

## توسعه شاخص قابلیت فرآیند برای پروفایل خطی ساده در فرآیند دومرحله‌ای

سعید ادیب‌فر<sup>۱</sup>، رسول نورالسنا<sup>۲\*</sup>

۱. دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، گروه صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

۲. استاد گروه صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

### خلاصه

زمانی که فرآیند تحت کنترل آماری باشد، در بسیاری از موارد عملکرد فرآیند از طریق شاخص قابلیت فرآیند ارزیابی می‌شود. مطالعات گسترده‌ای در ارزیابی قابلیت فرآیند زمانی که مشخصه کیفی به صورت تک‌متغیره یا چندمتغیره باشد، انجام شده است. هرچند این روش‌ها در مواردی که مشخصه کیفی به صورت پروفایل بیان شود، کارایی ندارد. پروفایل، رابطه‌ای بین متغیر مستقل و متغیر پاسخ است که می‌تواند به صورت ساده، چندگانه، چندمتغیره، و روابط پیچیده‌تر بیان شود. از سوی دیگر، بسیاری از فرآیندها اعم از تولیدی و خدماتی از چندین مرحله متوالی تشکیل شده‌اند که با عنوان فرآیندهای چندمرحله‌ای شناخته می‌شوند. در این فرآیندها خروجی هر مرحله، به‌عنوان ورودی مرحله بعد در نظر گرفته می‌شود که به آن خاصیت آبخاری گویند. به دلیل وجود خاصیت آبخاری در فرآیندهای چندمرحله‌ای، استفاده از روش‌های معمول آماری ممکن است منجر به نتایج نادرستی شود. در این مطالعه، روشی برای تعیین شاخص قابلیت پروفایل خطی ساده در فرآیند دومرحله‌ای معرفی شده است. این روش از طریق یک مثال مورد بررسی قرار گرفته است که نتایج نشان‌دهنده کارکرد مؤثر روش پیشنهادی است.

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۴۰۰/۱۰/۲۳

پذیرش ۱۴۰۰/۱۲/۱۷

(مقاله پژوهشی)

کلمات کلیدی:

شاخص قابلیت فرآیند

پروفایل خطی ساده

فرآیند چند مرحله‌ای

خاصیت آبخاری

### ۱. مقدمه

در بسیاری از فرآیندهای تولیدی، کیفیت یک محصول به‌وسیله رابطه بین یک یا چند متغیر پاسخ (وابسته) و یک یا چند متغیر توصیفی (مستقل) بیان می‌شود که این رابطه پروفایل نام دارد. پروفایل در کاربردهای عملی به صورت خطی (ساده، چندگانه، چندمتغیره)، چندجمله‌ای و غیرخطی مشاهده شده است. بنا بر مطالعه‌ی وودال و همکاران [۱] پایش پروفایل‌ها در فازهای I و II انجام می‌شود. در فاز I هدف شناسایی پایداری فرآیند و تخمین پارامترهای نامعلوم فرآیند است در صورتی که هدف فاز II شناسایی تغییر در پارامترهای فرآیند در کوتاه‌ترین زمان است. برای پایش پروفایل‌ها در فازهای I و II روش‌های متعددی توسط محققان ارائه شده است که در مطالعه‌ی نورالسنا و همکاران [۲] مورد بررسی قرار گرفته است.

برای ارزیابی عملکرد یک فرآیند، شاخص‌های کیفیتی مختلفی ارائه شده است. شاخص قابلیت فرآیند (PCI) یکی از شاخص‌های پرکاربرد در ارزیابی فرآیند است. PCI نشان می‌دهد که آیا فرآیند قادر به تولید اقلام منطبق در حدود مشخصات فنی است یا خیر. اولین PCI توسط کین [۳] ارائه شد. این شاخص به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} \quad (1)$$

در این رابطه  $\sigma$  انحراف معیار فرآیند است و LSL و USL حدود مشخصات پایین و بالا هستند که الزامات کیفیتی مشتری را نشان می‌دهد.

مطالعات متعددی در تخمین قابلیت فرآیند انجام شده است. کوتز و جانسون [۴] ۱۷۰ مطالعات در مورد PCI مربوط به سال‌های ۱۹۹۲

\* نویسنده مسئول: رسول نورالسنا

تلفن: ۰۲۱-۷۷۲۲۵۰۱۷؛ پست الکترونیکی: [rassoul@iust.ac.ir](mailto:rassoul@iust.ac.ir)

ناحیه فرآیند به ناحیه فرآیند بهبود یافته است. جزء دوم احتمال آن است که میانه فرآیند درون ناحیه تفرانس بهبود یافته قرار گیرد و جزء سوم احتمال آن است که ناحیه فرآیند درون ناحیه تفرانس بهبود یافته قرار گیرد.

پایش قابلیت فرآیند، حوزه‌ی دیگری است که جانعلی پور و همکاران [۲۴] به آن پرداخته‌اند. در این مطالعه، نمودار کنترل برای پایش قابلیت یک فرآیند در تولید محصولات منطبق توسعه داده شده است. در این نمودارها قابلیت یک فرآیند در تولید محصولات منطبق برحسب میانگین و پراکندگی فرآیند رسم و پایش همزمان آن‌ها منجر به در نظر گرفتن اثر متقابل این پارامترها می‌شود. این نمودارها برای توزیع‌های نرمال، لوگ نرمال و ویبول توسعه داده شده است.

از سوی دیگر، بسیاری از فرآیندها در چند مرحله انجام می‌شوند به طوری که خروجی هر مرحله را می‌توان به عنوان ورودی مرحله بعدی در نظر گرفت. این ویژگی که خاصیت آبشاری نام دارد، باعث شده است روش‌هایی برای بررسی فرآیندهای چندمرحله‌ای ارائه شود. رویکرد تعدیل رگرسیونی، مدل انتخاب-علت و مدل فضا-حالت از متداول‌ترین روش‌های مدل‌سازی فرآیندهای چندمرحله‌ای هستند. با توجه به تحقیقات پیشین، قابلیت فرآیند پروفایل‌ها در فرآیند چندمرحله‌ای پیش از این مورد بررسی قرار نگرفته است. بنابراین در مطالعه پیش‌رو به این موضوع پرداخته شده است و قابلیت فرآیند پروفایل خطی ساده در فرآیند دومرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفته است.

ساختار این مطالعه بدین شرح است: توضیحاتی در مورد پروفایل خطی ساده، PCI تک‌متغیره و فرآیندهای چندمرحله‌ای به ترتیب در بخش‌های ۲، ۳ و ۴ ارائه شده است. قابلیت فرآیند پروفایل در فرآیند دومرحله‌ای در بخش ۵ توضیح داده شده است. مثال عددی به منظور ارزیابی روش ارائه شده در بخش ۶ آمده است. نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهاداتی برای ادامه تحقیق نیز در بخش نهایی ارائه شده است.

## ۲. پروفایل خطی ساده

در پروفایل خطی ساده، رابطه‌ی خطی بین یک متغیر پاسخ و یک متغیر مستقل برقرار است. فرض می‌شود  $m$  نمونه تصادفی با اندازه  $n$  از یک فرآیند گرفته می‌شود. در نمونه‌ی  $Z$ ام،  $n$  مقدار برای متغیر توصیفی (مستقل) وجود دارد. زمانی که فرآیند تحت کنترل باشد، پروفایل خطی ساده مطابق با رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$Y_{ij} = A_0 + A_1 X_i + \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m$$

که در آن  $A_{0j}$  و  $A_{1j}$  به ترتیب پارامترهای عرض از مبدأ و شیب هستند. فرض می‌شود خطاها  $\varepsilon_{ij}$  مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\sigma_j^2$  هستند. مقادیر پارامترها در انتهای فاز I برای هر نمونه به صورت  $A_{0j} = A_0$ ،  $A_{1j} = A_1$  و  $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\varepsilon}^2$  در نظر گرفته می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم مقدار  $X_i$  در تمام نمونه‌ها ثابت است.

الی ۲۰۰۰ را مورد بررسی قرار داده‌اند. وو و همکاران [۵] شاخص‌های جدید قابلیت فرآیند در سال‌های ۲۰۰۲ الی ۲۰۰۶ را ارزیابی کرده‌اند. یوم و کیم [۶] دایره‌المعارفی از ادبیات حوزه PCI در فاصله زمانی ۲۰۰۰ الی ۲۰۰۹ تهیه کردند. در یک مطالعه جامع، دفلپ و بندیتو [۷] شاخص‌های تک‌متغیره و چندمتغیره را مورد بررسی قرار داده‌اند. توسعه شاخص قابلیت فرآیند برای پروفایل‌های خطی یکی از پیشنهادات وودال [۸] بوده است. هرچند در سال‌های اخیر مطالعاتی انجام شده است، همچنان این حوزه نیاز به پژوهش دارد. حسینی فرد و عباسی [۹] PCI برای پروفایل‌های خطی براساس نسبت اقلام نامنطبق ارائه کرده‌اند. در یک مطالعه دیگر، حسینی فرد و عباسی [۱۰] پنج روش را برای تخمین PCI‌های غیرنرمال برای پروفایل‌های خطی بررسی و مقایسه کرده‌اند. نعمتی کشتلی و همکاران [۱۱] روشی تابعی ارائه کرده‌اند که از یک پروفایل مرجع، حدود مشخصات تابعی و حدود تفرانس طبیعی تابعی بهره می‌برد و در هر یک از سطوح متغیر توصیفی، کارایی فرآیند محاسبه می‌شود. در مطالعه عبادی و شهریاری [۱۲] دو روش برای محاسبه شاخص قابلیت فرآیند برای پروفایل خطی ساده ارائه شده است. روش اول محاسبه درصد اقلام نامنطبق و روش دوم ارائه برداری برای محاسبه پراکندگی، مرکزیت و موقعیت فرآیند در بازه حدود مشخصات است. ونگ [۱۳-۱۴] شاخص‌هایی برای اندازه‌گیری بازدهی فرآیند در پروفایل خطی ساده ارائه کرده است. ونگ و تامیرات [۱۵] نیز شاخصی برای محاسبه بازدهی فرآیند برای پروفایل‌های خطی با در نظر گرفتن خودهمبستگی درون پروفایل توسعه داده‌اند. پاکزاد و همکاران [۱۶] شاخص قابلیت تابعی برای پروفایل خطی ساده تعریف کرده‌اند به طوری که مقدار هدف و حدود مشخصات متغیر پاسخ به صورت فازی در نظر گرفته شده است. پاکزاد و بصیری [۱۷] شاخص کارایی برای پروفایل خطی ساده با حدود تفرانس نامتقارن ارائه کرده‌اند. تعریف شاخص قابلیت فرآیند استوار برای پروفایل‌های خطی چندگانه توسط مهری و همکاران [۱۸] انجام شده است. در این مطالعه از برآوردکننده  $M$  و برآوردکننده  $\tau$  سریع استفاده شده است.

علاوه بر پروفایل‌های خطی نرمال، توسعه شاخص قابلیت فرآیند برای پروفایل‌های غیرنرمال و غیرخطی نیز در سال‌های اخیر توسط برخی از نویسندگان صورت پذیرفته است. آلیوزاکس و همکاران [۱۹] روشی برای محاسبه قابلیت فرآیند برای پروفایل پواسون براساس شاخص  $S_{pmk}$  ارائه کرده‌اند. آلیوزاکس و همکاران [۲۰] در مطالعه دیگری شاخص‌های  $G_p$  و  $S_{pmk}$  را برای پروفایل لجستیک با استفاده از توابع پیوند متفاوت مقایسه کرده‌اند. آلیوزاکس و کوکووینوس [۲۱] شاخص قابلیت فرآیند برای پروفایل گاما براساس شاخص  $S_{pmk}$  ارائه کرده‌اند. در مطالعه محمدپور و همکاران [۲۲] شاخص‌های قابلیت تابعی برای پروفایل‌های غیرخطی ارائه شده است؛ بر این اساس، حدود مشخصات، میانگین و حدود تفرانس طبیعی به صورت غیرخطی در نظر گرفته شده است. گووارا و لویز [۲۳] بردار سه جزئی قابلیت فرآیند برای پروفایل‌های غیرخطی چندمتغیره ارائه کرده‌اند. جزء اول، نسبت

### ۳. شاخص قابلیت فرآیند تک‌متغیره

قابلیت فرآیند یکی از مفاهیم مهم در حوزه کنترل آماری فرآیند (SPC) است. یک فرآیند وقتی کارا است که به‌طور مداوم محصولات داخل تolerانس‌های مجاز تولید کند. زمانی که تنها یک مشخصه کیفی وجود داشته باشد، از تکنیک‌های قابلیت فرآیند تک‌متغیره استفاده می‌شود. چهار شاخص تک‌متغیره که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از  $C_p$ ،  $C_{pk}$ ،  $C_{pm}$ ،  $C_{pmk}$ ،  $C_{pmk}$  و  $C_{pmk}$  [۲۵] و همکاران [۲۶]. شاخص  $C_{pmk}$  در مقایسه با سایر شاخص‌های تک‌متغیره کامل‌تر بوده و تغییرپذیری و نزدیکی به مقدار هدف را در نظر می‌گیرد و در این مطالعه مورد استفاده قرار گرفته است. شاخص  $C_{pmk}$  مطابق با رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$C_{pmk} = \min \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}, \frac{\mu - LSL}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \right\} \quad (3)$$

که  $USL$  و  $LSL$  حدود مشخصات پایین و بالا،  $T$  مقدار هدف،  $\mu$  میانگین فرآیند و  $\sigma^2$  واریانس فرآیند است. مقدار هدف را می‌توان میانگین حدود مشخصات به‌صورت  $\frac{USL+LSL}{2}$  در نظر گرفت.

### ۴. فرآیند چندمرحله‌ای

در بسیاری از سیستم‌های تولیدی و خدماتی، فرآیند به‌صورت چندمرحله‌ای است به‌طوری‌که خروجی یک مرحله به‌عنوان ورودی مرحله بعدی در نظر گرفته می‌شود و تغییر در متغیر پاسخ ممکن است برخی یا همه متغیرهای خروجی بعدی را تحت تأثیر قرار دهد. این ویژگی که خاصیت آشناری نام دارد، ویژگی اصلی فرآیندهای چندمرحله‌ای است. با توجه به وجود خاصیت آشناری، به‌کارگیری روش‌های معمول کنترل کیفیت برای فرآیندهای چندمرحله‌ای ممکن است منجر به نتایج نادرستی شود؛ لذا برای بررسی و مدل‌سازی این فرآیندها باید از روش‌های مناسب استفاده شود.

در سال‌های اخیر نمودارهای کنترل در فرآیندهای چندمرحله‌ای توسط محققان توسعه و ارائه شده است؛ هرچند به تحلیل قابلیت در فرآیندهای چندمرحله‌ای به‌ندرت پرداخته شده است. ژانگ [۲۷] دو PCI برای فرآیندهای چندمرحله‌ای معرفی کرده است: (۱) PCI کلی که قابلیت فرآیند در هر مرحله را با در نظر گرفتن تأثیر مراحل قبلی محاسبه می‌کند و (۲) قابلیت فرآیند هر مرحله به‌طور مجزا و به‌گونه‌ای که تأثیر مراحل قبل در آن وجود ندارد. لین و همکاران [۲۸] به این موضوع پرداختند که کاهش تغییرپذیری فرآیند چگونه منجر به افزایش قابلیت در فرآیندهای چندمرحله‌ای می‌شود. چن و همکاران [۲۹] براساس تابع زیان تاگوچی، روشی برای محاسبه PCI برای یک فرآیند پیچیده ماشین‌کاری محصول به‌عنوان یک فرآیند چندمرحله‌ای ارائه کرده‌اند. نیکزاد و همکاران [۳۰] در یک فرآیند دومارحله‌ای، قابلیت فرآیند برای مرحله دوم را محاسبه کرده‌اند به‌طوری‌که اثر خاصیت آشناری از مرحله دوم حذف شده است.

در مطالعات مربوط به فرآیندهای چندمرحله‌ای، عموماً مشخص

کیفی به‌صورت تک‌متغیره و یا چندمتغیره در نظر گرفته شده است، درحالی‌که ممکن است مشخصه کیفی به‌صورت پروفایل در فرآیند چندمرحله‌ای حضور داشته باشد. قهپازی و همکاران [۳۱] برای اولین بار پروفایل را در فرآیند چندمرحله‌ای مورد بررسی قرار داده و روشی برای پایش پروفایل خطی ساده در فرآیند چندمرحله‌ای در فاز II ارائه کردند.

در مطالعه پیش‌رو از رویکرد انتخاب-علت که توسط ژانگ [۳۲] مطرح شده استفاده شده است. مبنای این رویکرد تحلیل باقیمانده‌ها در فرآیندهای چندمرحله‌ای است، چراکه خاصیت آشناری روی باقیمانده‌ها تأثیری ندارد و از این طریق می‌توان وضعیت عملکرد هر مرحله را به‌طور مجزا در نظر گرفت. در بخش بعدی، روش پیاده‌سازی این رویکرد در فرآیند دومارحله‌ای به‌طور کامل تشریح داده شده است.

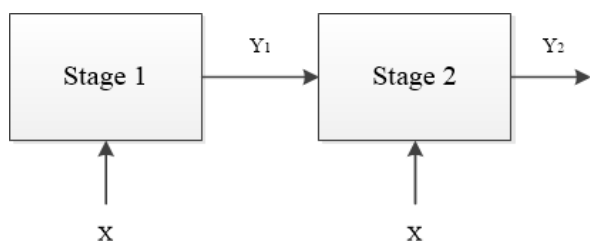
### ۵. مدل پیشنهادی

به‌منظور مدل‌سازی پروفایل در فرآیندهای چندمرحله‌ای، فرض می‌شود در هر مرحله  $m$  نمونه با اندازه  $n$  وجود دارد. برای نمونه  $j^{th}$  مشاهدات به‌صورت  $(X_{i,j,s}, Y_{i,j,s})$  در نظر گرفته می‌شود که در آن  $s = 1, 2, \dots, m$  و  $j = 1, 2, \dots, m$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$  است. قهپازی و همکاران [۳۱] مدل ذیل را جهت بررسی پروفایل در فرآیند چندمرحله‌ای معرفی کرده‌اند:

$$Y_{i,j,1} = A_{0,1} + A_{1,1}X_{i,j,1} + \varepsilon_{i,j,1} \quad (4)$$

$$Y_{i,j,2} = \varphi Y_{i,j,1} + A_{0,2} + A_{1,2}X_{i,j,2} + \varepsilon_{i,j,2}$$

که در آن  $A_{0,s}$  و  $A_{1,s}$  ( $s = 1, 2$ ) پارامترهای عرض از مبدأ و شیب در مرحله  $s$ ،  $\varepsilon_{i,j,s}$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع  $N(0, \sigma_{\varepsilon,s}^2)$  هستند.  $\varphi$  به‌عنوان ضریب خودهمبستگی بین مراحل فرآیند در نظر گرفته می‌شود. همچنین فرض می‌شود متغیر توصیفی برای نمونه‌ها ( $j$ ) در تمام مراحل ( $s$ ) یکسان باشد، به‌عبارت دیگر  $X_{i,j,s} = X_i$  شماتیک فرآیند چندمرحله‌ای در مدل رابطه (۴) در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱): شماتیک فرآیند دومارحله‌ای

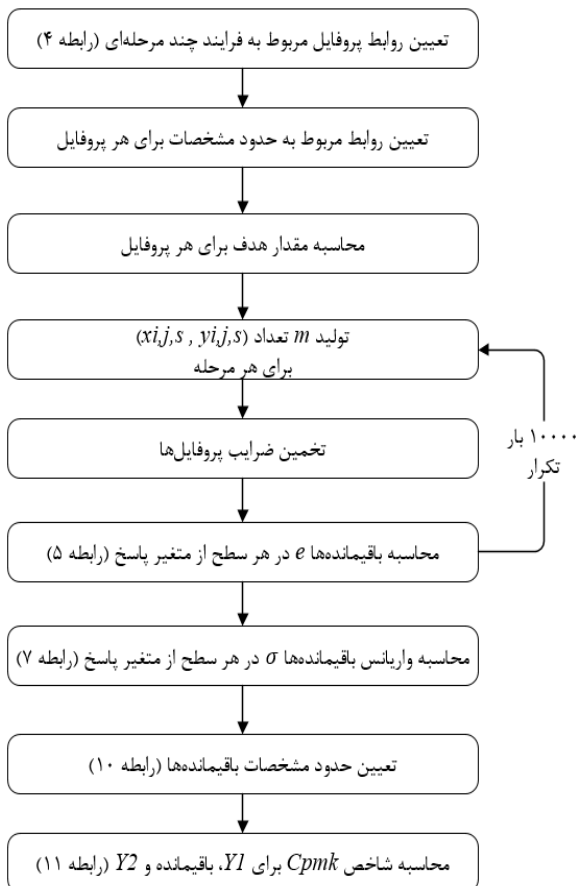
با در نظر گرفتن رابطه شاخص قابلیت فرآیند (رابطه (۳)) و با توجه به مدل پروفایل در فرآیندهای چندمرحله‌ای (رابطه (۴))، PCI برای مرحله اول ( $Y_1$ ) و PCI کلی ( $Y_2$ ) حاصل می‌شود. نکته حائز اهمیت آنست که  $Y_2$  تحت تأثیر مرحله اول است و عملکرد مرحله دوم را به‌تنهایی نشان نمی‌دهد. بنابراین برای بررسی عملکرد مرحله دوم به‌تنهایی، لازم است تأثیر مرحله اول حذف شود.

نیایکی [۳۳] استفاده شده است. پروفایل خطی ساده در یک فرآیند دومرحله‌ای به صورت ذیل تعریف شده است:

$$Y_{i,j,1} = 3 + 2X_i + \varepsilon_{i,j,1} \quad (۱۲)$$

که  $\varepsilon_{i,j,1} \sim N(0, \sigma_1^2)$ ،  $\varepsilon_{i,j,2} \sim N(0, \sigma_2^2)$  و  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$  در این مثال، متغیر توصیفی  $X_i$  با چهار مقدار ثابت ۲، ۴، ۶ و ۸ در نظر گرفته شده است. فرض می‌شود حدود مشخصات برای پروفایل مرحله ۱ به صورت  $USL_1 = 6.02 + 2X_i$  و  $LSL_1 = 0.0012 + 2X_i$  و حدود مشخصات پروفایل مرحله ۲ به صورت  $USL_2 = 8.73 + 2.8X_i$  و  $LSL_2 = 0.683 + 2.8X_i$  است.

شاخص  $C_{pmk}$  براساس ۱۰۰۰۰ با تکرار و با فرض  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$  و  $m = 25$  محاسبه شده است. در جداول پیش‌رو  $b_{0-1}$  و  $b_{1-1}$  به ترتیب عرض از مبدأ و شیب پروفایل در مرحله ۱ و  $b_{0-2}$  و  $b_{1-2}$  به ترتیب عرض از مبدأ و شیب پروفایل در مرحله ۲ هستند. الگوریتم محاسبه شاخص قابلیت فرآیند پروفایل خطی ساده در فرآیند دومرحله‌ای مطابق با شکل (۲)، در نظر گرفته شده است.



شکل (۲): الگوریتم گام‌به‌گام محاسبه شاخص کارایی فرآیند

در جدول (۱)، تأثیر اندازه نمونه بر PCI بررسی شده است. مطابق با نتایج به دست آمده، با افزایش اندازه نمونه، قابلیت فرآیند در هر مرحله و قابلیت فرآیند کل افزایش می‌یابد.

در رویکرد انتخاب-علت با استفاده از باقیمانده‌ها، عملکرد هر مرحله بدون تأثیر مراحل قبل مورد بررسی قرار می‌گیرد. بنابراین شاخص قابلیت فرآیند برای باقیمانده‌ها در مرحله دوم، می‌تواند عملکرد این مرحله را نشان دهد. در هر سطح متغیر پاسخ (i)، باقیمانده‌ها در مرحله ۲ به کمک رابطه (۵) محاسبه می‌شود:

$$e_{i,j,2} = Y_{i,j,2} - \hat{Y}_{i,j,2} \quad (۵)$$

که  $\hat{Y}_{i,j,2}$  مقدار برازش شده‌ی  $Y_{i,j,2}$  است.  $\hat{Y}_{i,j,2}$  از طریق رابطه (۶) محاسبه می‌شود.

$$\hat{Y}_{i,j,2} = Y_{i,j,1}\phi + X_i A_{i,2} \quad (۶)$$

که  $A_{i,2}$  ضرایب پارامترهای شیب و عرض از مبدأ در مرحله ۲ را نشان می‌دهد. واریانس باقیمانده‌ها از رابطه (۷) قابل محاسبه است:

$$\sigma_{ei}^2 = \frac{\sum_{j=1}^m (Y_{i,j,2} - \hat{Y}_{i,j,2})^2}{m-2} = \frac{\sum_{j=1}^m e_{i,j,2}^2}{m-2} \quad (۷)$$

حال برای محاسبه PCI باقیمانده‌ها، لازم است حدود مشخصات باقیمانده‌ها تعیین شود. برای تعیین حدود مشخصات باقیمانده‌ها، از مفهوم بازدهی فرآیند ( $PY^1$ ) استفاده می‌شود. ونگ [۱۳] بازدهی فرآیند را به صورت رابطه (۸) تعریف کرده است:

$$PY_{ei} = P\{LSL_{ei} \leq \varepsilon \leq USL_{ei}\} \quad (۸)$$

با فرض اینکه میانگین باقیمانده‌ها برابر با صفر به عنوان مقدار هدف و بازدهی فرآیند باقیمانده‌ها ( $PY_{ei}$ ) برابر با ۰.۹۹۷۳ باشد، داریم [۳۰]:

$$PY_{ei} = P\{LSL_{ei} \leq \varepsilon \leq USL_{ei}\} = P\left\{\frac{LSL_{ei} - \mu_{ei}}{\sigma_{ei}} \leq z \leq \frac{USL_{ei} - \mu_{ei}}{\sigma_{ei}}\right\} = 0.9973 \quad (۹)$$

که  $\frac{USL_{ei} - \mu_{ei}}{\sigma_{ei}} = \phi^{-1}(0.99865)$  و  $\frac{LSL_{ei} - \mu_{ei}}{\sigma_{ei}} = \phi^{-1}(0.00135)$  است. بنابراین حدود مشخصات برابرست با:

$$USL_{ei} = \sigma_{ei} \phi^{-1}(0.99865) \quad (۱۰)$$

$$LSL_{ei} = \sigma_{ei} \phi^{-1}(0.00135)$$

که  $\phi^{-1}(\cdot)$  تابع توزیع تجمعی معکوس توزیع نرمال استاندارد است. با تعیین حدود مشخصات باقیمانده‌ها، قابلیت فرآیند مرحله دوم نیز به تنهایی قابل محاسبه است.

باتوجه به اینکه متغیر پاسخ دارای  $n$  سطح است، شاخص قابلیت فرآیند (در هر مرحله و به صورت کلی) از رابطه (۱۱) محاسبه می‌شود:

$$C_{pmk-\tau} = \left[ \prod_{i=1}^n C_{pmk-\tau i} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (۱۱)$$

که در آن  $C_{pmk-\tau}$  شاخص قابلیت فرآیند برای مرحله ۱، مرحله ۲ و قابلیت فرآیند کل را نشان می‌دهد.

## ۶. مثال عددی

در این بخش، عملکرد روش پیشنهادی از طریق یک مثال عددی با کمک نرم‌افزار MATLAB نشان داده شده است (در صورت نیاز به اطلاعات بیشتر در مورد شبیه‌سازی و کدهای مربوطه، با نویسنده مسئول مکاتبه شود). بدین منظور از مثال مربوط به مطالعه خدمتی و

جدول (۱): مقدار PCI برای متغیرهای پاسخ و پارامترها در هر

مرحله	m			
	۲۵	۵۰	۱۰۰	۲۰۰
$C_{pmk-Stage1}$	۰/۹۵۴۶	۰/۹۶۴۸	۰/۹۷۸۸	۰/۹۸۴۴
$C_{pmk-Stage2}$	۰/۹۶۳۳	۰/۹۶۶۹	۰/۹۷۰۵	۰/۹۷۲۳
$C_{pmk-Total}$	۰/۹۴۷۹	۰/۹۵۹۸	۰/۹۷۰۹	۰/۹۷۹۲

در جدول (۲)، قابلیت فرآیند به‌ازای مقادیر مختلف واریانس خطاها ( $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$ ) بررسی شده است. باتوجه به نتایج تحلیل حساسیت، با کاهش  $\sigma_1^2$ ، قابلیت فرآیند افزایش پیدا می‌کند. از سوی دیگر، تغییرات  $\sigma_2^2$  تأثیری در قابلیت فرآیند مرحله ۱ ندارد ولی قابلیت فرآیند کلی و عملکرد مرحله دوم را دستخوش تغییر قرار می‌دهد.

به‌طور مشابه، تغییرات همزمان  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  نیز می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. برای مثال زمانی که  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  برابر ۰/۶ باشند، مقدار PCI برای مرحله ۱، مرحله ۲ و کل فرآیند، به‌ترتیب برابرست با ۱/۶۲۳۲،

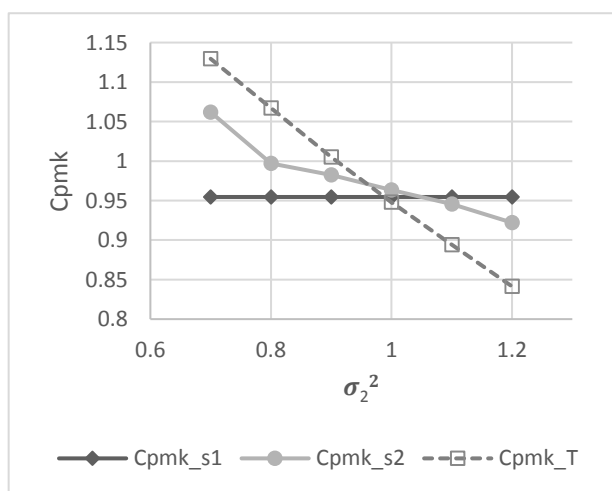
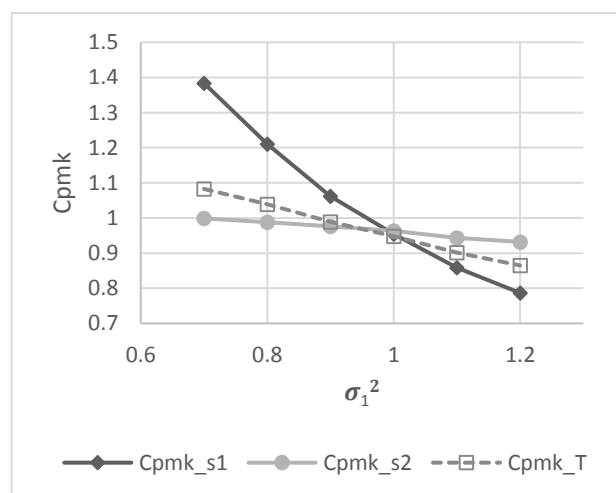
۱/۳۶۸۰ و ۱/۶۰۸۵ که نشان‌دهنده عملکرد قابل قبول فرآیند است. از سوی دیگر، زمانی که  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  برابر ۱/۲ باشند، مقدار PCI برای مرحله ۱، مرحله ۲ و کل فرآیند، به‌ترتیب برابرست با ۰/۷۸۶۵، ۰/۹۲۳۰ و ۰/۷۷۹۶ که نشان‌دهنده عملکرد ضعیف فرآیند است. بنابراین مقادیر کمتر  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  منجر به افزایش قابلیت فرآیند خواهند شد. در شکل (۳)، تأثیر تغییرات  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  بر قابلیت فرآیند مرحله ۱، مرحله ۲ و قابلیت فرآیند کل نشان داده شده است.

در جدول (۳)، قابلیت فرآیند به‌ازای شیفت‌های کوچک در پارامتر عرض از مبدأ در مرحله ۱ بررسی شده است. همچنین جدول (۴)، قابلیت فرآیند به‌ازای شیفت‌های کوچک در پارامتر شیب در مرحله ۱ را نشان می‌دهد. باتوجه به نتایج تحلیل حساسیت، افزایش شیفت در پارامترهای عرض از مبدأ و شیب در مرحله ۱، منجر به کاهش عملکرد فرآیند می‌شود.

در شکل (۴)، تأثیر شیفت‌های عرض از مبدأ و شیب مرحله ۱، بر قابلیت فرآیند مراحل ۱، ۲ و قابلیت فرآیند کل نشان داده شده است.

جدول (۲): PCI به‌ازای مقادیر مختلف  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$ 

$\sigma_2^2 = 1$						
$\sigma_1^2 \rightarrow$	۰/۷	۰/۸	۰/۹	1	۱/۱	۱/۲
$C_{pmk-Stage1}$	۱/۳۸۳۸	۱/۲۱۰۴	۱/۰۶۲۲	۰/۹۵۴۶	۰/۸۵۹۰	۰/۷۸۶۸
$C_{pmk-Stage2}$	۰/۹۹۸۹	۰/۹۸۷۶	۰/۹۷۵۸	۰/۹۶۳۳	۰/۹۴۳۸	۰/۹۳۲۰
$C_{pmk-Total}$	۱/۰۸۲۷	۱/۰۳۹۳	۰/۹۸۹۴	۰/۹۴۷۹	۰/۹۰۱۶	۰/۸۶۵۰
$\sigma_1^2 = 1$						
$\sigma_2^2 \rightarrow$	۰/۷	۰/۸	۰/۹	1	۱/۱	۱/۲
$C_{pmk-Stage1}$	۰/۹۵۴۶	۰/۹۵۴۶	۰/۹۵۴۶	۰/۹۵۴۶	۰/۹۵۴۶	۰/۹۵۴۶
$C_{pmk-Stage2}$	۱/۰۶۲۰	۰/۹۹۷۰	۰/۹۸۲۵	۰/۹۶۳۳	۰/۹۴۵۶	۰/۹۲۲۱
$C_{pmk-Total}$	۱/۱۲۹۵	۱/۰۶۷۱	۱/۰۰۵۲	۰/۹۴۷۹	۰/۸۹۴۱	۰/۸۴۱۴

ب) تأثیر تغییرات  $\sigma_2^2$ الف) تأثیر تغییرات  $\sigma_1^2$ 

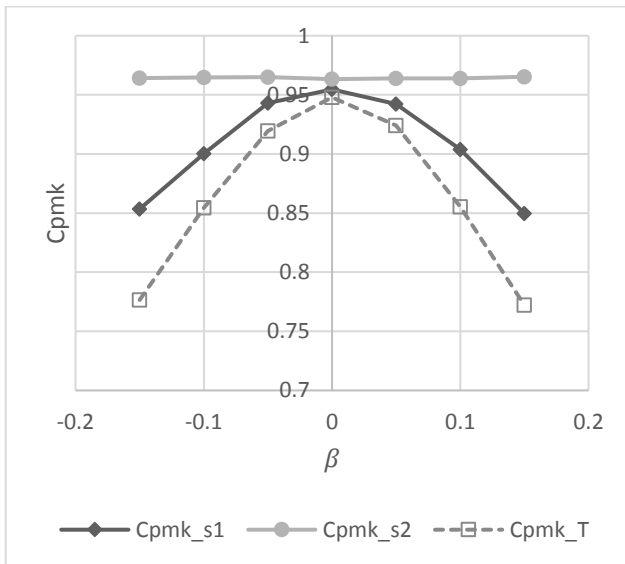
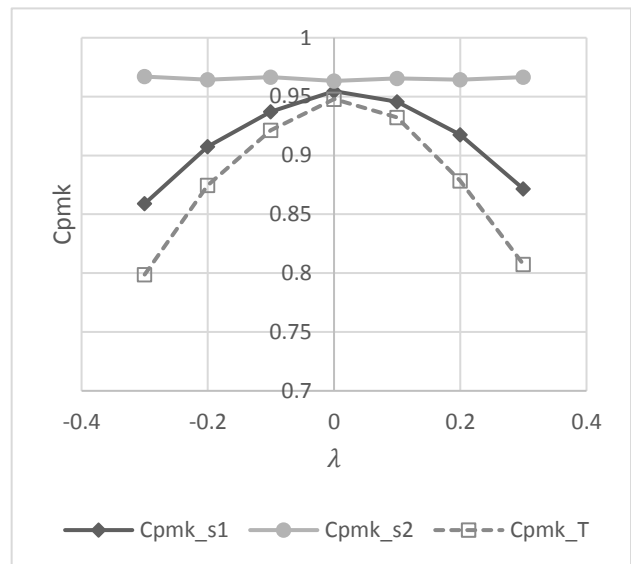
شکل (۳): تأثیر تغییرات  $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$  بر قابلیت فرآیند مرحله ۱ ( $S_1$ )، مرحله ۲ ( $S_2$ ) و قابلیت فرآیند کل (T): الف) تغییرات  $\sigma_1^2$  و ب) تغییرات  $\sigma_2^2$

جدول (۳): PCI به‌ازای شیفتهای عرض از مبدأ مرحله ۱ از  $b_{0-1} + \lambda\sigma$ 

PCI	$\lambda$						
	-۰/۳	-۰/۲	-۰/۱	0	۰/۱	۰/۲	۰/۳
$C_{pmk-Stage1}$	۰/۸۵۹۰	۰/۹۰۷۵	۰/۹۳۷۱	۰/۹۵۴۶	۰/۹۴۵۵	۰/۹۱۷۷	۰/۸۷۱۷
$C_{pmk-Stage2}$	۰/۹۶۷۰	۰/۹۶۴۵	۰/۹۶۶۵	۰/۹۶۳۳	۰/۹۶۵۵	۰/۹۶۴۳	۰/۹۶۶۵
$C_{pmk-Total}$	۰/۷۹۸۸	۰/۸۷۴۶	۰/۹۲۱۴	۰/۹۴۷۹	۰/۹۳۲۴	۰/۸۷۸۳	۰/۸۰۷۵

جدول (۴): PCI به‌ازای شیفتهای شیب مرحله ۱ از  $b_{1-1} + \beta\sigma$ 

PCI	$\beta$						
	-۰/۱۵	-۰/۱	-۰/۰۵	0	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵
$C_{pmk-Stage1}$	۰/۸۵۳۵	۰/۹۰۰۲	۰/۹۴۳۱	۰/۹۵۴۶	۰/۹۴۲۳	۰/۹۰۳۷	۰/۸۴۹۶
$C_{pmk-Stage2}$	۰/۹۶۴۲	۰/۹۶۴۶	۰/۹۶۵۱	۰/۹۶۳۳	۰/۹۶۴۰	۰/۹۶۴۰	۰/۹۶۵۳
$C_{pmk-Total}$	۰/۷۷۶۶	۰/۸۵۴۵	۰/۹۱۹۶	۰/۹۴۷۹	۰/۹۲۴۲	۰/۸۵۵۳	۰/۷۷۲۱

ب) شیفتهای شیب مرحله ۱ از  $b_{1-1} + \beta\sigma$ الف) شیفتهای عرض از مبدأ مرحله ۱ از  $b_{0-1} + \lambda\sigma$ 

شکل (۴): تأثیر شیفتهای پارامترهای مرحله ۱ بر قابلیت فرآیند مرحله ۱ (S1)، مرحله ۲ (S2) و قابلیت فرآیند کل (T):

الف) شیفتهای عرض از مبدأ و ب) شیفتهای شیب

(۵) نیز نشان داده شده است.

باتوجه به شکل (۵)، افزایش شیفتهای پارامترهای پروفایل مرحله ۲، منجر به کاهش عملکرد فرآیند در مرحله دوم و کاهش قابلیت فرآیند کل می‌شود ولی تأثیر چندانی بر عملکرد مرحله ۱ ندارد. باتوجه به جداول و نمودارهای فوق، نتایج تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که مدل ارائه شده، خاصیت آشناری را به‌طور مؤثری حذف می‌کند و عملکرد هر مرحله به تفکیک پارامترها به‌خوبی نشان داده می‌شود. شیفتهای پارامترهای پروفایل مرحله ۱، تأثیری بر عملکرد مرحله دوم ندارد، همچنین شیفتهای پارامترهای پروفایل مرحله ۲، عملکرد مرحله اول را تحت تأثیر قرار نمی‌دهد. از سوی دیگر، قابلیت فرآیند کل با تغییر در اندازه هر یک از پارامترها تغییر می‌کند.

مطابق با انتظار، افزایش شیفتهای پارامترهای پروفایل مرحله ۱، منجر به کاهش عملکرد فرآیند در مرحله اول و کاهش قابلیت فرآیند کل می‌شود ولی تأثیر چندانی بر عملکرد مرحله دوم (پس از حذف تأثیر مرحله ۱) ندارد.

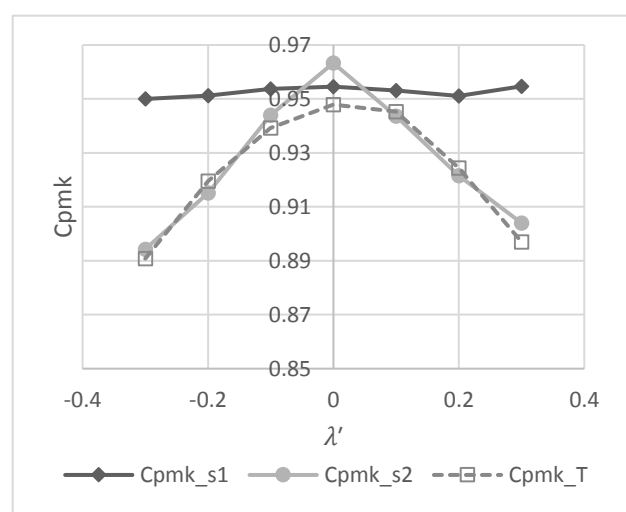
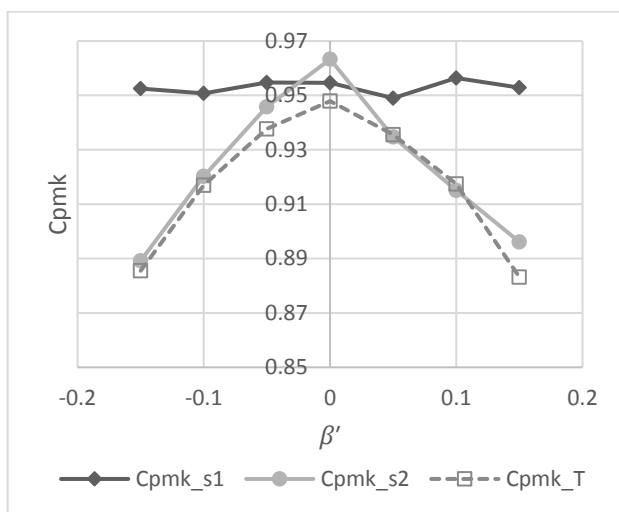
در جدول (۵)، قابلیت فرآیند به‌ازای شیفتهای کوچک در پارامتر عرض از مبدأ در مرحله ۲ بررسی شده است. همچنین جدول (۶)، قابلیت فرآیند به‌ازای شیفتهای کوچک در پارامتر شیب در مرحله ۲ را نشان می‌دهد. باتوجه به نتایج تحلیل حساسیت، افزایش شیفتهای پارامترهای عرض از مبدأ و شیب در مرحله ۲، منجر به کاهش عملکرد فرآیند در مرحله دوم و همچنین کاهش قابلیت فرآیند کل می‌شود، ضمن آنکه تأثیری بر عملکرد مرحله اول ندارد. این نتیجه در شکل

جدول (۵): PCI به‌ازای شیفت‌های عرض از مبدأ مرحله ۲ از  $b_{0-2}$  به  $\lambda'\sigma$

PCI	$\lambda'$						
	-۰/۳	-۰/۲	-۰/۱	0	۰/۱	۰/۲	۰/۳
$C_{pmk-Stage1}$	۰/۹۵۰۰	۰/۹۵۱۲	۰/۹۵۳۷	۰/۹۵۴۶	۰/۹۵۳۱	۰/۹۵۱۱	۰/۹۵۴۷
$C_{pmk-Stage2}$	۰/۸۹۴۳	۰/۹۱۵۲	۰/۹۴۴۰	۰/۹۶۳۳	۰/۹۴۳۷	۰/۹۲۱۶	۰/۹۰۴۰
$C_{pmk-Total}$	۰/۸۹۰۸	۰/۹۱۹۵	۰/۹۳۹۳	۰/۹۴۷۹	۰/۹۴۵۳	۰/۹۲۴۴	۰/۸۹۷۰

جدول (۶): PCI به‌ازای شیفت‌های شیب مرحله ۲ از  $b_{1-2}$  به  $\beta'\sigma$

PCI	$\beta'$						
	-۰/۱۵	-۰/۱	-۰/۰۵	0	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵
$C_{pmk-Stage1}$	۰/۹۵۲۵	۰/۹۵۰۸	۰/۹۵۴۷	۰/۹۵۴۶	۰/۹۴۹۰	۰/۹۵۶۴	۰/۹۵۲۹
$C_{pmk-Stage2}$	۰/۸۸۹۲	۰/۹۲۰۲	۰/۹۴۵۸	۰/۹۶۳۳	۰/۹۳۴۷	۰/۹۱۵۱	۰/۸۹۶۱
$C_{pmk-Total}$	۰/۸۸۵۵	۰/۹۱۷۰	۰/۹۳۷۷	۰/۹۴۷۹	۰/۹۳۵۵	۰/۹۱۷۴	۰/۸۸۳۲



ب) شیفت‌های شیب مرحله ۲ از  $b_{1-2}$  به  $\beta'\sigma$

الف) شیفت‌های عرض از مبدأ مرحله ۲ از  $b_{0-2}$  به  $\lambda'\sigma$

شکل (۵): تأثیر شیفت پارامترهای مرحله ۲ بر قابلیت فرآیند فرآیند مرحله ۱ (S1)، مرحله ۲ (S2) و قابلیت فرآیند کل (T): الف) شیفت عرض از مبدأ و ب) شیفت شیب

همچنین بررسی قابلیت فرآیند پروفایل‌ها در فرآیندهای چندمرحله‌ای، در حضور داده‌های پرت یکی دیگر از موضوعاتی است که تاکنون بدان پرداخته نشده است.

### ۷. نتیجه و جمع‌بندی

در این مطالعه، روشی برای ارزیابی شاخص قابلیت فرآیند پروفایل خطی ساده در فرآیند دومرحله‌ای معرفی شد. در بررسی فرآیند دومرحله‌ای، خاصیت آشناری با استفاده از رویکرد انتخاب-علت و از طریق تحلیل باقیمانده‌ها در مرحله دوم حذف و بدین صورت قابلیت فرآیند مرحله دوم بدون تأثیر مرحله قبلی تعیین گردید. با توجه به نتایج مثال عددی، با افزایش اندازه نمونه ( $m$ )، قابلیت فرآیند افزایش می‌یابد. هرچه مقدار واریانس خطاها ( $\sigma_1^2$  و  $\sigma_2^2$ ) کمتر باشد، فرآیند عملکرد بهتری خواهد داشت. همچنین شیفت پارامترهای پروفایل در مرحله ۲، تأثیری بر عملکرد مرحله ۱ نخواهد داشت، در حالی که مطابق انتظار، تغییرات پارامترها در مرحله ۱ بر عملکرد مرحله ۲ و عملکرد کلی فرآیند تأثیر دارد. در این مطالعه، پروفایل خطی ساده در فرآیند دومرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفت. در نظر گرفتن سایر انواع پروفایل‌ها از جمله چندمتغیره و پروفایل‌های غیرخطی در فرآیندهای چندمرحله‌ای می‌تواند به‌عنوان تحقیقات آتی مورد بررسی قرار گیرد.

### مراجع

- [1] Woodall, W. H., Spitzner, D. J., Montgomery, D. C., & Gupta, S. (2004). Using control charts to monitor process and product quality profiles. *Journal of Quality Technology*, 36(3), 309-320.
- [2] Noorossana, R., Saghaei, A., & Amiri, A. (2011). *Statistical analysis of profile monitoring* (Vol. 865). John Wiley & Sons.
- [3] Kane, V. E. (1986). Process capability indices. *Journal of quality technology*, 18(1), 41-52.
- [4] Kotz, S., & Johnson, N. L. (2002). Process capability indices—a review, 1992–2000. *Journal of quality technology*, 34(1), 2-19.
- [5] Wu, C. W., Pearn, W. L., & Kotz, S. (2009). An overview of theory and practice on process capability indices for quality assurance. *International journal of production economics*, 117(2), 338-359.

- logistic regression profile using different link functions. *Quality Engineering*, 31(3), 453-462.
- [21] Alevizakos, V., & Koukouvinos, C. (2022). Evaluation of process capability in gamma regression profiles. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 51(9), 5174-5189.
- [22] Mohammad Pour Larimi, A., Nemati Keshteli, R., & Safaei, A. S. (2018). Functional process capability indices for nonlinear profile. *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 12(Special issue on Statistical Processes and Statistical Modeling), 1-14.
- [23] Guevara G, R. D., & Alejandra López, T. (2022). Process capability vector for multivariate nonlinear profiles. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 92(6), 1292-1321.
- [۲۴] جانعلی پور، سودا، صبری لقائی، کامیار و نورالسنا، رسول. (۱۳۹۸). نمودار کنترل جدید برای پایش قابلیت فرآیند براساس پارامترهای توزیع احتمال مشخصه کیفی. نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید. ۷(۱۵)، ۳۳۳-۳۳۹.
- [25] Chan, L. K., Cheng, S. W., & Spiring, F. A. (1988). A new measure of process capability: Cpm. *Journal of Quality Technology*, 20(3), 162-175.
- [26] Pearn, W. L., Kotz, S., & Johnson, N. L. (1992). Distributional and inferential properties of process capability indices. *Journal of Quality Technology*, 24(4), 216-231.
- [27] Zhang, G. (1990). A new diagnosis theory with two kinds of quality. *Total Quality Management*, 1(2), 249-258.
- [28] Linn, R. J., Au, E., & Tsung, F. (2002). Process capability improvement for multistage processes. *Quality Engineering*, 15(2), 281-292.
- [29] Chen, J., Zhu, F., Li, G. Y., Ma, Y. Z., & Tu, Y. L. (2012). Capability index of a complex-product machining process. *International journal of production research*, 50(12), 3382-3394.
- [30] Nikzad, E., Amiri, A., & Abbasi, B. (2017). Residuals based process capability indices for two-stage processes. *Journal of Industrial Engineering International*, 13(2), 239-247.
- [31] Ghahyazi, M. E., Niaki, S. T. A., & Soleimani, P. (2014). On the monitoring of linear profiles in multistage processes. *Quality and Reliability Engineering International*, 30(7), 1035-1047.
- [32] Zhang, G. X. (1984). A new type of control charts and a theory of diagnosis with control charts. In *World Quality Congress Transactions (Vol. 3, pp. 175-185)*. Milwaukee, WI: American Society for Quality Control.
- [33] Khedmati, M., & Niaki, S. T. A. (2016). Monitoring simple linear profiles in multistage processes by a MaxEWMA control chart. *Computers & Industrial Engineering*, 98, 125-143.
- [6] Yum, B. J., & Kim, K. W. (2011). A bibliography of the literature on process capability indices: 2000–2009. *Quality and reliability engineering international*, 27(3), 251-268.
- [7] de-Felipe, D., & Benedito Benet, E. (2017). A review of univariate and multivariate process capability indices. *International journal of advanced manufacturing technology*, 92(5-8), 1687-1705.
- [8] Woodall, W. H. (2007). Current research on profile monitoring. *Production*, 17, 420-425.
- [9] Hosseini-fard, S. Z., & Abbasi, B. (2012). Evaluation of process capability indices of linear profiles. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 29(2), 162-176.
- [10] Hosseini-fard, S. Z., & Abbasi, B. (2012). Process capability analysis in non normal linear regression profiles. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 41(10), 1761-1784.
- [11] Keshteli, R. N., Kazemzadeh, R. B., Amiri, A., & Noorossana, R. (2014). Developing functional process capability indices for simple linear profile. *Scientia Iranica. Transaction E, Industrial Engineering*, 21(3), 1044.
- [12] Ebadi, M., & Shahriari, H. (2013). A process capability index for simple linear profile. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 64(5-8), 857-865.
- [13] Wang, F. K. (2014). A process yield for simple linear profiles. *Quality Engineering*, 26(3), 311-318.
- [14] Wang, F. K. (2014). Measuring the process yield for simple linear profiles with one-sided specification. *Quality and Reliability Engineering International*, 30(8), 1145-1151.
- [15] Wang, F. K., & Tamirat, Y. (2015). Process Yield Analysis for Linear Within-Profile Autocorrelation. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(6), 1053-1061.
- [16] Pakzad, A., Razavi, H., & Sadeghpour Gildeh, B. (2021). Functional process capability indices for a simple linear profile in fuzzy environment. *Journal of Industrial and Systems Engineering*, 13(4), 1-22.
- [17] Pakzad, A., & Basiri, E. (2022). A new incapability index for simple linear profile with asymmetric tolerances. *Quality Engineering*, 1-17.
- [18] Mehri, S., Ahmadi, M. M., Shahriari, H., & Aghaie, A. (2021). Robust process capability indices for multiple linear profiles. *Quality and Reliability Engineering International*, 37(8), 3568-3579.
- [19] Alevizakos, V., Koukouvinos, C., & Castagliola, P. (2019). Process capability index for Poisson regression profile based on the S pmk index. *Quality Engineering*, 31(3), 430-438.
- [20] Alevizakos, V., Koukouvinos, C., & Lappa, A. (2019). Comparative study of the C p and S pmk indices for





DOI: 10.22084/IER.2022.5047

## Process Capability Analysis for Simple Linear Profiles in Two-stage Process

S. Adibfar<sup>1</sup>, R. Noorossana<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> PhD student of Industrial Engineering, Department of Industries, Faculty of Industrial Engineering, University of Science and Technology, Tehran, Iran

<sup>2</sup> Professor of Industries Department, Faculty of Industrial Engineering, University of Science and Technology, Tehran, Iran

### ARTICLE INFO

#### *Article history:*

Received: 2022/01/13

Accepted: 2022/03/08

#### *Keywords:*

Process Capability Index  
Simple Linear Profile  
Multistage Process  
Cascade Property

### ABSTRACT

When a process is statistically in-control, one may be interested in assessing the process performance based on the process capability analysis. Although an extensive literature exists on process capability analysis when quality characteristic of interest is continuous or discrete but the existing methods are not applicable to the case when a process or product is represented by a linear profile. A profile is a relationship between a response variable and one or more independent variables. Manufacturing operations are often involved with multistage processes, in which the output of a stage is the input of its subsequent stage. This property is known as the cascade property. Using common indices to assess the capability may lead to incorrect results as the cascade effect is ignored. This study presents a method to conduct process capability analysis in a two-stage process when quality of a product or process can be characterized by a simple linear profile. A numerical simulation evaluates the performance of the proposed method for a two-stage process. The results indicate effective performance of the proposed method.

\* Corresponding author. R. Noorossana  
Tel.:021-77225017; E-mail address: [rassoul@iust.ac.ir](mailto:rassoul@iust.ac.ir)