نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید
IERPS
ISSN: 2345-2269
نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید
سال یازدهم، شماره بیست و سوم، پاییز و زمستان ۱۴۰۲، صفحه ۱۲۱-۱۳۷
www.ier.basu.ac.ir
DOI: 10.22084/ier.2020.19256.1855

مدل برنامه‌ریزی پویای تصادفی برای برنامه‌ریزی سیستم‌های تولیدی با امکان تولید محصولات معیوب در افق برنامه‌ریزی محدود

پرویز رحیمی کاکه جوب[۱]، هیوا فاروقی[۲*]، حسن رسائی[۳]

۱. دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، گروه مهندسی صنایع، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران
۲. استاد گروه مهندسی صنایع، دانشکدهٔ مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران
۳. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکدهٔ مدیریت مهندسی، دانشگاه صنعتی کرمانشاه، کرمانشاه، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت ۱۴۰۲/۷/۲۳
پذیرش ۱۴۰۲/۱۰/۱۱
(مقاله پژوهشی)

کلمات کلیدی:
فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی
برنامه‌ریزی پویای تصادفی
برنامه‌ریزی تولید
تصمیمات متوالی

خلاصه

بهره‌وری سیستم‌های تولیدی به برنامه‌ریزی مناسب در زمینه‌های مختلفی ازجمله تولید، نگهداری و تعمیرات، کنترل موجودی و ... وابسته می‌باشد. باتوجه به تأثیر عمده و مستقیم برنامه تولید بر سایر زمینه‌ها، لازم است این برنامه با رویکرد مناسبی تهیه شود تا بتوان سیستم‌های تولیدی را به‌درستی مدیریت نموده و هزینه‌ها را تا حد امکان کاهش داد. محدودیت‌هایی مانند لزوم تأمین مقدار مشخصی از تقاضا در یک بازه زمانی مشخص، احتمال تولید محصولات معیوب و تحمیل هزینه‌های ناشی از راه‌اندازی مکرر سیستم، مدیران را در ارائه یک برنامه دقیق با چالش مواجه می‌نماید. در این پژوهش، سعی بر آنست که با بهره‌گیری از فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی، روند تولید در یک سیستم تک‌محصولی چنددوره‌ای و با لحاظ کردن محدودیت‌های فوق‌الاشاره برنامه‌ریزی شود. در مسأله پیش‌رو با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی پویای تصادفی، بهترین اقدام ممکن، انتخاب و به‌عبارتی بهترین حجم تولید برای هر دوره تعیین خواهد شد. هدف، تعیین حجم تولید در هر دوره و به‌ازای حالات مختلف، به‌گونه‌ای است که بتوان در انتهای دوره‌های مجاز تولید، با کمترین هزینه، کل تقاضا را پوشش داد. اثربخشی مدل با حل یک مثال عددی، بررسی و تحلیل اثرات تغییر پارامترها بر نتایج مسأله ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که بین متوسط نرخ هزینه و هزینه‌های مربوط به راه‌اندازی سیستم و تولید هر واحد محصول رابطه مستقیمی برقرار و ارتباط نرخ مذکور با احتمال تولید محصولات سالم و ظرفیت تولید، معکوس می‌باشد. افزایش ظرفیت تولید بعد از آستانه معینی، تأثیری بر متوسط نرخ هزینه نخواهد داشت.

۱. مقدمه

ارائه یک برنامه تولید بهینه یکی از عوامل مهم و اساسی در راستای کاهش هزینه‌های تولید و ایجاد بستری مناسب برای برنامه‌ریزی مناسب در سایر زمینه‌های مرتبط با بهره وری سیستم‌های تولیدی، ازجمله نگهداری و تعمیرات، کنترل موجودی و ... می‌باشد.

تولیدکنندگان، محصولات مورد نیاز مشتریان را تولید و با قیمتی که مشتریان مایل به پرداخت آن باشند به بازار عرضه می‌نمایند. سازمان‌های موفق، ضمن تحقق این هدف، برای ذینفعان خود نیز سودآوری می‌کنند. قیمت‌گذاری محصولات اغلب رقابتی بوده و تنها راه افزایش سود، کاهش هزینه‌های تولید و توزیع می‌باشد. این موضوع، مؤید لزوم مدیریت و فعالیت سازمان‌های مذکور با یک رویه کارا می‌باشد. برنامه‌ریزی و زمان‌بندی تولید[۲] دو مقوله مهمی هستند که

* نویسنده مسئول: هیوا فاروقی
تلفن: ۰۸۷-۳۳۶۶۰۰۷۳؛ پست الکترونیکی: h.farughi@uok.ac.ir

2. Production planning and scheduling

برای افزایش کارایی در ساخت محصولات و بهبود اثربخشی در ارائه خدمات به مشتریان به‌کار گرفته می‌شوند. برنامه‌ریزی تولید به‌دنبال تعیین اینست که چه چیزی، چه‌وقت و به چه مقدار تولید شود تا نیازهای مشتریان را بدون تحمیل هزینه‌های زیاد در نگهداری موجودی و یا ازدست رفتن سفارشات برآورده سازد. زمان‌بندی نیز نحوه‌ی دستیابی به اهداف تعیین شده در برنامه تولید را با لحاظ کردن محدودیت در منابع دنبال می‌کند [۱]. کنترل تولید، کنترل موجودی و مدیریت نگهداری و تعمیرات، اصلی‌ترین سیاست‌های عملیاتی هستند که بر روی عملکرد سیستم‌های تولیدی تأثیرگذار می‌باشند. این سیاست‌ها همچنین می‌توانند با یک رویکرد یکپارچه، برنامه‌ریزی شوند [۲]. برنامه‌ریزی تولید یکی از مهم‌ترین موضوعات در ساخت و تولید می‌باشد. طبیعت این مسائل پیچیده بوده و محققین آن را تحت مفروضات متعدد و مختلفی مطالعه کرده‌اند [۳]. باتوجه به تنوع بالای سیستم‌های تولیدی، شرایط و فرآیندهای مختلف تولید محصولات و همچنین وابستگی برنامه‌های تولید به عوامل متعددی ازجمله ماهیت، مقدار و زمان تقاضای مشتریان، دامنه مسائل مرتبط با برنامه‌ریزی تولید، بسیار گسترده بوده و می‌توان از چشم‌اندازهای مختلفی مسائل این حوزه را بررسی، مدل‌سازی و تحلیل نمود. در پژوهش‌های پیشین، اغلب از رویکردهای برنامه‌ریزی خطی[۱] و غیرخطی[۲]، برنامه‌ریزی پویا[۳] و برنامه‌ریزی پویای تصادفی[۴] و همچنین برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط[۵] برای رویارویی با مسائل و چالش‌های حوزه مذکور، استفاده شده است [۲،۴،۵،۸،۱۲،۱۶].

در این پژوهش سعی بر آنست تا با درنظر گرفتن شرایط خاصی برای تولید محصولات مورد تقاضای مشتریان، یک برنامه تولید پویا برای تحقق تقاضای مشتریان طی چند دوره معین و با لحاظ کردن عدم قطعیت در تولید محصولات سالم ارائه شود. ماهیت برنامه ارائه شده به‌گونه‌ای است که تولیدکننده قادر خواهد بود در هر دوره، متناسب با شرایط تجربه شده (میزان محصولات سالم تولید شده) در دوره‌های پیشین، حجم تولید در دوره جاری را تعیین نماید. باتوجه به ماهیت دوره‌ای مسأله و نیاز به اخذ تصمیمات متوالی و همچنین وجود عدم قطعیت در مواجهه با حالات مختلف تعریف شده برای مسأله، یکی از رویکردهای مناسب برای تعیین سیاست بهینه[۶]، فرمول‌بندی و تحلیل مسأله در قالب فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی[۷] می‌باشد.

۲. مرور مطالعات پیشین

در قرن حاضر شرکت‌های تولیدکننده با چالش‌های خاصی روبرو هستند. طرح نیازهایی از جانب مشتریان که به‌طور فزآینده‌ای پیچیده شده‌اند، انتظارات مشتریان برای تحویل سریع‌تر کالاها و عدم قطعیت در بازارها نمونه‌هایی از این چالش‌ها می‌باشند. در همین راستا، ارائه مدل‌های مناسب و غالباً پویا برای حل مسائل مرتبط با برنامه‌ریزی تأمین و تولید واحدهای تولیدی، موضوع مطالعه و تحقیق بسیاری از پژوهشگران، خصوصاً در سال‌های اخیر می‌باشد. مورنو و مونتاگنا[۸] در سال ۲۰۰۹ به ارائه یک مدل عمومی برای طراحی و برنامه‌ریزی تولید یک کارخانه چندمحصولی تحت یک سناریوی چنددوره‌ای پرداخته‌اند. فرمول‌بندی اولیه مسأله به‌صورت غیرخطی بوده و در ادامه با تبدیل فرمول‌بندی اولیه به مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط، امکان حل آن در حالت بهینه جهانی[۹] فراهم شده است. نکته قابل توجه در کار ایشان، همزمانی تصمیات مربوط به طراحی و تولید است که پیشتر و در مقالات مشابه به‌صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفته‌اند. طی رویکرد ارائه شده، تصمیم‌گیرنده این امکان را دارد که همزمان تعاملات بین سیاست‌های طراحی، تولید، فروش و کنترل موجودی را درنظر گرفته و بازخوردهای اثرات تصمیمات خود را درک و دریافت نماید [۶]. در پژوهش دیگری در همین سال، یک سیستم تولیدی با لحاظ کردن مقوله بازتولید[۱۰] مورد بررسی قرار گرفته و یک مدل مبتنی‌بر برنامه‌ریزی پویای تصادفی برای برنامه‌ریزی تولید غیرقطعی ارائه شده است. هدف مسأله، تعیین تعداد بهینه محصولات بازتولید شده در هر دوره است، به‌گونه‌ای که هزینه انتظاری کل، در حداقل مقدار ممکن باشد. برنامه تولید بهینه برای سیستم مذکور و با فرض یک افق زمانی محدود، با الگوریتم تکرار سیاست[۱۱] به‌دست آمده است [۷]. محققین در مطالعه دیگری در سال ۲۰۱۲، به‌دنبال تعیین استراتژی بهینه تولید در یک سیستم تولیدی می‌باشند. هدف، آماده کردن تقاضای مشتریان با لحاظ کردن هزینه‌های مربوط به تنظیمات اولیه ماشین‌آلات، هزینه تأخیر در تحویل کالا[۱۲] به مشتری و هزینه ناشی از کمبود کالا می‌باشد. باتوجه به فرض تصادفی بودن مقادیر ارزش فروش در آینده، مسأله از نوع تصادفی بوده و در ابتدا با یک مدل برنامه‌ریزی پویای تصادفی فرموله شده و در ادامه فرمول‌بندی مذکور به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تغییر یافته است. مسأله در یک حالت عمومی درنظر گرفته شده و بنا بر ادعای نویسندگان مقاله، مدلی که برای تعیین تصمیمات بهینه، ارائه شده در اغلب مسائل مشابه و در زمینه‌هایی مانند زمان‌بندی تولید، برنامه‌ریزی منابع[۱۳]، برنامه‌ریزی ظرفیت مورد نیاز[۱۴] و ... کاربرد و قابلیت استفاده دارد [۲]. در سال ۲۰۱۳ و در پژوهش دیگری، از رویکرد برنامه‌ریزی پویا در یک سیستم خط تولید سریالی[۱۵] (متوالی) و برای تعیین سیاست بهینه توقفات سیستم و به‌عبارتی تعیین حالت پایانی بهینه برای تعیین تکلیف تجهیزات آسیب دیده استفاده شده است. بدین منظور، یک فرمول‌بندی ریاضی برای مسأله ارائه و سیاست بهینه با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی پویا به‌دست آمده است. همچنین

1. Linear programming
2. Non-linear programming
3. Dynamic programming
4. Stochastic dynamic programming
5. Mixed integer programming
6. Optimal policy
7. Markov decision process (MDP)
8. Moreno & Montagna
9. Global Optimality
10. Remanufacturing
11. Policy iteration
12. Tardiness
13. Manufacturing resource planning
14. Capacity requirements planning
15. Serial production line

به‌منظور مدیریت موضوع عدم قطعیت در موارد تصادفی مربوط به خطوط تولیدی، یک رویه بهینه‌سازی مجدد مبتنی‌بر رویداد[1] نیز بر پایه مدل برنامه‌ریزی پویای اولیه، ارائه شده است [۸]. الاشهاب[2] در مقاله خود در سال ۲۰۱۶، یک مدل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط را برای حل مسأله برنامه‌ریزی تولید در یک سیستم تولید چندمحصولی با یک زنجیره چندسطحی و در حالت چنددوره‌ای و چندهدفه به‌کار گرفته است. مدل ارائه شده در این پژوهش، مدیریت موجودی کالا را هم در مراکز تولید و هم مراکز توزیع پوشش داده و باتوجه به بررسی‌های انجام شده، قابلیت استفاده برای حل مسائل با دوره‌های متعدد را نیز داراست [۹]. هیلگر و همکاران[3] نیز در همین سال، یک مدل پویای تصادفی چندمحصولی را مورد بررسی قرار داده‌اند که در آن علاوه‌بر برنامه‌ریزی برای تولید محصولات اصلی امکان بازتولید محصولات نیز در برنامه لحاظ شده است. تفاوت قابل توجه این پژوهش با موارد مشابه خود در بهره‌گیری از رویکردهای برنامه‌ریزی استوار[4] می‌باشد که ارائه برنامه‌های موجه را در شرایط خاص تضمین می‌نماید. در این راستا از دو رویکرد تقریبی که امکان ارائه برنامه‌های تولید و بازتولید استوار را فراهم می‌کنند استفاده شده است [۱۰]. تکسان و گیونز[5] نیز در سال ۲۰۱۶، یک مسأله برنامه‌ریزی تولید را در حالتی بررسی کرده‌اند که تولیدکننده یکی از اجزاء ورودی تولید را با پیشنهاد قیمت به تأمین‌کنندگان، تهیه و خریداری می‌کند. در این پژوهش، اگرچه هزینه‌های مربوط به تنظیم و راه‌اندازی ماشین‌آلات، ثابت فرض شده، هزینه نگهداری به‌صورت خطی درنظر گرفته شده است. مدل ارائه شده در قالب یک مسأله برنامه‌ریزی گسسته زمان است که در آن هزینه‌ها، تقاضا و سطوح تأمین اجزاء ایستا[6] (پایا) نمی‌باشند [۱۱]. برنامه‌ریزی برای یک سیستم هیبریدی تولید و بازتولید، موضوع تحقیق پولوتسکی و همکاران[7] در سال ۲۰۱۷ می‌باشد. در این پژوهش باتوجه به اینکه تولید و بازتولید، هر دو توسط یک تسهیل انجام می‌پذیرد، تغییر ماهیت تولید از حالت اصلی به حالت بازتولید از محصولات برگشتی، مستلزم تنظیم مجدد ماشین بوده و هزینه‌های مربوطه را به سیستم تحمیل می‌نماید. با حل مدل مربوطه، زمان‌های تنظیم مجدد و نرخ تولید و بازتولید محصولات، تعیین خواهد شد [۱۲]. سعیدی و اعظمی در سال ۲۰۱۷، یک مدل بهینه‌سازی استوار دوسطحی را به‌کمک بازی استکلبرگ در حوزه برنامه‌ریزی تولید توسعه داده‌اند. در مسأله تحت بررسی، شرکت رهبر، تولید و جایگزین کردن یک محصول جدید را در حالی دنبال می‌کند که رقبا هیچ تصمیمی برای تولید چنین محصول جدیدی ندارند [۱۳]. در تحقیق دیگری در سال ۲۰۱۹، محققین به بیان مزایا و چالش‌های برنامه‌ریزی و کنترل تولید[8] پرداخته و با اشاره به پیشرفت‌های صورت گرفته در زمینه تکنولوژی‌های اطلاعاتی و ارتباطاتی، ایده برنامه‌ریزی و کنترل تولید در قالب یک سرویس[9] را طرح نموده و استفاده از آن را در شبکه‌های تولید و با بهره‌گیری از زیرساخت‌های فضای ابری[10] پیشنهاد داده‌اند. ایشان، دلیل پیشنهاد خود را ارائه راه‌حلی برای مواجهه با چالش‌های موجود در وضعیت فعلی مفهوم برنامه‌ریزی و کنترل تولید ازجمله عدم قطعیت برنامه‌ریزی‌ها، تغییر مقیاس سریع در سیستم‌های تولیدی، وجود تکنولوژی‌های مختلف تولیدی و ... عنوان نموده‌اند [۱۴]. آواستی و همکاران[11] در سال ۲۰۱۹، رویکرد متفاوتی از برنامه‌ریزی ریاضی را برای بهبود تصمیمات مربوط به توسعه، بهینه‌سازی و برنامه‌ریزی تولید در صنایع نفت و گاز مطرح نموده و یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی چنددوره‌ای همزمان برای تعیین راه‌حل بهینه در مسأله برنامه‌ریزی تولید نفت را ارائه داده‌اند. طی بررسی یک مثال موردی، نرخ‌های مختلف بازده و همچنین قیمت‌های مختلف نفت در مسأله اعمال و ارزش تابع هدف در مدل همزمان فوق‌الاشاره و مدل بهینه‌سازی تک‌دوره‌ای متوالی با هم مقایسه و برتری مدل همزمان، بررسی و اثبات شده است [۱۵]. لیو و همکاران[12] نیز در همین سال، یک مسأله تولید-موجودی چنددوره‌ای دومحصولی را با فرض عدم قطعیت در تقاضا مورد بررسی قرار داده‌اند. در مدل پایه از زمان‌های انتظار برای دریافت[13] صرف‌نظر شده و مسأله در قالب یک برنامه پویای چندبعدی فرموله شده است. در ادامه، مدل‌های تعدیل شده برای هماهنگی با شرایط مختلف ازجمله وجود زمان‌های انتظار مثبت و همچنین فرض فصلی بودن مواد اولیه ارائه شده است [۱۶]. در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۹، محققین یک واحد تولیدی را درنظر گرفته‌اند که ورودی‌های مورد نیاز آن توسط یک زنجیره دوسطحی شامل تعدادی تأمین‌کننده فراهم می‌شود. واحد تولیدی نیز به‌دنبال تأمین تقاضای پویای مشتریان می‌باشد. هریک از این تأمین‌کنندگان دارای محدودیت در تعداد محصولات قابل عرضه در قالب یک دسته واحد به‌کارخانه اصلی می‌باشند. اما فرض شده که ظرفیت کارخانه در راستای تأمین تقاضای مشتریان به‌اندازه کافی بزرگ می‌باشد. تعیین برنامه تولید بهینه برای تأمین‌کنندگان مواد اولیه کارخانه اصلی، موضوع اصلی این پژوهش می‌باشد. بدین منظور یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط ارائه و با استفاد از یک الگوریتم ابتکاری دومرحله‌ای به دو زیرمسأله تبدیل و زیرمسأله‌ها به‌ترتیب و با روش برنامه‌ریزی پویا حل شده‌اند. نهایتاً به‌منظور بهبود جواب یک رویکرد تکرارشونده ارائه شده است [۱۷]. برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای برای یک سیستم تولیدی شامل چندین ایستگاه کاری موازی و با فرض تولید محصولات مشابه و لحاظ کردن ظرفیت‌های خاص برای ایستگاه‌ها، موضوع پژوهش دیگری در سال ۲۰۲۰ می‌باشد. زمان و هزینه‌های راه‌اندازی

1. An event-triggered re-optimization procedure
2. El Ashhab
3. Hilger et al
4. Robust planning
5. Teksan & Geunes
6. Stationary
7. Polotski et al
8. Production planning and control (PPC)
9. Production planning and control as a service
10. Cloud space
11. Awasthi et al
12. Liu et al
13. Lead times

ماشین‌آلات نیز در جزئیات مسأله لحاظ شده و هدف یافتن بهترین ترکیب زمانی تولید بر روی ماشین‌هاست که منجربه حداکثر کردن سود و حداقل کردن هزینه‌های سرمایه‌گذاری خواهد شد. از نکات قابل توجه در این پژوهش، بررسی یک نمونه از دنیای واقعی و گزارش نتایج حل مدل در ارتباط با نمونه مذکور می‌باشد [۱۸]. گیوم و همکاران[1] نیز در سال ۲۰۲۰، به بررسی مسأله برنامه‌ریزی تولید یک سیستم تک‌محصولی تحت عدم قطعیت تقاضا پرداخته‌اند. فرض عدم قطعیت در تقاضا در دو حالت گسسته و پیوسته در مسأله لحاظ شده و از رویکرد بهینه‌سازی با معیار minmax که ازجمله رویکردهای بهینه‌سازی استوار می‌باشد برای ارائه برنامه تولید بهینه بهره‌برداری شده است [۱۹]. استفاده از یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی برای برنامه‌ریزی تولید با تقاضای تصادفی و محدودیت ظرفیت، موضوع پژوهش گومز و همکاران[2] در سال ۲۰۲۱ می‌باشد. ایشان، نخست یک مدل قطعی را ارائه و رفتار آن را در ارتباط با مسأله موردنظر بررسی کرده و سپس با به‌کارگیری پارامترهای تصادفی به توسعه مدل پایه پرداخته‌اند. با هدف حداقل کردن هزینه‌ها، مدل ارائه شده به‌طور خاص، به‌دنبال تعیین تعداد بهینه پرسنل تولیدی در هر ماه، تعداد بهینه محصولات تولیدی در هر ماه و تعداد بهینه محصولاتی که باید انبار شوند، می‌باشد. لازم به ذکر است این پژوهش در دسته مطالعات حوزه برنامه‌ریزی تولید یکپارچه[3] قرار می‌گیرد [۲۰]. لیو و همکاران[4] در سال ۲۰۲۲، ضمن اشاره به موضوع ظهور تکنولوژی‌های جدید در دیجیتالی کردن سیستم‌های تولیدی، این تکنولوژی‌ها را هم به‌عنوان یک فرصت و هم به‌عنوان عاملی برای ایجاد چالش‌های جدید معرفی نموده‌اند. ایشان، در مقاله خود به بررسی اثرات انقلاب صنعتی چهارم[5] بر رویکردهای برنامه‌ریزی تولید پرداخته و سه چالش اصلی در به‌کارگیری تکنولوژی‌های نوین در زمینه برنامه‌ریزی تولید را این‌گونه بیان می‌کنند. نخست، چالش‌های یکپارچه‌سازی داده، نرم‌افزار و تصمیمات، دوم، فرصت‌ها و مشکلات ناشی از دراختیار داشتن داده‌های حجیم[6] و سوم، چالش توسعه ابزارهایی است که توانایی بروز واکنش‌های به‌موقع را داشته و بتوانند به‌طور مناسبی با مدیران سطوح پایین‌تر و پرسنل تولید تعامل برقرار نمایند [۲۱]. کمینه کردن هزینه‌های مربوط به عملیات تولید، نگهداری و برون‌سپاری با استفاده از سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر موضوع پژوهش دیگری در سال ۲۰۲۳ می‌باشد. برنامه‌های تولید سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر، قابلیت انطباق با تحقق مقادیر مختلفی از تقاضا را دارا می‌باشند. به‌منظور مواجهه با موضوع عدم قطعیت تقاضا، یک رویکرد مبتنی‌بر سناریو، اتخاذ شده و برای حل آن از یک الگوریتم ابتکاری بهره‌برداری شده است. تحلیل نتایج عددی مربوط به یک نمونه واقعی حاکی از آنست که بهره‌گیری از رویکرد بهینه‌سازی مسأله زمان‌بندی تولید و لحاظ کردن عدم قطعیت تقاضا در سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر، به‌طور مؤثری موضوع برنامه‌ریزی تولید در نمونه مذکور را مدیریت می‌نماید [۲۲]. در پژوهش دیگری در سال ۲۰۲۴، بهبود توأمان برنامه تولید روزانه و مدیریت تأمین انرژی در یک مجتمع صنعتی و با لحاظ کردن فرآیندهای تولید مربوطه و همچنین انرژی‌های تجدیدپذیر[7] و سیستم‌های ذخیره انرژی مورد بررسی قرار گرفته است. موضوع مذکور در قالب یک مسأله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط چندمرحله‌ای تصادفی فرموله شده و استراتژی‌های حل مختلفی برای حل آن مورد بحث قرار گرفته است. از آن جمله می‌توان به برنامه‌ریزی پویای تصادفی و همچنین الگوریتم‌های ابتکاری مبتنی‌بر برنامه‌ریزی پویای دوگان تصادفی[8] اشاره کرد [۲۳].

دسته‌بندی مقالات براساس (ماهیت کلی سیستم تحت بررسی، اهداف و شرایط خاص مسأله و همچنین نوع رویکرد مدل‌سازی و حل) در جدول (۱) ارائه شده است.

۳. بیان مسأله و انگیزه تعریف آن

همان‌طور که پیشتر نیز اشاره شد باتوجه به تنوع بالای سیستم‌های تولیدی و همچنین وابستگی برنامه‌ریزی‌ها و تصمیمات این حوزه به عوامل متعدد و بعضاً غیرقطعی بودن این عوامل، دامنه مسائل مرتبط با برنامه‌ریزی سیستم‌های تولیدی بسیار گسترده می‌باشد. این گستردگی، علی‌رغم چالش‌های خاصی که برای رویارویی با مسائل این حوزه ایجاد می‌کند، فرصت مناسبی برای طرح موضوعات و مسائل مختلف در این زمینه و انجام پژوهش و مطالعات علمی فراهم نموده است. مطالعات صورت گرفته حاکی از آنست که در رویارویی با مسائل این حوزه و ارائه مدل‌های مناسب و تحلیل آن‌ها، لحاظ کردن تغییرات اندکی در شرایط مفروض اولیه، منجربه ایجاد تغییرات اساسی در مدل‌سازی و تحلیل مسائل خواهد شد. با این حال، در این پژوهش سعی شده، شرایط مسأله تحت بررسی طوری درنظر گرفته شود که بتوان با ارائه تفاسیر متفاوتی از مفروضات مسأله، از مدل و تحلیل‌های ارائه شده در محدوده گسترده‌تری بهره‌برداری نمود. به‌منظور اثبات این ادعا در ادامه و در خلال بیان جزئیات مسأله، به نمونه‌ای از این شرایط در ارتباط با موضوع تعداد دوره‌های مجاز تولید، اشاره شده است.

در این پژوهش، شرایط خاصی از یک سیستم تولیدی تک‌محصولی که متعهد به تأمین مقدار معینی از تقاضا می‌باشد مورد بررسی قرار گرفته است. تولید محصولات معیوب و خارج از استاندارد در این سیستم، اجتناب‌ناپذیر بوده و لازم است تصمیم‌گیرنده به‌منظور تأمین تقاضای مشتریان تحت محدودیت‌های خاص مسأله، در ابتدای هر دوره و باتوجه به شرایط تجربه شده در دوره‌های پیشین برای آن دوره برنامه‌ریزی نماید. مواجهه با چالش مذکور با بهره‌گیری از چارچوب فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی و همچنین استفاده از روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی پویای تصادفی، صورت می‌پذیرد.

1. Guillaume
2. Gomez et al
3. Aggregate production planning
4. Luo et al
5. Industry 4.0
6. Big data
7. Renewable energy
8. Stochastic dual dynamic programming

جدول (۱). دسته‌بندی مقالات پیشین

شماره مرجع	سال انتشار	نوع سیستم تحت بررسی	شرایط و اهداف خاص مسأله	رویکرد کلی مدل‌سازی و حل مسأله
[۶]	۲۰۰۹	سیستم تولید چندمحصولی	همزمانی تصمیمات طراحی و تولید	مدل غیرخطی و مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط
[۷]	۲۰۰۹	سیستم تولیدی عمومی	لحاظ کردن موضوع بازتولید محصولات	مدل مبتنی‌بر برنامه‌ریزی پویای تصادفی
[۲]	۲۰۱۲	سیستم تولیدی عمومی	لحاظ کردن هزینه تأخیر و کمبود و تصادفی بودن ارزش فروش	مدل مبتنی‌بر برنامه‌ریزی پویای تصادفی و مدل برنامه‌ریزی خطی
[۸]	۲۰۱۳	سیستم خط تولید سریالی	برنامه‌ریزی توقفات سیستم برای توازن اهداف تولید در مقابل نیاز به انجام فعالیت‌های غیرتولیدی	برنامه‌ریزی پویا/ رویکرد بهینه‌سازی مجدد مبتنی‌بر رویداد
[۹]	۲۰۱۶	سیستم تولید چندمحصولی	لحاظ کردن زنجیره چندسطحی در حالت چنددوره‌ای و چندهدفه و همچنین موضوع مدیریت موجودی	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط
[۱۰]	۲۰۱۶	سیستم تولید چندمحصولی	لحاظ کردن موضوع بازتولید محصولات و به‌کارگیری رویکرد برنامه‌ریزی استوار	برنامه‌ریزی پویای تصادفی و رویکردهای تقریبی کمکی
[۱۱]	۲۰۱۶	سیستم تولیدی عمومی	خرید یکی از اجزاء تولید با پیشنهاد قیمت به تأمین‌کننده و لحاظ کردن هزینه نگهداری به‌صورت خطی	مدل برنامه‌ریزی گسسته زمان
[۱۲]	۲۰۱۷	سیستم تولیدی عمومی	درنظر گرفتن یک سیستم هیبریدی تولید و بازتولید و وابستگی نرخ تولید به حالت تولید	برنامه‌ریزی پویای تصادفی
[۱۳]	۲۰۱۷	سیستم تولیدی عمومی چندکارخانه‌ای	درنظر گرفتن یک سیستم چندمحصولی چنددوره‌ای و چندکارخانه‌ای و با هدف تولید و جایگزینی محصول جدید	برنامه‌ریزی دوسطحی و بازی استکلبرگ
[۱۴]	۲۰۱۹	سیستم تولیدی عمومی	ارائه ایده برنامه‌ریزی و کنترل تولید در قالب یک سرویس	-
[۱۵]	۲۰۱۹	صنایع نفت و گاز	ارائه رویکرد متفاوتی از برنامه‌ریزی ریاضی، بهینه‌سازی و برنامه‌ریزی تولید در صنایع نفت و گاز	برنامه‌ریزی غیرخطی چنددوره‌ای
[۱۶]	۲۰۱۹	سیستم تولید دومحصولی	لحاظ کردن موضوع کنترل موجودی و عدم‌قطعیت تقاضا	مدل برنامه‌ریزی پویای چندبعدی
[۱۷]	۲۰۱۹	سیستم تولیدی عمومی	تأمین ورودی‌های تولید از یک زنجیره دوسطحی/ فرض پویا بودن تقاضای مشتریان/ ارائه برنامه بهینه تولید برای تأمین‌کنندگان با هدف کاهش هزینه	برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط/ الگوریتم ابتکاری دومرحله‌ای مبتنی‌بر برنامه‌ریزی پویا
[۱۸]	۲۰۲۰	سیستم تولیدی تک‌محصولی شامل چندین ایستگاه کاری موازی	تولید محصولات مشابه و محدودیت ظرفیت در ایستگاه‌های کاری/ بررسی یک نمونه از دنیای واقعی	مدل برنامه‌ریزی خطی مبتنی‌بر سناریو
[۱۹]	۲۰۲۰	سیستم تولیدی تک‌محصولی	فرض عدم قطعیت تقاضا در دو حالت گسسته و پیوسته	استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار با معیار minmax
[۲۰]	۲۰۲۱	سیستم تولیدی عمومی	تعیین تعداد بهینه پرسنل، محصولات انبار شونده (در هر ماه)/ رویکرد برنامه‌ریزی تولید یکپارچه	مدل برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌ای و با استفاده از درخت سناریو
[۲۱]	۲۰۲۲	سیستم تولیدی عمومی	بررسی اثرات انقلاب صنعتی چهارم بر رویکردهای برنامه‌ریزی	-
[۲۲]	۲۰۲۳	سیستم تولیدی عمومی	لحاظ کردن موضوع سیستم‌های تولید انعطاف‌پذیر	رویکرد مبتنی‌بر سناریو و استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری
[۲۳]	۲۰۲۴	سیستم تولیدی عمومی در یک مجتمع صنعتی	بهبود توأمان برنامه تولید روزانه و مدیریت تأمین انرژی	برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط در حالت چندمرحله‌ای تصادفی
پژوهش جاری		سیستم تولید تک‌محصولی	لحاظ کردن فرصت چنددوره‌ای برای تأمین تقاضای مشتریان/ لحاظ کردن موضوع تصادفی بودن کیفیت محصولات تولیدی (تولید محصولات سالم و معیوب) و همچنین محدودیت ظرفیت تولید در هر دوره	رویکرد فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی/ برنامه‌ریزی پویای تصادفی

رویکرد حل مسأله به‌گونه‌ای است که امکان اخذ تصمیمات بهینه در تحقق شرایط مختلف را فراهم نموده و به‌عبارتی سیاست بهینه تولید را تعیین می‌نماید. تعریف کامل مسأله تحت بررسی و جزئیات آن به قرار زیر می‌باشد.

شرکتی متعهد است تعداد N واحد محصول سالم را در پاسخ به تقاضای مشتریان خود به ایشان تحویل دهد. حداکثر T دوره زمانی، فرصت برای تولید محصولات و اجرای تعهد مذکور، مفروض می‌باشد. لازم به ذکر است می‌توان این تعداد دوره را معادل تعداد دفعات مجاز برای راه‌اندازی سیستم[1] تولیدی نیز تعبیر نمود. تولیدکننده در ابتدای هر دوره می‌تواند در مورد راه‌اندازی سیستم تولید و مقدار تولید (درصورت راه‌اندازی سیستم) تصمیم‌گیری کند. هر واحد محصول تولیدی با احتمال p سالم و با احتمال $1\text{-}p$ معیوب می‌باشد. در هر دوره، اگر تولیدکننده تصمیم به تولید بگیرد، هزینه ثابت A را جهت راه‌اندازی سیستم، متحمل می‌شود. همچنین علاوه‌بر آن، تولید هر واحد محصول نیز هزینه متغیر c را به‌دنبال خواهد داشت. باتوجه به ماهیت تصادفی تولید محصولات سالم، در آخرین دوره (پایان افق برنامه‌ریزی تولید) امکان تحقق یکی از شرایط زیر وجود دارد:

حالت اول: تعداد محصولات سالم تولیدی، کمتر از مقدار تعهد شده (N) می‌باشد. در این صورت، هر واحد محصول تولیدی سالم، درآمدی معادل r_1 ($r_1 > c$) نصیب تولیدکننده می‌کند و به‌ازاء هر واحد اختلاف با میزان تعهد شده (N)، لازم است جریمه‌ای معادل k واحد پرداخت شود.

حالت دوم: تعداد محصولات سالم تولید شده بیشتر یا مساوی مقدار تعهد شده (N) می‌باشد. در این حالت، هر واحد محصول تولیدی سالم، درآمدی معادل r_1 ($r_1 > c$) نصیب تولیدکننده می‌کند، اما هر واحد تولید مازاد بر N، درآمدی معادل r_2 دارد به‌طوری‌که $r_2 \leq c$.

هدف یافتن سیاست بهینه برای این سیستم تولیدی است به‌گونه‌ای که ارزش انتظاری هزینه‌های سیستم در افق برنامه‌ریزی محدود T دوره، حداقل شود. نتایج پژوهش حاکی از وابستگی سیاست بهینه به ظرفیت تولید در هر دوره می‌باشد. به‌همین منظور و برای انطباق بیشتر مسأله با شرایط دنیای واقعی، محدودیت ظرفیت تولید در هر دوره نیز تحت شرایط مختلفی از این محدودیت که در زیر به آن‌ها اشاره شده است در مسأله اعمال شده و اثرات اعمال این شرایط در بخش تحلیل نتایج ارائه شده است:

- ظرفیت تولید در هر دوره کمتر از کل مقدار محصولات تعهد شده باشد.
- ظرفیت تولید در هر دوره معادل مقدار محصولات تعهد شده باشد.
- ظرفیت تولید در هر دوره بیشتر از مقدار محصولات تعهد شده باشد.

۳-۱. رویکرد برنامه‌ریزی پویای تصادفی

اغلب اوقات در تلاش برای حل یک مسأله با رویکرد بالا به پایین (تفکیک و حل)، تقسیم بندی مسأله، چندین زیر مسأله مستقل ایجاد می‌نماید. اگر هر زیرمسأله را جداگانه و بدون بهره‌گیری از نتایج این گسترش ابعاد (اضافه شدن مسائل) حل کنیم، الگوریتم حاصل بسیار ناکارمد خواهد بود. اما چنانچه مراقبت کنیم که هر زیرمسأله متمایز را صرفاً یکبار و باتوجه به ثبت نتایجی که پیشتر به‌دست آمده، حل کنیم، الگوریتم می‌تواند کارامد باشد. این همان ایده عمومی برنامه‌ریزی پویا می‌باشد. این روش با تکیه بر قواعد بهینگی بلمن[2] کار می‌کند: راه‌حل بهینه برای یک مسأله شامل حل بهینه برای تمام زیرمسأله‌ها می‌باشد. بنابراین، برنامه‌ریزی پویا، مسائلی از بهینه‌سازی را حل می‌کند که با بهره‌گیری از فواید یک فرمول بازگشتی[3] قواعد بهینگی بلمن را برآورده می‌سازند [۲۴]. درواقع برنامه‌ریزی پویا، یک مسأله تصمیم‌گیری چندمرحله‌ای را به‌دنباله‌ای از مسائل تک‌مرحله‌ای تبدیل می‌کند.

برنامه‌ریزی پویا، یک تکنیک ریاضیاتی است که هدف آن گرفتن تصمیمات متوالی و به‌صورت مستقل از همدیگر می‌باشد. این رویکرد می‌تواند برای حل هر نوع مسأله بهینه‌سازی گسسته مورد استفاده قرار گیرد. اگرچه این تکنیک پیشتر نیز استفاده شده بود اما نام‌گذاری و فرموله کردن آن توسط بلمن صورت پذیرفته است [۲۴].

برنامه‌ریزی پویای تصادفی نیز یکی از تکنیک‌های مدل‌سازی مسائل بهینه‌سازی می‌باشد. این تکنیک، از ابزارهای برنامه‌ریزی پویا استفاده می‌کند، با این تفاوت که در این رویکرد، حالات مسأله ازپیش معین نبوده و اغلب به‌صورت احتمالی بیان می‌شود. از کاربردهای این تکنیک حل مسائلی است که در چارچوب فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی مدل شده‌اند.

۴. شرح روش پیشنهادی

۴-۱. مدل تصمیم‌گیری مارکوفی

اغلب مسائل مرتبط با برنامه‌ریزی تولید ماهیت دوره‌ای داشته و به‌عبارتی نیاز به انجام تصمیمات متوالی در مقاطع[4] مختلف وجود دارد. به‌منظور لحاظ کردن شرایط دنیای واقعی در این مسائل، مواجهه با موضوع عدم قطعیت در برخی پارامترها نیز اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. برای حل این دسته از مسائل، لازم است از رویکردهایی برای مدل‌سازی و حل مسائل استفاده شود که بتواند ضمن پوشش جنبه‌های فوق‌الاشاره، کارایی مناسبی در حل این‌گونه مسائل داشته باشد. در این پژوهش، مطابق آنچه که پیشتر و در بخش بیان مسأله تشریح شد، شرایط خاصی برای تولید تعداد معینی از محصولات سالم مورد تقاضا در یک سیستم تولیدی درنظر گرفته شده است. به‌منظور مدل‌سازی مسأله و حل آن، نخست رویکردهای مختلف استفاده شده در گذشته و در مقالات مشابه و همچنین رویکردهای مختلف مدل‌سازی مسائل تصمیم‌گیری چنددوره‌ای در شرایط عدم قطعیت، مورد بررسی قرار گرفت. نهایتاً مسأله در چارچوب یک فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی

1. System setup
2. Bellman's principle of optimality
3. Recursive formula
4. Epoch

مدل شده و از رویکرد برنامه‌ریزی پویای تصادفی برای حل مدل به‌دست آمده استفاده شده است.

مدل‌سازی مسائل در چارچوب فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی مستلزم تعریف حالات، اقدامات و پاداش‌های مناسب برای انجام هر اقدام در هر حالت می‌باشد. در مسأله تحت بررسی، چند مقطع متوالی برای تصمیم‌گیری درخصوص میزان تولید در هر دوره درنظر گرفته شده است. مبنای تعریف این مقاطع، شروع فرآیند تولید در ابتدای هر دوره زمانی و پایان تولید در دوره قبل می‌باشد. البته بدیهی است که اولین نقطه تصمیم‌گیری، مصادف با اولین راه‌اندازی سیستم بوده و در این مورد خاص، پایان یافتن تولید در دوره قبل، موضوعیت ندارد. در ادامه عناصر فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی برای مسأله تحت بررسی تشریح شده‌اند. لیست اندیس‌ها، پارامترها و نمادهای به‌کاررفته در عبارات و معادلات مربوطه نیز در
جدول (۲) ارائه شده است.

جدول (۲). معرفی اندیس‌ها، پارامترها و سایر نمادها

نماد	شرح
N	مقدار کل تقاضا
n	تعداد دوره‌های مجاز تولید
s	حالات مسأله (تعداد محصول سالم در ابتدای هر دوره)
A	هزینه راه‌اندازی در ابتدای هر دوره
c	هزینه تولید هر واحد محصول
r_1	درآمد تولید هر واحد محصول سالم (برای تعداد کمتر یا مساوی مقدار کل تقاضای تعهد شده)
r_2	درآمد تولید هر واحد محصول سالم (برای موارد خارج از (بیشتر از) کل تقاضای تعهد شده)
P	احتمال تولید محصول سالم
k	میزان جریمه برای هر واحد محصول کمتر از میزان تعهد و در پایان دوره‌های مجاز تولید
M	سقف تولید مجاز در هر دوره

۴-۱-۱. فضای حالات (State Space)

تعداد محصولات سالم تولید شده تا ابتدای هر دوره تصمیم‌گیری، به‌عنوان "حالت" مسأله تعریف می‌شود. فرض بر اینست که در دوره نخست، این تعداد یا همان حالت مسأله، معادل صفر واحد می‌باشد.

$$S = \{s | s = 0,1,2,3, \dots, nM\} \quad (۱)$$

۴-۱-۲. اقدامات (Actions)

مدیران سیستم تولیدی بایستی باتوجه به محدودیتی که در دوره‌های مجاز تولید و به‌عبارتی محدودیتی که در تعداد دفعات مجاز راه‌اندازی سیستم وجود دارد و همچنین باتوجه به احتمال تولید محصولات معیوب، نسبت به تعیین تعداد محصولاتی تولیدی در هر دوره اقدام نمایند. بدین منظور لازم است تصمیمات، طوری اتخاذ شود که حتی‌المقدور از تحمیل مجدد هزینه‌های راه‌اندازی به سیستم اجتناب شده و همزمان سقف تعداد تولیدات مجاز در هر دوره نیز رعایت شود. بر همین مبنا، جزء دیگر فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی یا همان "اقدام"، تعریف و معادل تعداد محصولاتی تولیدی (شامل محصولات سالم و ناسالم) در هر دوره درنظر گرفته می‌شود.

$$A = \{a | a = 0,1,2,3, \dots, M\} \quad (۲)$$

۴-۱-۳. پاداش آنی (Immediate reward)

پاداش‌های متناسب با هر اقدام و در هر حالت نیز برمبنای تحقق هزینه‌های مربوط به تولید محصولات و راه‌اندازی سیستم تعریف می‌شود. چنانچه تصمیم یا اقدام موردنظر، عدم تولید در یک دوره خاص باشد، طبیعتاً در آن دوره نه‌تنها هزینه‌ای برای تولید محصولات درنظر گرفته نمی‌شود، هزینه راه‌اندازی نیز لحاظ نخواهد شد. در سایر شرایط، نتیجه آنی اقدام تصمیم‌گیرنده، تحمیل هزینه‌های ناشی از تولید محصولات و همچنین هزینه راه‌اندازی سیستم در ابتدای دوره مربوطه خواهد بود.

$$R(s,a) = \begin{cases} A + ca & if \quad a > 0 \\ 0 & if \quad a = 0 \end{cases} \quad (۳)$$

درواقع، زمانی‌که سیستم در حالت s بوده و اقدام صورت گرفته در این حالت، a باشد، مقدار پاداش آنی که با $R(s,a)$، نمایش داده می‌شود، طبق معادله شماره (۳) خواهد بود. زمانی‌که تصمیم یا همان اقدام منتخب، تولید a واحد محصول باشد، هزینه راه‌اندازی، معادل A واحد پولی و همچنین هزینه تولید، معادل ca واحد پولی، به سیستم تحمیل خواهد شد. طبق معادله مذکور، چنانچه اقدام منتخب در حالت s، عدم تولید باشد، پاداش آنی نیز معادل صفر خواهد بود. پس از پایان دوره‌های مجاز تولید، درآمد ناشی از عرضه محصولات به مشتری و اختلاف آن با هزینه‌های تحمیل شده به سیستم، تعیین‌کننده ارزش سیاست اتخاذ شده در تعیین مقادیر تولید در هر دوره خواهد بود. نحوه محاسبه درآمد و اختلاف آن با هزینه‌ها در ادامه و در بخش۴-۲، تشریح شده است. هدف اینست که با استفاده از رویکردهای بهینه‌سازی و به‌طور خاص رویکرد برنامه‌ریزی پویای تصادفی، تصمیات مربوط به تعیین تعداد محصولاتی تولیدی در هر دوره و به‌عبارتی همان سیاست و برنامه تولید، کمترین مقدار هزینه را به‌دنبال داشته باشد.

۴-۱-۴. احتمالات انتقال (Transition probability)

فرض کنید در ابتدای دوره برنامه‌ریزی t قرار گرفته‌ایم و کل محصولات تولیدی سالم تا این مرحله s واحد بوده و به‌عبارتی حالت سیستم s می‌باشد. لازم است در ابتدای دوره مذکور (t)، در مورد میزان تولید و یا همان انجام اقدام متناسب با حالت درک شده از سیستم، تصمیم‌گیری شود. فرض کنید تصمیم بر تولید a_n واحد محصول گرفته شود. به‌عبارت دیگر اقدام، معادل a_n باشد. در این صورت با احتمال $P_{ss'}(a_n)$ سیستم از حالت s به حالت s' منتقل می‌شود، بدین مفهوم که از a_n واحد محصول تولیدی $s' - s$ واحد سالم بوده و بقیه معیوب می‌باشد.

$$p_{ss'}(a_n) = \binom{a_n}{s' - s} p^{s'-s}(1-p)^{a_n - s' + s} \quad (۴)$$

۴-۲. شرح مراحل روش پیشنهادی

مطابق رویکرد برنامه‌ریزی پویای تصادفی و باتوجه به معادلات بهینگی بلمن، نحوه محاسبه ارزش حالات (محاسبه کمینه هزینه در هر دوره و برای هر حالت) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f_n^*(s) = min\big(f_n(s,a_n)\big) \quad a_n = 0,1,2,3,\ldots. \qquad (۵)$$

$$f_n^*(s) = \underbrace{min}_{(a_n)}\left\{R(s,a_n) + \sum_{s'} f_{n+1}^*(s')p_{ss'}(a_n)\right\} \qquad (۶)$$

مقادیر ارزش حالات مسأله برای انتهای دوره پایانی (پایان دوره تصمیم‌گیری یا پایان دوره برنامه‌ریزی) نیز براساس معادله غیربازگشتی زیر محاسبه می‌شود

$$f_{n+1}(s) = \begin{cases} -r_1 s + k(N-s); & if\ \ s < N \\ -r_1.N - r_2(s-N); & if\ s \geq N \end{cases} \qquad (۷)$$

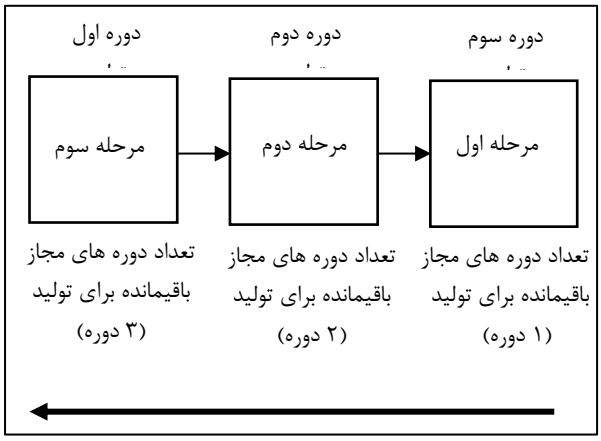
۴-۲-۱. رویکرد برنامه‌ریزی پویای تصادفی- تکنیک پس رو

به‌منظور حل مسأله تحت بررسی و با تکیه بر معادلات فوق، از روش پس‌رو استفاده می‌کنیم. شمای کلی روش مذکور با فرض اینکه تعداد دوره‌های مجاز تولید سه دوره باشد، در شکل (۱) ارائه شده است. برمبنای رویکرد فوق، نخست با استفاده از معادله شماره ۷، مقادیر مربوط به ارزش بهینه حالات مختلف در انتهای دوره تصمیم‌گیری آخر و به‌عبارتی ابتدای دوره فرضی $n+1$ ام، محاسبه می‌شود. این مقادیر با $f_{(n+1)}^*$ نمایش داده می‌شود. در ادامه و در گام اول از روش بازگشتی فوق‌الاشاره، لازم است برای هریک از حالات ممکن دوره پایانی، مقدار بهینه اشاره شده در معادله شماره (۶) را به‌ازای اقدامات مختلف (یعنی همان مقادیر a_n و درواقع همان مقادیر تولید در هر دوره)، محاسبه نمود. در این فرمول مقادیر s'، معادل حالاتی است که براساس حالت فعلی (s) در دوره جاری و باتوجه به تعداد محصول سالم تولید شده، انتقال به آن حالات در دوره بعدی محتمل می‌باشد. در انتهای این گام، مقادیر بهینه ارزش حالات و همچنین اقدام بهینه به‌ازای هر حالت مشخص خواهد شد. در گام دوم از مراحل روش بازگشتی، با مبنا قرار دادن ارزش‌های محاسبه شده در گام اول و با رویکرد مشابه گام اول، مقادیر ارزش بهینه حالات و همچنین اقدامات بهینه برای دوره دوم تصمیم‌گیری را تعیین می‌کنیم. گام سوم، مربوط به تعیین ارزش بهینه و تعیین تصمیم (اقدام) بهینه برای شروع فرآیند تولید در سیستم تولیدی مورد بحث می‌باشد. در این دوره، باتوجه به اینکه پیشتر از آن تولیدی صورت نپذیرفته، تنها حالت ممکن که در ابتدای دوره با آن مواجه هستیم، حالت صفر می‌باشد. به‌منظور محاسبه ارزش این حالت، مشابه گام‌های قبلی و با مبنا قرار دادن ارزش‌های بهینه محاسبه شده در گام پیشین، به‌کمک معادله شماره (۶)، اقدام بهینه برای این دوره را نیز تعیین می‌نمائیم. بدین ترتیب و با بهره‌گیری از یک رویه بازگشتی، سیاست بهینه در زمینه برنامه‌ریزی تولید و به‌عبارتی مقادیر بهینه برای تولید در هر دوره و برای مواجهه با هریک از حالات ممکن در ابتدای هر دوره، تعیین خواهد شد.

۵. حل مثال عددی

به‌منظور تشریح روش پیشنهادی و اعتبارسنجی آن، یک مثال موردی، با تنظیم پارامترهای آن مطابق جدول (۳)، مورد بررسی قرار گرفته و محاسبات لازم برای تعیین سیاست بهینه انجام شده است.

در ابتدا و پیش از انجام گام‌های اصلی روش پس‌رو، مقادیر ارزش بهینه حالات برای انتهای دوره سوم و ابتدای دوره فرضی چهارم، با استفاده از معادله شماره (۷) محاسبه می‌شود. روند محاسبات به‌قرار جدول (۴) می‌باشد.



شکل (۱). شمای کلی روش پس‌رو در برنامه‌ریزی پویا

جدول (۳). مقادیر مفروض برای حل مثال عددی

نماد	مقدار مفرض برای حل مثال عددی
N	۵
n	۳
A	۲
c	۰/۲۵
r_1	۰/۳
r_2	۰/۱
P	۰/۸
k	۵
M	۱۰

جدول (۴). محاسبه ارزش بهینه حالات در پایان دوره سوم

حالت مسأله در پایان دوره سوم و در ابتدای دوره فرضی چهارم	محاسبه ارزش بهینه حالات با معادله غیر بازگشتی شماره (۷)
۰	$f_4^*(0) = -0.3\times 0 + 5(5-0) = 25$
۱	$f_4^*(1) = -0.3\times 1 + 5(5-1) = 19.7$
۲	$f_4^*(2) = -0.3\times 2 + 5(5-2) = 14.4$
۳	$f_4^*(3) = -0.3\times 3 + 5(5-3) = 9.1$
۴	$f_4^*(4) = -0.3\times 4 + 5(5-4) = 3.8$
۵	$f_4^*(5) = -0.3\times 5 - 0.1(5-5) = -1.5$
۶	$f_4^*(6) = -0.3\times 5 - 0.1(6-5) = -1.6$
۷	$f_4^*(7) = -0.3\times 5 - 0.1(7-5) = -1.7$
۸	$f_4^*(8) = -0.3\times 5 - 0.1(8-5) = -1.8$
۹	$f_4^*(9) = -0.3\times 5 - 0.1(9-5) = -1.9$
۱۰	$f_4^*(10) = -0.3\times 5 - 0.1(10-5) = -2$

به‌همین ترتیب برای سایر حالات بزرگتر از ۱۰، هر بار صرفاً به‌میزان ۰/۱- به مقدار قبلی اضافه خواهد شد.

۵-۱. محاسبه ارزش حالات به‌ازای اقدامات مختلف (مقادیر مختلف تولید) و تعیین مقادیر بهینه در هر حالت

مبنای تشکیل جداول (۵)، (۶) و (۷)، معادله شماره (۶) می‌باشد. مطابق آنچه که در بخش ۴-۲ تشریح شد، درواقع در هر حالت باید به‌ازای اقدامات مختلف (یعنی همان مقادیر a_n و در یا همان مقادیر تولید در هر دوره)، مقدار بهینه اشاره شده در فرمول مذکور را محاسبه نمود. به‌منظور درک رویکرد محاسبات جدول (۵)، محاسبات تفصیلی (بسط‌یافته) دو مورد از مقادیر درج شده در جدول در زیر ارائه شده است. موارد مذکور با فونت پررنگ نمایش داده شده است.

۵-۲. محاسبات تفصیلی سلول‌های مشخص با فونت پررنگ برای سلول مشخص شده واقع در سطر دوم

جدول (۵)، ابتدا احتمال انتقال از حالت صفر به هریک از حالات و تحت انجام اقدام مربوطه (تولید سه محصول) را به‌کمک معادله شماره (۴) محاسبه می‌کنیم. باتوجه به اینکه در حالتی هستیم که تعداد محصولات سالم ابتدای دوره صفر می‌باشد، بدیهی است باتوجه به احتمالی بودن سلامت هر محصول تولیدی، با تولید سه واحد محصول، به یکی از حالت‌های ۰، ۱، ۲ و یا ۳ منتقل خواهیم شد. پس از محاسبه احتمالات مذکور:

$$
\begin{aligned}
f_n(s,a_n) &= \left(R(s,a_n) + \sum_{s'} f^*_{n+1}(s')p_{ss'}(a_n)\right) \\
&= f_n(0,a_3) = f_n(0,3) \\
&= \left(2 + 0.25 \times 3 \right. \\
&\left. + \sum_{s'} f^*_{n+1}(s')p_{ss'}(a_n)\right) \\
&= 2 + 3 \times 0.25 + 25 \times 0.008 \\
&+ 19.7 \times 0.096 + 14.4 \times 0.384 \\
&+ 9.1 \times 0.512 = 15.03
\end{aligned}
$$

جدول (۵). مرحله اول روش برنامه‌ریزی پویا و یافتن مقادیر بهینه دوره سوم تولید

a_3 / s	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	$f^*_3(a_3)$	a^*_3
۰	۲۵	۲۳/۰۱	۱۹/۰۲	**۱۵/۰۳**	۱۱/۰۴	۷/۰۵	۴/۴۲	۳/۱۶	۲/۷۱	۲/۶۵	۲/۷۴	۲/۶۵	۹
۱	۱۹/۷	۱۷/۷۱	۱۳/۷۲	۹/۷۳	۵/۷۴	۳/۲۵	۲/۵۳	۲/۲۹	۲/۳۲	۲/۴۵	۲/۶۰	۲/۲۹	۷
۲	۱۴/۴	۱۲/۴۱	۸/۴۲	۴/۴۳	۲/۵۶	۱/۹۸	۱/۹۲	۲/۰۲	۲/۱۷	۲/۳۳	۲/۵۰	۱/۹۲	۶
۳	۹/۱	۷/۱۱	۳/۱۲	۱/۷۹	۱/۵۳	۱/۵۸	۱/۷۳	۱/۸۹	۲/۰۶	۲/۲۳	۲/۴۰	۱/۵۳	۴
۴	۳/۸	۱/۸۱	۱/۱۴	۱/۱۵	۱/۲۸	۱/۴۵	۱/۶۲	۱/۷۹	۱/۹۶	۲/۱۳	۲/۳۰	۱/۱۴	۲
۵	-۱/۵	۰/۶۷	**۰/۸۴**	۱/۰۱	۱/۱۸	۱/۳۵	۱/۵۲	۱/۶۹	۱/۸۶	۲/۰۳	۲/۲۰	-۱/۵	۰
۶	-۱/۶	۰/۵۷	۰/۷۴	۰/۹۱	۱/۰۸	۱/۲۵	۱/۴۲	۱/۵۹	۱/۷۶	۱/۹۳	۲/۱۰	-۱/۶	۰
۷	-۱/۷	۰/۴۷	۰/۶۴	۰/۸۱	۰/۹۸	۱/۱۵	۱/۳۲	۱/۴۹	۱/۶۶	۱/۸۳	۲/۰۰	-۱/۷	۰
۸	-۱/۸	۰/۳۷	۰/۵۴	۰/۷۱	۰/۸۸	۱/۰۵	۱/۲۲	۱/۳۹	۱/۵۶	۱/۷۳	۱/۹۰	-۱/۸	۰
۹	-۱/۹	۰/۲۷	۰/۴۴	۰/۶۱	۰/۷۸	۰/۹۵	۱/۱۲	۱/۲۹	۱/۴۶	۱/۶۳	۱/۸۰	-۱/۹	۰
۱۰	-۲/۰	۰/۱۷	۰/۳۴	۰/۵۱	۰/۶۸	۰/۸۵	۱/۰۲	۱/۱۹	۱/۳۶	۱/۵۳	۱/۷۰	-۲/۰	۰

جدول (۶). مرحله دوم روش برنامه‌ریزی پویا و یافتن مقادیر بهینه دوره دوم تولید

a_2 / s	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	$f^*_2(a_2)$	a^*_2
۰	۲/۶۵	۴/۶۱	۴/۵۶	۴/۵۱	۴/۴۵	۳/۶۵	۲/۹۳	۲/۵۸	۲/۵۱	۲/۵۸	۲/۷۲	۲/۵۱	۸
۱	۲/۲۹	۴/۲۴	۴/۱۸	۴/۱۲	۳/۱۴	۲/۴۳	۲/۱۸	۲/۱۷	۲/۲۹	۲/۴۴	-	۲/۱۷	۷
۲	۱/۹۲	۳/۸۵	۳/۷۹	۲/۵۸	۱/۹۴	۱/۷۹	۱/۸۶	۲/۰۰	۲/۱۶	-	-	۱/۷۹	۵
۳	۱/۵۳	۳/۴۶	۱/۹۶	۱/۴۷	۱/۴۴	۱/۵۶	۱/۷۲	۱/۸۹	-	-	-	۱/۴۴	۴
۴	۱/۱۴	۱/۲۷	۱/۰۴	۱/۱۳	۱/۲۸	۱/۴۵	۱/۶۲	-	-	-	-	۱/۰۴	۲
۵	-۱/۵	۰/۶۷	۰/۸۴	۱/۰۱	۱/۱۸	۱/۳۵	-	-	-	-	-	-۱/۵	۰
۶	-۱/۶	۰/۵۷	۰/۷۴	۰/۹۱	۱/۰۸	-	-	-	-	-	-	-۱/۶	۰
۷	-۱/۷	۰/۴۷	۰/۶۴	۰/۸۱	-	-	-	-	-	-	-	-۱/۷	۰
۸	-۱/۸	۰/۳۷	۰/۵۴	-	-	-	-	-	-	-	-	-۱/۸	۰
۹	-۱/۹	۰/۲۷	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-۱/۹	۰
۱۰	-۲/۰	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-۲/۰	۰

جدول (۷). مرحله سوم روش برنامه‌ریزی پویا و یافتن مقادیر بهینه دوره اول تولید

a_1 / s	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	$f_1^*(a_1)$	a_1^*
۰	۲/۵۱	۴/۴۹	۴/۴۴	۴/۴۰	۴/۳۵	۳/۵۸	۲/۹۰	۲/۵۷	۲/۵۰	۲/۵۸	۲/۷۲	۲/۵۰	۸

برای سلول مشخص شده واقع در سطر هفتم جدول، باتوجه به اینکه در حالتی هستیم که تعداد محصولات سالم ابتدای دوره، پنج واحد می‌باشد، بدیهی است باتوجه به احتمالی بودن سلامت هر محصول تولیدی، با تولید دو واحد محصول، به یکی از حالت های ۵، ۶ و یا ۷ منتقل خواهیم شد. پس از محاسبه احتمالات انتقالات مذکور:

$$f_n(s,a_n)=\left(A+ca_n+\sum_{s'}f_{n+1}^*(s')p_{ss'}(a_n)\right)$$
$$=2+2\times 0.25-1.5\times 0.04$$
$$-1.6\times 0.32-1.7\times 0.64=0.84$$

در گام دوم روش بازگشتی و برمبنای ستون $f_3^*(a_3)$ در جدول (۵)، محاسبات مشابه برای دوره دوم تصمیم‌گیری انجام و نتایج آن در جدول (۶) ارائه شده است. با مبنا قرار دادن مقادیر ارزش بهینه حالات در این جدول و با رویکرد مشابه گام دوم، محاسبات مربوط به تنها حالت دوره اول نیز انجام و نتایج آن در جدول (۷) آمده است.

۵-۳. تفسیر جداول محاسبات و تعیین سیاست بهینه

باتوجه به مقادیر بهینه در هریک از جداول فوق (یعنی مقادیر ستون‌های دوم جداول از راست)، سیاست بهینه تولید برای مسأله تحت بررسی مشخص خواهد شد. بدین منظور، جداول تهیه شده را از انتها به ابتدا یعنی از جدول (۷) به جدول (۵) بررسی می‌کنیم. باتوجه به جدول اخیر، اقدام بهینه دوره اول، تولید ۸ واحد محصول می‌باشد. بنابراین در دوره اول، تعداد ۸ واحد محصول تولید می‌کنیم. بسته به اینکه چه تعداد از این محصولات سالم باشد، در حالت مشخصی از حالات بررسی شده‌ی جدول قبلی (جدول (۶)) قرار خواهیم گرفت. برای حالت مذکور و به‌کمک جدول مربوطه مقدار بهینه تولید (اقدام بهینه دوره دوم) را مشخص می‌نماییم. با رویکرد مشابه آنچه گفته شد، اقدام بهینه دوره سوم نیز تعیین خواهد شد.

۶. تحلیل نتایج

به‌دلیل تنوع بالای مسائل حوزه برنامه‌ریزی تولید و همچنین چالش‌های مربوط به مواجهه با موضوع عدم قطعیت در این دسته از مسائل، مدل‌های متنوعی نیز در این زمینه ارائه شده است. محققین، در هریک از این مدل‌ها به‌گونه‌ای در تلاش برای دستیابی به یک سیاست بهینه در شرایط خاص هر مسأله هستند که اغلب امکان تعمیم آن به سایر مسائل و شرایط به‌سادگی امکان‌پذیر نمی‌باشد. ماهیت عمومی مسأله ارائه شده در پژوهش جاری به‌گونه‌ای است که اگرچه ممکن است نتوان مستقیماً آن را به مسائل و شرایط دیگر تعمیم داد، اما رویکرد مدل‌سازی و حل آن، راه‌گشای طیف وسیعی از مسائل مشابه بوده و با تغییرات اندکی در مدل پایه، امکان پوشش دادن مسائل متنوعی از حوزه تحت بررسی را فراهم نموده است.

در بخش ۵ به‌منظور بررسی کاربرد و اعتبار روش پیشنهادی، یک مثال موردی در ابعاد کوچک، در چارچوب فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی مدل و با بهره‌گیری از رویکرد برنامه‌ریزی پویای تصادفی حل شده و به‌عبارتی سیاست بهینه تولید در افق زمانی مفروض به‌دست آمده است. باتوجه به وابستگی نتایج حل مسأله به پارامترهای مختلف و در راستای بررسی نحوه تأثیر تغییرات این پارامترها، در ادامه ضمن اشاره به تغییرات اعمال شده در پارامترهای مذکور، نتایج حل مسأله به‌ازای هر تغییر بررسی و روند تغییر نتایج گزارش شده است. در تحلیل نتایج سه موضوع اساسی قابل توجه است. این موضوعات مبنای تحلیل و درک خواننده از اعداد و ارقام ارائه شده در جداول و نمودارهای مربوطه می‌باشد:

اول: مبنای تحلیل‌های ارائه شده در این بخش، مثال عددی حل شده در بخش ۵ می‌باشد. به‌منظور بررسی اثر تغییر هریک از پارامترها بر متوسط نرخ هزینه، در هریک از تحلیل‌های ارائه شده، صرفاً همان پارامتر در بازه خاصی تغییر یافته و سایر پارامترها و مقادیر مطابق با جدول ارائه شده برای حل مثال عددی (جدول (۳)) می‌باشد. متوسط نرخ هزینه، از تقسیم مجموع کلیه هزینه‌ها (با علامت مثبت) و درآمدها (با علامت منفی) بر تعداد محصولات سالم تحویل شده به مشتری به‌دست می‌آید.

دوم: همان‌طور که در مثال عددی ارائه شده در بخش ۵ نیز مشهود است، باتوجه به اینکه تابع هدف اصلی مسأله در قالب حداقل کردن هزینه تعریف شده است، همواره هزینه‌ها با علامت مثبت و درآمدها با علامت منفی در معادلات و محاسبات اعمال شده‌اند. بنابراین چنانچه اجرای تعهدات شرکت موردنظر، منجربه سودآوری شود، مقدار نهایی هزینه منفی خواهد بود. بر همین اساس نرخ‌های هزینه محاسبه شده در این بخش، الزاماً معادل میزان هزینه لازم برای تولید هر واحد محصول نبوده و بسته به علامت نرخ مذکور نشان دهنده هزینه و یا سود ناشی از تولید هر واحد محصول می‌باشد.

سوم: بعد از اعمال تغییرات در هریک از پارامترهای تأثیرگذار در نرخ هزینه تولید و به‌منظور برآورد نرخ مذکور، اقدام بهینه یا همان میزان تولید محصول در دوره اول از نتایج حل مدل به‌راحتی قابل تشخیص است. اما در واقعیت و در حین تصمیم‌گیری برای تعیین اقدام بهینه در دوره دوم، این اقدام، مشروط به تعیین تعداد محصول سالم تولید شده در دوره اول می‌باشد. همان‌طور که از جدول (۶) (مرحله دوم مثال عددی) پیداست، حل مسأله از روش برنامه‌ریزی پویای تصادفی، اقدامات بهینه را به‌ازای کلیه حالات ممکن ارائه کرده و اینکه در ابتدای دوره مذکور در چه حالتی قرار داریم، مشروط به انجام عملیات تولید در دنیای واقعی و تعیین تعداد محصولات سالم تولید شده در دوره اول می‌باشد. به‌منظور رفع این چالش، با بهره‌گیری از مفاهیم و اصول

شبیه‌سازی، رویکرد زیر برای ایجاد امکان تحلیل و مقایسه نتایج تغییرات پارامترها اتخاذ شده است.

نخست، مدل را با اعمال تغییرات لازم در پارامتر تحت بررسی در کد مربوطه حل و اقدام بهینه (تعداد بهینه تولید) در دوره اول تعیین شده است. سپس با ضرب این تعداد در احتمال تولید محصول سالم، حالت محتمل برای دوره دوم، تعیین می‌شود. با تکرار عملیات مشابه برای دوره دوم و با تجمیع محصولات تولید شده در دوره‌های اول و دوم، حالت محتمل در دوره سوم نیز تعیین و مجدداً با تکرار عملیات انجام شده در دوره دوم برای دوره سوم، متوسط تعداد محصول سالم تحویل شده به مشتری برآورد شده است. در هر دوره و در مسیر انجام عملیات مذکور، چنانچه اقدام بهینه برای حالات برآورد شده معادل صفر باشد، هزینه راه‌اندازی لحاظ نشده و در غیر این صورت این هزینه در محاسبات مربوطه اعمال شده است. نکته قابل توجه اینکه، ضرب احتمال سالم بودن هر محصول در تعداد محصولات تولید شده، منجربه تولید اعداد صحیح نخواهد شد. به‌همین منظور چنانچه ارقام اعشار عدد به‌دست آمده کمتر از ۰/۵ بوده باشد، عدد به‌سمت عدد صحیح کوچکتر و در غیر این صورت به‌سمت عدد صحیح بزرگتر گرد شده است.

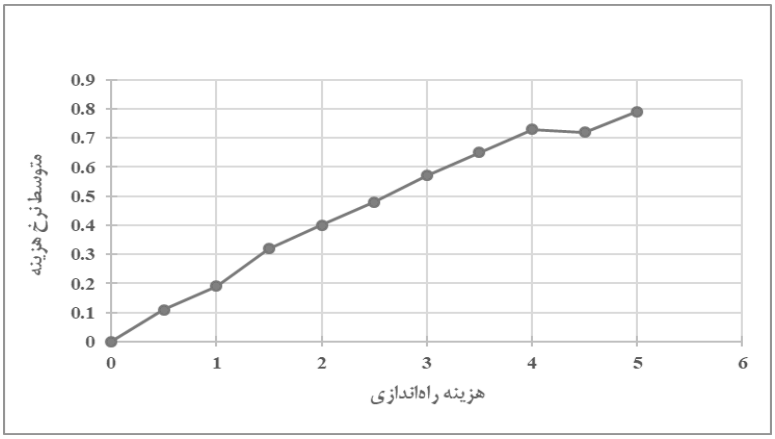
در این بخش و برمبنای رویکرد فوق‌الاشاره، تغییرات نرخ هزینه تولید هر واحد محصول بر اثر تغییر سایر پارامترها شامل تغییرات هزینه راه‌اندازی، تغییرات احتمال تولید محصولات سالم، تغییرات سقف مجاز تولید در هر دوره و همچنین تغییرات هزینه تولید هر واحد محصول مورد بررسی قرار گرفته و چگونگی اثرگذاری هر پارامتر در متوسط نرخ هزینه و روند تغییرات این نرخ مورد بررسی قرار گرفته است.

۶-۱. بررسی تغییرات متوسط نرخ هزینه تولید هر واحد محصول در اثر تغییرات هزینه راه‌اندازی

باتوجه به آنچه که پیشتر درخصوص متوسط نرخ هزینه تولید هر واحد محصول بیان شد، اثر تغییرات هزینه راه‌اندازی (پارامتر A) بر روی این نرخ بررسی و نتایج محاسبات مربوطه در جدول (۸) ارائه شده است. نتایج حاکی از آنست که در شرایط مثال ارائه شده در این پژوهش و با فرض ثبات سایر پارامترها، در حالت کلی با افزایش هزینه راه‌اندازی، متوسط نرخ هزینه تولید هر واحد محصول افزایش یافته و امید اینکه اجرای تعهدات شرکت منجربه سودآوری شود، کاهش می‌یابد. اگرچه افزایش متوسط تعداد محصولات تحویل شده به مشتری منجربه کاهش هزینه‌ها می‌شود، هزینه‌های مربوط به تولید محصولات به‌دلیل عدم سلامت کامل همه محصولات تولیدی، غالب بوده و روند کلی حاکی از افزایش متوسط نرخ هزینه می‌باشد. روند تغییرات متوسط نرخ هزینه به‌ازای تغییرات هزینه راه‌اندازی، در شکل (۲) نشان داده شده است.

جدول (۸). بررسی تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات هزینه راه‌اندازی

ردیف	هزینه راه‌اندازی	اقدام بهینه در دوره اول (تعداد بهینه تولید محصول)	متوسط محصولات تولیدی	متوسط دفعات راه‌اندازی	متوسط تعداد محصولات سالم نهایی	متوسط هزینه کل	متوسط نرخ هزینه (هزینه واحد محصول)
۱	۰	۵	۶	۲	۵	۰	۰
۲	۰/۵	۷	۷	۱	۶	+۰/۶۵	+۰/۱۱
۳	۱	۷	۷	۱	۶	+۱/۱۵	+۰/۱۹
۴	۱/۵	۸	۸	۱	۶	+۱/۹	+۰/۳۲
۵	۲	۸	۸	۱	۶	+۲/۴	+۰/۴
۶	۲/۵	۸	۸	۱	۶	+۲/۹	+۰/۴۸
۷	۳	۸	۸	۱	۶	+۳/۴	+۰/۵۷
۸	۳/۵	۸	۸	۱	۶	+۳/۹	+۰/۶۵
۹	۴	۸	۸	۱	۶	+۴/۴	+۰/۷۳
۱۰	۴/۵	۹	۸	۱	۷	+۵/۰۵	+۰/۷۲
۱۱	۵	۹	۸	۱	۷	+۵/۵۵	+۰/۷۹



شکل (۲). نمودار تغییرات متوسط نرخ هزینه به‌ازای افزایش هزینه راه‌اندازی

۶-۲. بررسی تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات احتمال تولید محصولات سالم

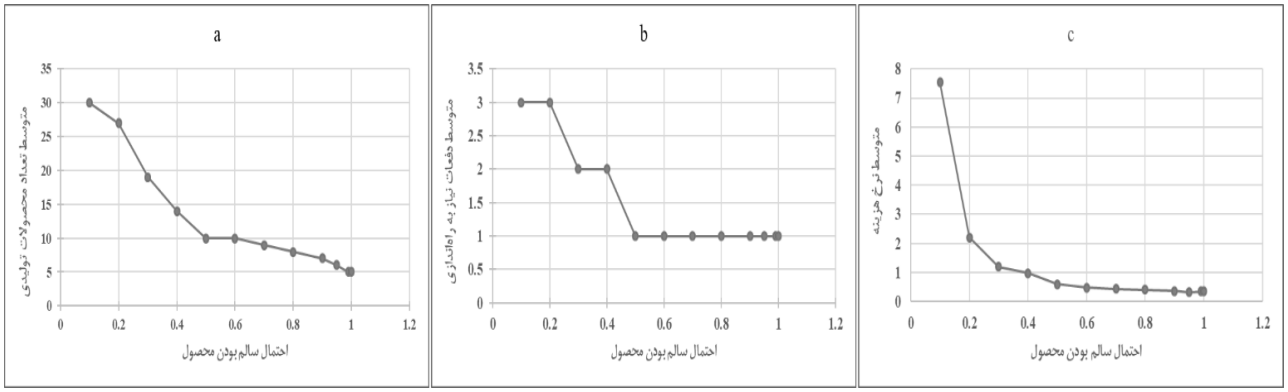
کاهش هزینه‌های تولید همزمان با افزایش احتمال تولید محصولات سالم، امری منطقی و بدیهی به‌نظر می‌رسد. به‌منظور حصول اطمینان از اعتبار مدل و نتایج ارائه شده، این موضوع مورد بررسی قرار گرفته و نتایج بررسی‌ها و محاسبات درجدول (۹) ارائه شده است. همان‌طور که پیداست، با افزایش احتمال تولید محصولات سالم، متوسط نرخ هزینه تولید هر واحد محصول، کاهش یافته و شرکت می‌تواند با انجام تعدیلات لازم در سایر پارامترهای تأثیرگذار در این نرخ، به ایجاد امکان سودآوری در اجرای تعهد عنوان شده در بخش بیان مسأله، امیدوار باشد. با افزایش احتمال تولید محصولات سالم، متوسط تعداد محصولات تولید شده و همچنین متوسط تعداد دفعات نیاز به راه‌اندازی مجدد کاهش می‌یابد.

این نتیجه نیز با منطق ذهنی سازگار بوده و مبین این موضوع است که هرچه احتمال معیوب بودن محصول، کمتر باشد، به‌طور متوسط، ریسک تأمین محصولات تعهد شده، کمتر بوده و برای حصول اطمینان از تحقق این امر، نیاز به تولید محصولات اضافی، کمتر و کمتر می‌شود. **تفسیر تفاوت قابل توجه اعداد ردیف اول و دوم در ستون آخر جدول شماره (۹)**: در حالتی‌که احتمال تولید محصولات سالم، خیلی کم و معادل ۰/۱ است، گرچه احتمال اجرای تعهدات صفر نمی‌باشد، اما با فرض تکرار فرآیند، به‌طور متوسط، امکان اجرای تعهدات (تولید ۵ محصول سالم) وجود نداشته و اعمال جرائم کمبود محصولات در انتهای دوره سوم، نرخ هزینه را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش داده است.

نمودار تغییرات متوسط محصولات تولید شده، متوسط دفعات نیاز به راه‌اندازی و متوسط نرخ هزینه در شکل (۳) نمایش داده شده است.

جدول (۹). بررسی تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات احتمال تولید محصولات سالم

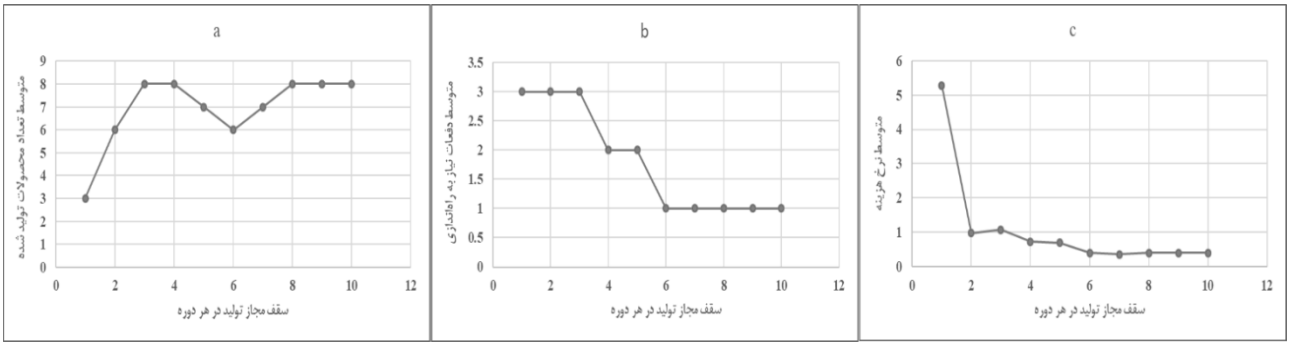
ردیف	احتمال تولید محصول سالم	اقدام بهینه در دوره اول	متوسط محصولات تولید شده	متوسط دفعات راه‌اندازی	متوسط تعداد محصولات سالم نهایی	متوسط هزینه کل	متوسط نرخ هزینه
۱	۰/۱	۱۰	۳۰	۳	۳	+۲۲/۶	+۷/۵۳
۲	۰/۲	۱۰	۲۷	۳	۵	+۱۱/۰۵	+۲/۲۱
۳	۰/۳	۱۰	۱۹	۲	۶	+۷/۱۵	+۱/۱۹
۴	۰/۴	۱۰	۱۴	۲	۶	+۵/۹	+۰/۹۸
۵	۰/۵	۱۰	۱۰	۱	۵	+۳	+۰/۶
۶	۰/۶	۱۰	۱۰	۱	۶	+۲/۹	+۰/۴۸
۷	۰/۷	۹	۹	۱	۶	+۲/۶۵	+۰/۴۴
۸	۰/۸	۸	۸	۱	۶	+۲/۴	+۰/۴
۹	۰/۹	۷	۷	۱	۶	+۲/۱۵	+۰/۳۶
۱۰	۰/۹۵	۶	۶	۱	۶	+۱/۹	+۰/۳۲
۱۱	۰/۹۹	۵	۵	۱	۵	+۱/۷۵	+۰/۳۵
۱۲	۱	۵	۵	۱	۵	+۱/۷۵	+۰/۳۵



شکل (۳). a) نمودار تغییرات متوسط تعداد محصول تولیدی/ b) نمودار تغییرات متوسط دفعات راه‌اندازی/ c) نمودار تغییرات متوسط نرخ هزینه به‌ازای تغییرات احتمال سالم بودن محصولات تولیدی

جدول (۱۰). بررسی تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات سقف مجاز تولید در هر دوره

ردیف	سقف مجاز تولید در هر دوره	توصیف کلی پارامتر سقف تولید	اقدام بهینه دوره اول	متوسط محصولات تولیدی	متوسط دفعات راه‌اندازی	متوسط محصولات سالم	متوسط هزینه کل	نرخ هزینه
۱	۱	کمتر از کل تقاضا	۱	۳	۳	۳	+۱۵/۸۵	+۵/۲۸
۲	۲	کمتر از کل تقاضا	۲	۶	۳	۶	+۵/۹	+۰/۹۸
۳	۳	کمتر از کل تقاضا	۳	۸	۳	۶	+۶/۴	+۱/۰۷
۴	۴	کمتر از کل تقاضا	۴	۸	۲	۶	+۴/۴	+۰/۷۳
۵	۵	معادل کل تقاضا	۵	۷	۲	۶	+۴/۱۵	+۰/۶۹
۶	۶	بیشتر از کل تقاضا	۶	۶	۱	۵	+۲	+۰/۴
۷	۷	بیشتر از کل تقاضا	۷	۷	۱	۵	+۲/۱۵	+۰/۳۶
۸	۸	بیشتر از کل تقاضا	۸	۸	۱	۶	+۲/۴	+۰/۴
۹	۹	بیشتر از کل تقاضا	۸	۸	۱	۶	+۲/۴	+۰/۴
۱۰	۱۰	بیشتر از کل تقاضا	۸	۸	۱	۶	+۲/۴	+۰/۴



شکل (۴). a) نمودار تغییرات متوسط تعداد محصول تولیدی/ b) نمودار تغییرات متوسط دفعات راه‌اندازی/ c) نمودار تغییرات متوسط نرخ هزینه به‌ازای تغییرات سقف مجاز تولید در هر دوره

۶-۳. بررسی تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات سقف مجاز تولید در هر دوره

با فرض اینکه کلیه محصولات تولیدی در هر دوره سالم باشد، چنانچه مجموع مقادیر مجاز تولید در همه دوره‌ها، کمتر از مقدار تعهد شرکت باشد، امکان تأمین تعداد محصول سفارش داده شده و به‌عبارتی اجرای تعهد شرکت وجود نخواهد داشت. این مشکل در صورت امکان تولید محصولات معیوب، حادتر خواهد شد. نرخ هزینه بالا در ستون آخر و ردیف ۱ جدول (۱۰)، مؤید همین موضوع می‌باشد. محدودیت در تعداد محصولات تولیدی در هر دوره، احتمال نیاز به تولید در تعداد دوره بیشتری را افزایش داده و متعاقب آن هزینه‌های راه‌اندازی بیشتری به سیستم تحمیل خواهد شد. با افزایش سقف تولید مجاز در هر دوره، روند کلی تغییرات نرخ هزینه، کاهشی بوده و از مقدار ۸ به بعد (ردیف ۸ ستون دوم جدول (۱۰))، افزایش سقف مجاز تولید در هر دوره، تأثیری بر متوسط تعداد محصولات تولید شده، متوسط تعداد محصولات سالم تحویل شده به مشتری و متوسط نرخ هزینه تولید محصول نخواهد داشت. نمودار بررسی تغییرات سقف مجاز تولید و اثر آن بر موارد فوق‌الاشاره در شکل (۴) نمایش داده شده است.

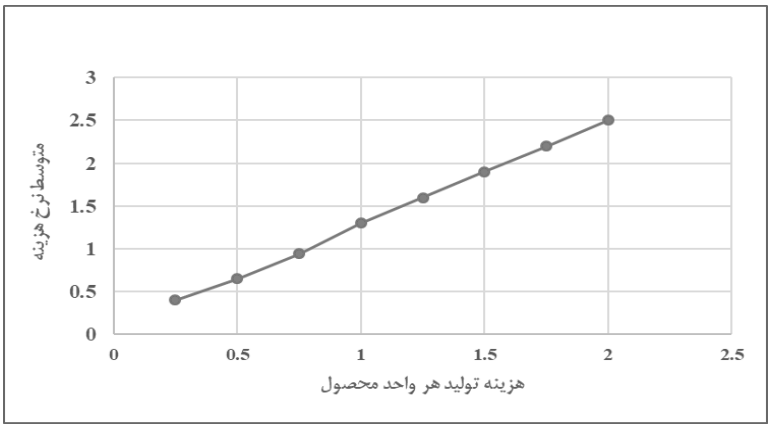
۶-۴. بررسی تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات هزینه تولید هر واحد محصول

تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات هزینه تولید هر واحد محصول، در جدول (۱۱) ارائه شده است. به‌منظور درک صحیح محتویات جدول مذکور، متذکر می‌شود که هزینه تولید هر واحد محصول، صرفاً مربوط به هزینه مفروض برای تولید محصولات است که در جدول (۲) با نماد c معرفی شده و با متوسط نرخ هزینه که از تقسیم مجموع کلیه هزینه‌ها (با علامت مثبت) و درآمدها (با علامت منفی) بر تعداد محصولات سالم تحویل شده به مشتری به‌دست می‌آید، متفاوت می‌باشد. مورد نخست، جزو پارامترهای ورودی مسأله بوده و مورد اخیر در نتیجه حل مسأله تحت بررسی و اعمال هزینه‌های مربوط به تولید، راه‌اندازی، جرائم کمبود و درآمدهای ناشی از فروش محصولات سالم (به میزان تعهد شده و مقادیر فراتر از آن) محاسبه و برآورد شده است.

همان‌طور که از جدول (۱۱) پیداست، به‌مرور و با افزایش هزینه تولید هر واحد محصول، متوسط نرخ هزینه نیز افزایش یافته و امید به سودآور بودن اجرای تعهدات کاهش می‌یابد. اگرچه در بازه درنظر گرفته شده برای تغییرات هزینه، متوسط دفعات نیاز به راه‌اندازی مجدد تغییری نمی‌کند و متوسط تعداد محصول تحویل شده به مشتری کاهش یافته، اما افزایش هزینه تولید هر محصول، پارامتر غالب بوده و افزایش آن منجربه افزایش متوسط نرخ هزینه تولید خواهد شد. لازم به ذکر است آنچه در اینجا نتیجه شده، متأثر از شرایط خاص مسأله و تنظیم سایر پارامترها مطابق جدول (۳) بوده و تغییرات نسبی سایر هزینه‌ها و درآمدهای مفروض، ممکن است روند تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات هزینه تولید را تغییر دهد. برمبنای مفروضات پژوهش جاری، روند تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات هزینه تولید هر واحد محصول، در شکل (۵)، نشان داده شده است.

جدول (۱۱). بررسی تغییرات متوسط نرخ هزینه در اثر تغییرات هزینه تولید هر واحد محصول

ردیف	هزینه تولید هر واحد محصول	اقدام بهینه دوره اول	متوسط تولید	متوسط دفعات راه‌اندازی	متوسط محصولات سالم نهایی	متوسط هزینه کل	نرخ هزینه
۱	۰/۲۵	۸	۸	۱	۶	+۲/۴	+۰/۴
۲	۰/۵	۷	۷	۱	۶	+۳/۹	+۰/۶۵
۳	۰/۷۵	۷	۷	۱	۶	+۵/۶۵	+۰/۹۴
۴	۱	۶	۶	۱	۵	+۶/۵	+۱/۳
۵	۱/۲۵	۶	۶	۱	۵	+۸	+۱/۶
۶	۱/۵	۶	۶	۱	۵	+۹/۵	+۱/۹
۷	۱/۷۵	۶	۶	۱	۵	+۱۱	+۲/۲
۸	۲	۶	۶	۱	۵	+۱۲/۵	+۲/۵



شکل (۵). تغییرات متوسط نرخ هزینه به‌ازای افزایش هزینه تولید هر واحد محصول

۷. جمع‌بندی و پیشنهادات

در مواجهه با بسیاری از مسائل دنیای واقعی، نیاز به تصمیم‌گیری‌های متوالی در مقاطع مختلف وجود دارد. تعریف این مقاطع بسته به ماهیت مسأله تحت بررسی، می‌تواند برمبنای یک بازه زمانی، بروز و تحقق یک یا مجموعه‌ای از شرایط خاص در محیط مسأله و امثال اینها انجام شود. برنامه‌ریزی‌های مرتبط با سیستم‌های تولید کالا و خدمات در زمینه‌های مختلف، ازجمله تولید، نگهداری و تعمیرات، کنترل موجودی و ... از این دسته مسائل به‌شمار می‌روند. وجود خاصیت مارکوفی در این‌گونه مسائل، این امکان را به‌وجود می‌آورد که در هر مقطع، تصمیمات لازم را برمبنای حالت فعلی مشاهده شده در آن مقطع، اتخاذ نمود، بدون اینکه نیازی به بررسی سایر حالات و اقدامات انجام شده تا آن مقطع وجود داشته باشد.

در این پژوهش، نمونه‌ای نسبتاً عمومی از مسائل مرتبط با برنامه‌ریزی تولید در یک سیستم تک‌محصولی ارائه شده که در آن قرار است تقاضای معین مشتری طی چند دوره و با لحاظ کردن محدودیت ظرفیت تولید در هر دوره تأمین شود. وجود احتمال غیرصفر برای تولید محصولات معیوب، ایجاد توازن بین تعداد محصولات تولیدی در هر دوره و تعداد دفعات نیاز به راه‌اندازی مجدد سیستم در کل افق برنامه‌ریزی را با چالش مواجه می‌نماید. مسأله در چارچوب فرآیند تصمیم‌گیری مارکوفی مدل شده و با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی پویای تصادفی حل شده است. حل مثال عددی و تحلیل نتایج آن به تفصیل در بخش ۵ و ۶ ارائه شده است. از مهم‌ترین نتایج به‌دست آمده که مؤید اعتبار مدل ارائه شده نیز می‌باشند، می‌توان به ارتباط مستقیم بین متوسط نرخ هزینه تولید و هزینه راه‌اندازی در هر دوره و همچنین ارتباط مستقیم نرخ مذکور با هزینه تولید هر واحد محصول اشاره نمود. نتایج حاکی از وجود رابطه معکوس بین متوسط نرخ هزینه تولید هر واحد محصول و احتمال تولید محصولات سالم می‌باشد. افزایش سقف مجاز تولید در هر دوره نیز تا مقدار خاصی منجربه کاهش متوسط نرخ هزینه شده و پس از آن، تغییرات سقف مذکور تأثیری بر نرخ مذکور نخواهد داشت. باتوجه به اینکه یکی از پارامترهای اساسی در تعیین متوسط نرخ هزینه، درآمد حاصل از فروش محصولات به مشتری می‌باشد، می‌توان از رویکرد ارائه شده در این پژوهش برای تعیین سطحی از درآمد که منجربه منفی شدن نرخ هزینه و به‌عبارتی سودآور شدن اجرای تعهدات شرکت می‌شود، استفاده نمود.

پژوهش جاری برمبنای یک مسأله با ابعاد نسبتاً کوچک طراحی و ارائه شده است. در راستای توسعه این پژوهش و بهره‌گیری از آن در مسائل با ابعاد بزرگتر، می‌توان از الگوریتم‌های تکرار سیاست[1] و تکرار ارزش[2] برای حل مسأله استفاده نمود. لحاظ کردن هزینه نگهداری

1. Policy iteration

2. Value iteration

موجودی و همچنین تأمین تقاضای تصادفی مشتریان در طول یک افق زمانی بلندمدت و در شرایط خاص این مسأله نیز می‌تواند موضوع پژوهش بعدی محققین در این زمینه بوده و برنامه‌ریزی تولید را در سیستم تحت بررسی به دنیای واقعی نزدیک‌تر کند. در پژوهش دیگری از برخی نویسندگان مقاله جاری، مدل یکپارچه‌ای با درنظر گرفتن موضوعات کیفیت و نگهداری و تعمیرات و با محوریت مفهوم زنجیره مارکوف مورد بررسی قرار گرفته است [۲۵]. اضافه نمودن موضوع برنامه‌ریزی تولید به مفاهیم مذکور و ارائه یک مدل جامع نیز موضوع پیشنهادی بعدی برای پژوهش‌های آتی می‌باشد.

مراجع

[1] Sule, DR. (2007). Production planning and industrial scheduling, New York: CRC press, Taylor & Francis group.

[2] Khaledi, H., Reisi-Nafchi, M. (2012). Dynamic production planning model: a dynamic programming approach, International journal of advanced manufacturing technology, 67, 1675-1681. https://doi.org/10.1007/s00170-012-4600-7

[3] Hadian, S.M., Farughi, H., Rasay, H. (2023). Development of a simulation-based optimization approach to integrate the decisions of maintenance planning and safety stock determination in deteriorating manufacturing systems, Computers & Industrial Engineering,178,109132. https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109132

[۴] ترکمن، سمیه؛ فاطمی قمی، سید محمد تقی. (۱۳۹۵). برنامه‌ریزی تولید چندمرحله‌ای در زنجیره تأمین حلقه بسته همراه با راه‌اندازی‌های وابسته به توالی و انتقال راه‌اندازی، نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، ۲۳۹:۹-۲۵۵. https://doi.org/10.22084/IER.2017.9535.1451

[5] Koopmans, M., Jong, Bd. (2023). Condition-based maintenance and production speed optimization under limited maintenance capacity, Computers & Industrial Engineering,179,109155. https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109155

[6] Moreno, M.S., Montagna, J.M. (2009). A Multiperiod model for production planning and design in a multiproduct batch environment, Mathematical and Computer Modeling, 49, 1372-1385. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.11.004

[7] Li, C., Liu, F., Cao, H., Wang, Q. (2009). A stochastic dynamic programming based model for uncertain production planning of re-manufacturing system, International Journal of Production Research, 47, 3657-3668. http://dx.doi.org/10.1080/00207540701837029

[8] Ceng, Sh., & Nicholson, BE., & Epelman, MA., & Reaume, DJ., & Smith, R.L. (2013). A Dynamic Programming Approach to Achieving an Optimal End-State along a Serial Production Line, IIE Transactions, 45,1278-1292. http://dx.doi.org/10.1080/0740817X.2013.770183

[9] El Ashhab, M. (2016). An Optimization Model for Multi-period Multi-Product Multi-objective Production Planning, International Journal of Engineering & Technology,16,01. https://www.researchgate.net/publication/299345793_An_Optimization_Model_for_Multi-period_Multi-_Product_Multi-objective_Production_Planning.

[10] Hilger, T., Sahling, F., Tempelmeier1, H. (2016). Capacitated dynamic production and remanufacturing planning under demand and return uncertainty, OR spectrum, 38, 849-876. https://doi.org/10.1007/s00291-016-0441-3

[11] Teksan, Z.M., Geunes, J. (2016). Production Planning with Price-Dependent Supply Capacity, IIE Transactions, 48, 938-954. http://dx.doi.org/10.1080/0740817X.2016.1189628

[12] Polotski, V., Kenne, J-P., Gharbi, A. (2017). Set-up and production planning in hybrid manufacturing-remanufacturing systems with large returns, International Journal of Production Research, 55, 3766-3787. http://dx.doi.org/10.1080/00207543.2017.1293863

[۱۳] سعیدی مهرآباد، محمد؛ اعظمی، عادل. (۱۳۹۶). ارائه مدل بهینه‌سازی استوار دو سطحی در برنامه‌ریزی تولید با درنظرگیری تصمیمات قیمت‌گذاری به‌منظور پاسخگویی به تقاضا در فضای رقابتی: مطالعه موردی. نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید،۱۱:۱۷۳-۱۹۱. https://doi.org/10.22084/ier.2017.14338.1655

[14] Radke, A.M., Isa, J.b., Tseng, M.M., Reinhart, G. (2019). A Framework for Production Planning and Control as a Service, IEEE 7th Conference on Systems, Process and Control (ICSPC 2019), Melaka, Malaysia. https://doi.org/10.1109/ICSPC47137.2019.9068097

[15] Awasthi, U., Marmier, R., Grossmann, IE. (2019). Multiperiod optimization model for oilfield production planning: bicriterion optimization and two‐stage stochastic programming model, Optimization and Engineering, 20, 1227-1248. https://doi.org/10.1007/s11081-019-09455-0

[16] Liu, H., & Zhang, J., Cheng, T.E.C., & Ru, Y. (2019). Optimal production-inventory policy for the multi-period fixed proportions co-production system. European Journal of Operational Research, 280, 469-478. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.07.025

[17] Han, J-H., Lee, J-U., Kim, Y-D. (2019). Production planning in a two-level supply chain for production-time-dependent products with dynamic demands, Computers & Industrial Engineering, 135, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.05.036

[18] Maafa, A.D., Sari, L.T, Belkaid, F. (2020). Multi-Periods Production Planning for an Industrial Company, IEEE 13th International Colloquium of Logistics and Supply Chain Management, Morocco. https://doi.org/10.1109/LOGISTIQUA49782.2020.9353897

[19] Guillaume, R., Kasperski, A., Zielinski, P. (2020). Robust production planning with budgeted cumulative demand uncertainty, Optimization letters, 16, 2543-2556. https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.05736

[20] Gomez-Rocha, J.E, Hernandez-Gress, E.S., Rivera-Gomez, H. (2021). Production planning of a furniture manufacturing company with random demand and production capacity using stochastic programming, PLoS One, 16, e0252801. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0252801

[21] Luo, D., Thevenin, S., Dolgui, A. (2022). A state-of-the-art on production planning in Industry 4.0, International Journal of Production Research, 61, 6602-6632. https://doi.org/10.1080/00207543.2022.2122622

[22] Elyasi, M., Altan, B., Ekici, A., Ozener, O.O., Yanıkoglu, I., Dolgui, A. (2023). Production Planning with Flexible Manufacturing Systems under Demand Uncertainty, International Journal of Production Research, 62, 157-170. https://doi.org/10.1080/00207543.2023.2288722

[23] Fornier, Z., Grosso, D., Leclere, V. (2024). Joint production and energy supply planning of an industrial

microgrid, Energy systems. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4330140
[24] Hami, A.E., Radi, B. (2021). Optimizations and Programming. London: Wiley.
[25] Taji, J., Farughi, H., Rasay, H. (2023). An integrated Markov chain model for the economic-statistical design of adaptive multivariate control charts and maintenance planning, European J of Industrial Engineering,17(1):1-28. https://doi.org/10.1504/EJIE.2023.127739.

IERPS Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

ISSN: 2345-2269

Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

Autumn and Winter 2023, Volume 11., No. 23., pp. 121-137
www.ier.basu.ac.ir

DOI: https://dx.doi.org/10.22084/IER.2024.5569

A Stochastic Dynamic Programming Model for Production Systems Planning with the Possibility of Producing Defective Products in a Finite Planning Horizon

Parviz Rahimi Kakehjoob[1], Hiwa Farughi[2*], Hasan Rasay[3]

[1.] PhD student in Industrial Engineering, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran
[2.] Professor Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran
[3.] Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering Management, Kermanshah University of Technology, Kermanshah, Iran

ARTICLE INFO

***Article history*:**

Received 15 October 2023
Accepted 31 January 2024

***Keywords*:**

Markov Decision Process
Stochastic Dynamic Programming
Production Planning
Sequential Decisions

ABSTRACT

Productivity of production systems depends on proper planning in various fields such as production, maintenance and repairs, inventory control, etc. Considering the major and direct impact of the production plan on other fields, it is necessary to prepare this plan with a suitable approach so that the production systems can be properly managed and costs can be reduced as much as possible. Limitations such as the need to supply a certain amount of demand in a certain period of time, the possibility of producing defective products, and the imposition of costs due to frequent system setup, make managers a challenge in providing an accurate plan. In this research, an attempt is made to plan the production process in a multi-period single product system by taking advantage of the Markov decision process and taking into account the above-mentioned constraints. In the following problem, using the stochastic dynamic programming technique, the best possible action will be selected and in other words, the best production volume will be determined for each period. The goal is to determine the volume of production in each period and for different states, in such a way that at the end of the permitted periods of production, the entire demand can be covered with the lowest cost. The effectiveness of the model is examined by solving a numerical example and analysis of the effects of changing parameters on the results of the problem has been presented. The results show that there is a direct relationship between the average cost rate and the costs related to setting up the system and producing each product unit, and the relationship between the said rate and the probability of producing healthy products and the production capacity is inverse. Increasing the production capacity after a certain threshold will not affect the average cost rate.

[*] Corresponding author. H. Farughi
Tel.:087-33660073; E-mail address: h.farughi@uok.ac.ir