۸/۸۳۳۸	۱/۲۳۴۸	۱۰	۱/۵	۱/۵
۲۷	۱۸/۴۸۵۲	۱/۵۷۷۶	۱۰	۲	۳
۲۸	۳۱/۶۱۱۳	۱/۵۷۷۶	۱۰	۲	۱
۲۹	۲۲/۷۷۲۲	۱/۲۰۹۳	۱۱	۱/۵	۳/۵
۳۰	۳۴/۰۹۳۹	۱/۲۳۴۸	۱۰	۱/۵	۱/۵
۳۱	۲۴/۳۲۸۵	۱/۵۷۷۶	۱۰	۲	۲/۵
۳۲	۳۶/۸۶۰۲	۱/۵۷۷۶	۱۰	۲	۱

به‌عنوان مثال در مورد حالت اول جدول، در فواصل زمانی ۵ ساعته نمونه‌ای به اندازه ۱۰ به صورت تصادفی گرفته شده و پس از محاسبه واریانس، آن را بر نمودار کنترل با ضریب کنترل  $1/5$  رسم می‌کنیم و به این ترتیب ارزش انتظاری هزینه‌های فرآیند در واحد زمان حداقل شده که برابر است با  $13/9656$ . با مقایسه‌ی مقادیر تابع هدف حالات مختلف، می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

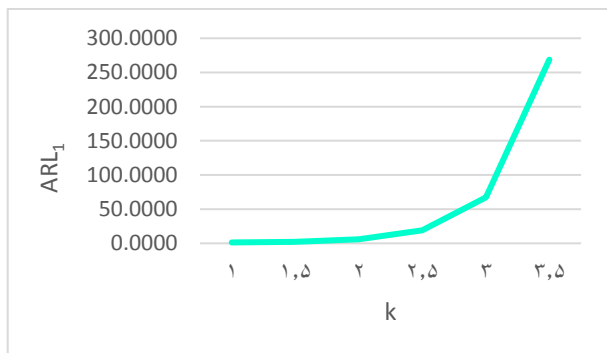
- با مقایسه کردن حالات ۱۷ تا ۳۲ با حالات ۱ تا ۱۶ که مقدار شیف فرآیند افزایش یافته است، می‌توان کاهش ECT را دید، بنابراین نمودار مذکور برای اندازه‌های بزرگ‌تر تغییر، عملکرد بهتری دارد.
- با افزایش  $\lambda$  مقدار ECT افزایش می‌یابد، زیرا با افزایش نرخ انتقال به حالت خارج از کنترل، هزینه‌های عملیات در حالت خارج از

جدول (۶). مقادیر  $ARL_1$  به‌ازای  $n=10$  مقادیر مختلف  $\delta$  و  $k$  برای

$\delta$	نمودار $S^2$		
	$n=10$		
$K$	$1/2$	$1/4$	$1/6$
1	1/3993	1/1516	1/0635
1/5	2/4789	1/5413	1/2348
2	5/3600	2/3781	1/5776
2/5	13/3089	4/0940	2/1883
3	36/4903	7/6606	3/2462
3/5	107/7158	15/2894	5/0846

جدول (۷). مقادیر  $ARL_1$  به‌ازای  $n=13$  مقادیر مختلف  $\delta$  و  $k$  برای

$\delta$	نمودار $S^2$		
	$n=13$		
$K$	$1/2$	$1/4$	$1/6$
1	1/3183	1/0992	1/0335
1/5	2/4606	1/4552	1/1689
2	6/1511	2/3462	1/4912
2/5	18/9126	4/4421	2/1344
3	67/4633	9/5253	3/3700
3/5	268/7075	22/4992	5/7694



شکل (۵). روند  $ARL_1$  و  $k$  برای نمودار به‌ازای  $n=13$  و  $\delta = 1/2$

۶. نتیجه‌گیری

نگهداری و تعمیرات و کنترل کیفیت دو عنصر اصلی در برنامه‌ریزی سیستم‌ها و فرآیندهای تولید است که دارای ارتباط متقابل زیادی هستند. در این راستا مدل‌های یکپارچه متعددی برای ایجاد هماهنگی بین تصمیمات نت و کیفیت ارائه شده است. در این مقاله فرآیند تولیدی با حالت‌های مختلف عملیاتی و حالت خرابی کامل مورد بررسی قرار گرفت. در اثر وقوع انحراف‌های بادلیل فرآیند از یک حالت عملیاتی به حالت بدتری شیف پیدا می‌کند و با گذشت زمان همچنین ممکن است فرآیند از هرکدام از حالت‌های عملیاتی وارد حالت خرابی کامل شود. انحراف‌های بادلیل فرض شد که فقط بر واریانس فرآیند تأثیر گذاشته و میانگین را تغییر نمی‌دهند و از این رو برای پیش واریانس

جدول (۵). مقادیر آماره‌ی  $S^2$  به‌ازای مقادیر مختلف  $\sigma^2$

$S^2$	شماره نمونه	مقادیر پارامترها
0/7318	1	
1/477	2	
0/4367	3	
0/4498	4	
1/6602	5	
0/8597	6	
0/7311	7	
1/1271	8	
0/7004	9	
1/5898	10	$\mu=0$
1/6368	11	$\sigma^2 = 1$
0/7775	12	
1/1767	13	
1/3424	14	
0/6399	15	
1/0803	16	
0/4286	17	
0/8013	18	
1/3279	19	
1/4213	20	
2/1274	1	
1/7987	2	
1/8138	3	
1/8933	4	
4/3296	5	
2/7132	6	
2/7692	7	
1/1746	8	
1/9982	9	
1/8345	10	
2/0896	11	
2/8534	12	$\mu=0$
2/4228	13	$\sigma^2 = 2.56$
1/9223	14	
1/3286	15	
1/6395	16	
1/2264	17	
1/8051	18	
2/9822	19	
2/5982	20	
2/7022	21	
1/4172	22	
2/7041	23	
1/6786	24	
2/8086	25	

- Eng Syst Saf*, vol. 228, p. 108774, doi: 10.1016/j.res.2022.108774.
- [11] AIDurgam, M. M. & Duffuaa, S. O., (2013). "Optimal joint maintenance and operation policies to maximise Overall Systems Effectiveness". *Int J Prod Res*, vol. 51, no. 5, pp. 1319–1330, doi: 10.1080/00207543.2012.659351.
- [12] Taji, J.; Farughi, H. & Rasay, H., (2023). "An integrated Markov chain model for the economic-statistical design of adaptive multivariate control charts and maintenance planning". *European J. of Industrial Engineering*, vol. 17, no. 1, p. 1, doi: 10.1504/EJIE.2023.127739.
- [13] Panagiotidou, S. & Nenes, G., (2009). "An economically designed, integrated quality and maintenance model using an adaptive Shewhart chart". *Reliab Eng Syst Saf*, vol. 94, no. 3, pp. 732–741, doi: 10.1016/j.res.2008.07.003.
- [14] Yousefi, N.; Tsianikas, S. & Coit, D. W., (2022). "Dynamic maintenance model for a repairable multi-component system using deep reinforcement learning". *Qual Eng*, vol. 34, no. 1, pp. 16–35, doi: 10.1080/08982112.2021.1977950.
- [15] Yin, H.; Zhang, G.; Zhu, H.; Deng, Y. & He, F., (2015). "An integrated model of statistical process control and maintenance based on the delayed monitoring". *Reliab Eng Syst Saf*, vol. 133, pp. 323–333, doi: 10.1016/j.res.2014.09.020.
- [16] Shrivastava, D.; Kulkarni, M. S. & Vrat, P., (2016). "Integrated design of preventive maintenance and quality control policy parameters with CUSUM chart". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 82, no. 9–12, pp. 2101–2112, doi: 10.1007/s00170-015-7502-7.
- [17] Charongrattanasakul, P. & Pongpullonsak, A., (2011). "Minimizing the cost of integrated systems approach to process control and maintenance model by EWMA control chart using genetic algorithm". *Expert Syst Appl*, vol. 38, no. 5, pp. 5178–5186, doi: 10.1016/j.eswa.2010.10.044.
- [18] Abouei Ardakan, M.; Zeinal Hamadani, A.; Sima, M. & Reihaneh, M., (2016). "A hybrid model for economic design of MEWMA control chart under maintenance policies". *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 83, no. 9–12, pp. 2101–2110, doi: 10.1007/s00170-015-7716-8.
- [19] Liu, L.; Jiang, L. & Zhang, D., (2017). "An integrated model of statistical process control and condition-based maintenance for deteriorating systems". *Journal of the Operational Research Society*, pp. 1–9, doi: 10.1057/s41274-016-0175-2.
- [20] Rasay, H.; Hadian, S. M.; Naderkhani, F. & Azizi, F., (2023). "Optimal condition based maintenance using attribute Bayesian control chart". *Proc Inst Mech Eng O J Risk Reliab*, doi: 10.1177/1748006X231174960.
- [21] Xiang, Y., (2013). "Joint optimization of X-bar control chart and preventive maintenance policies: A discrete-time Markov chain approach". *Eur J Oper Res*, vol. 229, no. 2, pp. 382–390, doi: 10.1016/j.ejor.2013.02.041.
- [22] Naderkhani, ZG, F. & Makis, V., (2015). "Optimal condition-based maintenance policy for a partially observable system with two sampling intervals". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 78, no. 5–8, pp. 795–805, doi: 10.1007/s00170-014-6651-4.
- فرآیند یک نمودار کنترل  $S^2$  به کار گرفته می‌شود. در صورتی که فرآیند به حالت خرابی کامل وارد شود عملیاتی نت اصلاحی و در صورتی که نمودار کنترل به درستی خارج از کنترل بودن فرآیند را اعلام کند عملیات نت پیش‌گیرانه صورت می‌گیرد. با ارائه یک مدل ریاضی پارامترهای نمودار کنترل طوری طراحی می‌شود که ارزش انتظاری هزینه‌های نگهداری و تعمیرات و هزینه‌های کیفیت سیستم در واحد زمان حداقل شود و در نهایت با ارائه چند مثال عددی کاربرد مدل توضیح داده شد.

## مراجع

- [1] Rasay, H.; Naderkhani, F. & F. Azizi, (2022). "Opportunistic maintenance integrated model for a two-stage manufacturing process". *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, vol. 119, no. 11–12, pp. 8173–8191, doi: 10.1007/s00170-021-08571-5.
- [2] Azizi F. & Salari, N., (2023). "A novel condition-based maintenance framework for parallel manufacturing systems based on bivariate birth/birth–death processes". *Reliab Eng Syst Saf*, vol. 229, p. 108798, doi: 10.1016/j.res.2022.108798.
- [3] Ahmad, R. & Kamaruddin, S., (2012). "An overview of time-based and condition-based maintenance in industrial application". *Comput Ind Eng*, vol. 63, no. 1, pp. 135–149, 2012, doi: 10.1016/j.cie.2012.02.002.
- [4] Ding, S. & Kamaruddin, S., (2015). "Maintenance policy optimization — literature review and directions". *international journal of advanced manufacturing technology*, vol. 76, pp. 1263–1283, doi: 10.1007/s00170-014-6341-2.
- [5] Rasay, H.; Fallahnezhad, M. S. & Zaremehjerdi, Y., (2019). "An integrated model of statistical process control and maintenance planning for a two-stage dependent process under general deterioration". *European Journal of Industrial Engineering*, vol. 13, no. 2, doi: 10.1504/EJIE.2019.098508.
- [6] Panagiotidou, S. & Tagaras, G., (2012). "Optimal integrated process control and maintenance under general deterioration". *Reliab Eng Syst Saf*, vol. 104, pp. 58–70, doi: 10.1016/j.res.2012.03.019.
- [7] Tasiyas, K. A. & Nenes, G., (2018). "Optimization of a fully adaptive quality and maintenance model in the presence of multiple location and scale quality shifts". *Appl Math Model*, vol. 54, pp. 64–81, doi: 10.1016/j.apm.2017.09.014.
- [8] Mohammad Hadian, S.; Farughi, H. & Rasay, H., (2023). "Development of a simulation-based optimization approach to integrate the decisions of maintenance planning and safety stock determination in deteriorating manufacturing systems". *Comput Ind Eng*, vol. 178, doi: 10.1016/j.cie.2023.109132.
- [9] Farahani, A. & Tohidi, H., (2021). "Integrated optimization of quality and maintenance: A literature review". *Comput Ind Eng*, vol. 151, doi: 10.1016/j.cie.2020.106924.
- [10] Rasay, H.; Taghipour, S. & Sharifi, M., (2022). "An integrated Maintenance and Statistical Process Control Model for a Deteriorating Production Process". *Reliab*

## پیوست

جزئیات بدست آوردن رابطه (۲):

$$P_{01}(h) = \int_0^h f(t)R_0(t) \frac{R_1(h)}{R_1(t)} dt = \int_0^h \lambda e^{-\lambda t} e^{-\lambda_0 t} \frac{e^{-\lambda_1 h}}{e^{-\lambda_1 t}} dt = \frac{\lambda(e^{-\lambda_1 h} - e^{-(\lambda+\lambda_0)h})}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1}$$

اثبات رابطه (۴):

$$\begin{aligned} P_{F/0}(h) &= \int_0^h f_0(t)R(t)dt + \int_0^h f(t)R_0(t) \int_t^h \frac{f_1(t')}{R_1(t')} dt' dt = \int_0^h \lambda_0 e^{-\lambda_0 t} e^{-\lambda t} dt + \int_0^h \lambda e^{-\lambda t} e^{-\lambda_0 t} \int_t^h \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t'}}{e^{-\lambda_1 t'}} \\ &= \int_0^h \lambda_0 e^{-(\lambda+\lambda_0)t} dt + \int_0^h \lambda e^{-(\lambda+\lambda_0-\lambda_1)t} \int_t^h \lambda_1 e^{-\lambda_1 t'} dt' dt = 1 - \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)e^{-(\lambda+\lambda_0)h} - \lambda e^{-\lambda_1 h}}{\lambda + \lambda_0 - \lambda_1} \end{aligned}$$

جزئیات استخراج روابط (۷) و (۸):

$$\begin{aligned} \alpha_{s^2} &= P\{S^2 > UCL \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\} = P\{S^2 > k \sigma_0^2 \mid \sigma^2 = \sigma_0^2\} \\ &= P\left\{\frac{n-1}{\sigma_0^2} \times S^2 > \frac{n-1}{\sigma_0^2} \times k \sigma_0^2\right\} = P\{\chi^2 > (n-1)k\} \\ &= 1 - F_{\chi^2}((n-1)k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{s^2} &= P\{S^2 < UCL \mid \sigma^2 = \sigma_1^2\} = P\{S^2 < k \sigma_0^2 \mid \sigma^2 = \delta^2 \sigma_0^2\} \\ &= P\left\{S^2 \times \frac{n-1}{\delta^2 \sigma_0^2} < \frac{n-1}{\delta^2 \sigma_0^2} \times k \sigma_0^2\right\} = P\left\{\chi^2 < \frac{(n-1)k}{\delta^2}\right\} \\ &= F_{\chi^2}\left(\frac{(n-1)k}{\delta^2}\right) \end{aligned}$$



DOI: <https://dx.doi.org/10.22084/IER.2024.5571>

## A Mathematical Model for Maintenance Planning based on the Information of Control Charts Using Markov Chains Approach

Hiwa Faroughi<sup>1</sup>, Hasan Rasay<sup>2\*</sup>, Somaye Agheh Ramezani<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Professor, Department of Engineering Management, Kermanshah University of Technology, Kermanshah, Iran

<sup>2</sup> Assistant Professor, Department of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

<sup>3</sup> M.A. Industrial Engineering, Department of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

### ARTICLE INFO

#### *Article history:*

Received 19 October 2023

Accepted 15 January 2024

#### *Keywords:*

Markov Chain  
Maintenance  
Control Charts  
Condition Monitoring  
Variance Monitoring

### ABSTRACT

Statistical process control (SPC) and maintenance are two key elements for controlling production systems while the aim of both is improving quality and reducing operational costs. Hence, studying integrated models of maintenance and SPC has recently attracted attentions of researchers. The principal goal of these models is to coordinate the decisions of maintenance and quality control so that the integrated models provide better performance in comparison with stand-alone maintenance/quality control models. In this paper, a production system with two operational states plus a failure state is considered. It is assumed assignable causes only affect variance of the process and mean does not affect. Based on Markov chains properties, a mathematical model is derived to minimize the joint costs of maintenance and quality control. The model optimally determines the parameters of the control chart, i.e., sample size, time interval of sampling and coefficient of control chart, in order to minimize the expected cost per time unit. While in most previous integrated models of maintenance and quality control, it was assumed that process deterioration and occurrence of assignable causes only affect the process mean, in this paper, assignable cause changes the process variance. The numerical examples and sensitivity analyses reveal that the proposed model optimally determines the control chart parameters so that the costs of maintenance and quality can be minimized, and the control chart has suitable statistical properties.

\* Corresponding author. H. Rasay  
Tel. 083-38305001; E-mail address: [H.Rasay@kut.ac.ir](mailto:H.Rasay@kut.ac.ir)