

مکان‌یابی شبکه‌ای تسهیلات پردازحام با در نظر گرفتن انصراف قبل از ورود مشتریان

جمال ارکات^{۱*}، شکوفه زمانی[†]

*استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج
†دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج

خلاصه

در این مقاله، مسأله مکان‌یابی شبکه‌ای برای تسهیلات مستعد از دحام با در نظر گرفتن امکان انصراف مشتریان قبل از ورود، بررسی می‌گردد. انصراف از ورود در مواقعی رخ می‌دهد که تخمین مشتری از زمان انتظار در صف، بیش از آستانه تحمل وی باشد. هر مشتری به هنگام مراجعه به تسهیلی که بدان تخصیص یافته است، با توجه به جمعیت افراد موجود، در مورد ورود و یا انصراف از ورود به سیستم تصمیم‌گیری می‌نماید. از آنجایی که انصراف مشتری قبل از ورود به صف، خصوصیتی است که در بسیاری از سیستم‌های خدمت‌رسانی در دنیای واقعی وجود دارد، در نظر گرفتن آن می‌تواند به کاربردی‌تر شدن مدل‌های ریاضی، کمک شایانی نماید. در مدل ارائه شده، انتخاب مکان‌های احداث تسهیلات و تخصیص مشتریان به آنها به گونه‌ای صورت می‌پذیرد که میزان تقاضای از دست رفته یا به عبارتی تعداد مشتریانی که به دلیل وجود صف طولانی، از ورود به صف منصرف می‌شوند، کمینه گردد. به منظور نمایش نحوه انصراف قبل از ورود و محاسبه نرخ ورود مشتری به هر تسهیل از یک تابع کاهنده متناسب با تعداد افراد موجود در تسهیل استفاده می‌شود. برای ارزیابی مدل ریاضی، تعدادی مثال عددی ارائه و توسط نرم‌افزار GAMS حل می‌گردند.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:
دریافت ۱۳۹۲/۲/۰۶
پذیرش ۱۳۹۲/۶/۹

کلمات کلیدی:
مکان‌یابی شبکه‌ای،
تسهیلات پردازحام،
انصراف قبل از ورود،
مشتریان کم‌حاصله

۱- مقدمه

کوتاه‌ترین مسیر است؛ بدین معنی که برای محاسبه فاصله بین هر زوج نقطه از شبکه، کوتاه‌ترین مسیر از بین کلیه مسیرهای موجود، انتخاب و طول آن به عنوان فاصله دو نقطه در نظر گرفته می‌شود. مسائل مکان‌یابی شبکه‌ای را می‌توان به دو دسته مکان‌یابی تسهیلات متحرک^۲ و مکان‌یابی تسهیلات ثابت^۳ تقسیم نمود. در مکان‌یابی تسهیلات متحرک، فرض بر آن است که در هر تسهیل، یک یا چند خدمت‌دهنده مستقر بوده و پس از دریافت درخواست مشتری (که معمولاً از طریق تماس تلفنی انجام می‌گیرد) به محل استقرار وی مراجعه و در همان مکان، خدمت مورد نظر را ارائه

مسائل مکان‌یابی شبکه‌ای، دسته‌ای از مسائل مکان‌یابی هستند که در آنها فرض می‌شود تردد بین تسهیلات صرفاً از طریق شبکه‌ای از راه‌های موجود، امکان‌پذیر است. چنین فرضی که در تقابل با استفاده از معیارهای متعارف اندازه‌گیری فاصله (مختصاتی، مستقیم و فاصله p) در مدل‌های کلاسیک مکان‌یابی (p) میانه، c مرکز و پوشش مجموعه‌ها) است، به گونه‌ای مناسب‌تر شرایط مسائل دنیای واقعی را نشان می‌دهد. معیار فاصله در مسائل مکان‌یابی شبکه‌ای،

^۱نویسنده مسئول.

تلفن: ۰۸۷۱-۶۶۲۴۷۷۵، پست الکترونیکی: j.arkat@uok.ac.i

^۲Mobile facility location

^۳Immobile facility location

نمونه از مدل‌های میانه هستند. استفاده از مدل‌های چندهدفه نیز مورد توجه محققان این حوزه قرار گرفته است؛ به طور مثال در مدل‌های ریاضی ارائه شده توسط پسندیده و نیایی [۵] و چمبری^{۱۱} و همکاران [۶] هر دو جنبه مشتری و خدمت‌دهنده به صورت همزمان در قالب دو تابع هدف مجزا، مدنظر قرار گرفته‌اند. در مدل‌های پوششی برخلاف مدل‌های میانه، تمرکز تابع هدف به جای کیفیت پوشش مشتریان (یعنی زمان‌های انتظار در سیستم و صف) بر کمیت پوشش آنها است و بدین جهت، توابع هدفی نظیر بیشینه کردن میزان پوشش یا کمینه کردن مشتریان خارج از محدوده پوشش تسهیلات، به کار برده می‌شوند. از جمله چنین توابع هدفی می‌توان به تابع هدف بیشینه نمودن امید تعداد مشتریان پوشش داده شده (مثلاً برمن و همکاران [۷]) و بیشینه نمودن سطح پوشش (مثلاً هامانگچی^{۱۲} و ناکاده^{۱۳} [۸] و مقدس^{۱۴} و کاخکی^{۱۵} [۹]) اشاره نمود. تابع هدف مدل‌های مکان‌یابی مرکز به عنوان دسته سوم از مسائل مکان‌یابی تسهیلات پرزدحام، از نوع کمینه کردن بیشینه فاصله یا زمان‌های خدمت‌دهی است. استفاده از این نوع تابع هدف، مختص مسائل مکان‌یابی تسهیلات اورژانسی است یعنی مسائلی که در آنها لازم است در کوتاه‌ترین زمان ممکن به دورترین مشتری نیز خدمت‌رسانی انجام شود. به عنوان نمونه‌ای از مدل‌های مکان‌یابی مرکز برای تسهیلات پرزدحام می‌توان به مدل ارائه شده توسط آبولین^{۱۶} و همکاران [۱۰] اشاره نمود.

در بسیاری از سیستم‌های خدمت‌دهی دنیای واقعی، بخشی از مشتریان به دلیل طولانی بودن صف‌های انتظار، پیش از ورود به سیستم یا پس از آن، از دریافت خدمت منصرف می‌گردند. در شرایطی که نسبت چنین مشتریانی به کل مشتریان مراجعه کننده، قابل ملاحظه باشد، نادیده گرفتن آن در مدل‌سازی مسأله، می‌تواند باعث به دست آوردن نتایجی غیر قابل اطمینان گردد. اگرچه مدل‌های ریاضی متعددی برای تحلیل کم‌حوصلگی^{۱۷} مشتریان، توسعه داده شده‌اند، چنین مدل‌هایی اغلب به عنوان مدل‌های پایه‌ای تئوری صف، بررسی شده‌اند و کمتر به کاربردهایی همچون مکان‌یابی تسهیلات پرزدحام پرداخته شده است. دلیل این امر را می‌توان در دشوار بودن تعبیه معادلات تعادل سیستم صف در مدل ریاضی مربوطه، جستجو نمود.

انصراف از دریافت خدمات به دلیل بی‌حوصلگی مشتریان در سه شکل مختلف، اتفاق می‌افتد. انصراف قبل از ورود^{۱۸} اولین شکل

می‌نماید. مکان‌یابی برای اغلب تسهیلات اضطراری مانند ایستگاه‌های آمبولانس، پلیس و آتش‌نشانی در این دسته از مسائل مکان‌یابی شبکه‌ای قرار می‌گیرند. در مسائل مکان‌یابی تسهیلات ثابت، فرض بر آن است که مشتری برای دریافت خدمت موردنظر به محل استقرار تسهیلات خدمت‌دهنده مراجعه نموده و در همان مکان، خدمت را دریافت می‌دارد. مکان‌یابی برای دستگاه‌های خودپرداز بانک (ATM)، بانه‌های پستی و ایستگاه‌های سوخت‌رسانی از جمله کاربردهایی هستند که در ادبیات موضوع بدان‌ها پرداخته شده است. از دیدگاهی دیگر، مسائل مکان‌یابی را می‌توان براساس معیار ازدحام^۴ یا تشکیل صف در سیستم خدمت‌دهی به دو دسته تقسیم نمود. در دسته نخست، مسائل متعارفی همچون p میانه، c مرکز و پوشش مجموعه قرار می‌گیرند که در آنها فرض بر آن است که خدمت‌دهی به هر مشتری بلافاصله پس از ورود به تسهیل، انجام می‌گیرد و هیچ‌گاه صفی در سیستم تشکیل نمی‌گردد. در دسته دوم، مسائلی قرار دارند که در آنها زمان‌های خدمت‌دهی در مقایسه با فواصل زمانی مراجعات متوالی مشتریان، قابل ملاحظه هستند و بنابراین تشکیل صف یا ایجاد ازدحام، اجتناب‌ناپذیر است. لازمه در نظر گرفتن این عامل مهم که در بسیاری از کاربردهای دنیای واقعی وجود دارد، تحلیل سیستم‌های صف ایجاد شده و معیارهایی همچون متوسط زمان‌های انتظار مشتریان در سیستم و صف می‌باشد. به دلیل وجود عدم قطعیت در زمان‌های بین ورود مشتریان و زمان‌های خدمت‌دهی، مسائل مکان‌یابی برای تسهیلات مستعد ازدحام از مسائل پیچیده برای مدل‌سازی و حل به شمار می‌روند.

لارسون^۵ [۱ و ۲] نخستین محقق است که پدیده ازدحام را در مسائل مکان‌یابی تسهیلات بررسی نموده است. مدل‌های مکان‌یابی برای تسهیلات مستعد ازدحام براساس معیارهایی همچون تعداد خدمت‌دهندگان مستقر در هر تسهیل، قاعده تخصیص مشتریان به تسهیلات (مانند قاعده مجاورت^۶ و قاعده جاذبه^۷)، توزیع زمان‌های بین ورود مشتریان متوالی و توزیع زمان‌های خدمت‌دهی، دسته‌بندی می‌شوند. مهمترین وجه تمایز این گونه مدل‌ها، نوع تابع هدف است و از این حیث، می‌توان آنها را به سه دسته مسائل میانه، پوششی و مرکز تقسیم نمود.

تابع هدف مدل‌های میانه به صورت حداقل نمودن مجموع هزینه‌ها یا زمان‌ها (شامل هزینه‌ها یا زمان‌های سفر و انتظار مشتریان) تعریف می‌گردد. مدل یک خدمت‌دهنده M/M/1 (ورودهای پواسان و زمان‌های خدمت نمایی) و چند خدمت‌دهنده M/M/c که به ترتیب توسط وانگ^۸ و همکاران [۳] و برمن^۹ و درزتر^{۱۰} [۴] ارائه شده‌اند، دو

¹⁰Drezner

¹¹Chambari

¹²Hamaguchi

¹³Nakade

¹⁴Moghadas

¹⁵Kakhki

¹⁶Abolian

¹⁷Impatience

¹⁸Balking

⁴ Congestion

⁵Larson

⁶Proximity rule

⁷Gravity rule

⁸Wang

⁹Berman

افراد حاضر در سیستم، از یک تابع کاهنده متعارف استفاده می‌شود. در ادامه، ساختار مطالبی که عنوان خواهند شد، بدین صورت است: در بخش آتی، شکل کلی مسأله، تشریح و یک مدل ریاضی ارائه می‌گردد. در بخش سوم مقاله، به منظور محاسبه نرخ ورود مشتری به هر تسهیل، یک تابع کاهنده به عنوان تابع بی‌میلی مشتری، معرفی شده و براساس آن، تابع هدف مدل ریاضی بازنویسی می‌گردد. به منظور سنجش صحت و کارایی مدل ریاضی ارائه شده، تعدادی مثال عددی در بخش چهارم، ارائه و توسط نرم‌افزار GAMS حل می‌گردند. جمع‌بندی، نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادها در بخش آخر مقاله ارائه می‌شوند.

۲- بیان مسأله و ارائه مدل ریاضی

مسأله‌ای که در این تحقیق بررسی می‌شود، مسأله مکان‌یابی شبکه‌ای برای تسهیلات مستعد ازدحام یا صف است. شبکه‌ای از گره‌ها و کمان‌های اصل بین آنها از قبل مشخص است و مشتریان متقاضی دریافت خدمات در برخی از گره‌های شبکه مستقر هستند. فواصل زمانی بین تقاضاهای متوالی هر یک از مشتریان از یک توزیع نمایی با نرخ مشخص پیروی می‌کند. هدف مسأله، انتخاب مکان بهینه برای احداث تعداد مشخصی تسهیل از بین تعدادی از مکان‌های کاندیدا است به نحوی که میزان تقاضای از دست رفته به دلیل انصراف مشتری، کمینه گردد. در هر یک از تسهیلات، یک خدمت‌دهنده مستقر است و مدت زمان خدمت‌دهی آن، یک متغیر تصادفی نمایی است. با محترم شمردن قاعده مجاورت، هر مشتری به نزدیک‌ترین تسهیل باز مراجعه می‌نماید و پیش از ورود به آن، با توجه به تعداد افرادی که در صف دریافت خدمت مشاهده می‌کند، در مورد ورود یا عدم ورود، تصمیم‌گیری می‌نماید. طولانی بودن زمان انتظار به دلیل حضور تعداد زیادی مشتری، باعث می‌شود که بخشی از مشتریان مراجعه‌کننده از ورود به تسهیل منصرف شوند و بدین لحاظ تقاضای آنان، از دست رفته تلقی گردد. مفروضات زیر در مدل‌سازی مسأله، مدنظر قرار گرفته‌اند:

- مختصات گره‌های شبکه و در نتیجه، کوتاه‌ترین فاصله بین هر جفت گره، از قبل مشخص است.
- مشتریان در برخی از گره‌های شبکه مستقر هستند.
- فواصل زمانی بین تقاضاهای متوالی برای هر مشتری از یک توزیع نمایی با نرخ مشخص پیروی می‌کند.
- زمان‌های خدمت‌دهی در تسهیلات از توزیع‌های نمایی با نرخ‌های یکسان، پیروی می‌کنند.
- براساس یک تابع بی‌میلی، نرخ ورود مشتری به هر تسهیل با افزایش طول صف کاهش می‌یابد.

بی‌حوصلگی است که در اثر بی‌میلی مشتری برای ورود به صف‌های انتظار طولانی، رخ می‌دهد. مدل صف $M/M/C/K$ (ورودهای پواسن، زمان‌های خدمت نمایی، C خدمت‌دهنده در هر تسهیل و محدودیت فضای انتظار K نفر)، از جمله مدل‌های صفی است که این نوع از بی‌حوصلگی را در نظر می‌گیرد. مدل ارائه شده در [۶] حالت خاصی از چنین سیستمی است که در آن فرض شده است که در هر یک از تسهیلات، صرفاً یک خدمت‌دهنده مستقر شود ($M/M/1/K$). در چنین سیستمی، فرض می‌شود که مشتری با مشاهده K نفر در سیستم، از ورود به صف خودداری می‌نماید. حالت واقع‌گرایانه‌تری از این مدل در [۷] ارائه شده است بدین معنی که فرض شده است مشتری در صورت مشاهده K نفر در سیستم، از ورود منصرف شده و به تسهیل دیگری مراجعه می‌نماید. اگرچه در این تحقیق، شرایط دنیای واقعی تا حدود زیادی در نظر گرفته شده است اما محققان از تعبیه معادلات تعادل سیستم صف در مدل ریاضی بازمانده و صرفاً به ارائه روش‌های حل تقریبی، بسنده نموده‌اند. در شکل واقع‌گرایانه‌تری از این گونه مدل‌ها، بی‌میلی مشتریان برای ورود به صف به تعداد افراد حاضر در صف وابسته می‌گردد بدین معنی که هر مشتری در هنگام مراجعه به تسهیل متناظر خود، با توجه به تعداد افراد حاضر در صف، در مورد ورود و یا انصراف از ورود به صف تصمیم‌گیری می‌کند. با افزایش طول صف، نرخ ورود به هر تسهیل کاهش می‌یابد که این کاهش در قالب یک تابع کاهنده متناسب با تعداد افراد موجود در هر تسهیل، در نظر گرفته می‌شود. شکل دوم بی‌حوصلگی انصراف پس از ورود^{۱۹} است. در این نوع بی‌حوصلگی، هر مشتری پس از ورود به صف، مدت زمان انتظار خود را با توجه به تعداد افرادی که جلوتر از خود می‌بیند، برآورد می‌کند. در صورتی که مدت زمان انتظار برآورد شده توسط مشتری، بیش از حد انتظار وی باشد، مشتری منتظر نمانده و تسهیل را پیش از دریافت خدمت ترک می‌کند. پافشاری برای دریافت خدمت^{۲۰}، شکل سوم از اشکال بی‌حوصلگی است که در آن، مشتری برای دریافت خدمت در یک صف منتظر نمانده و با دیدن کاهش طول سایر صف‌ها، صف خود را ترک می‌کند و به صف کوتاه‌تر ملحق می‌شود. تحلیل گونه سوم بی‌حوصلگی مشتریان به مراتب از تحلیل دو گونه نخست، دشوارتر است.

در تحقیق حاضر، مسأله مکان‌یابی شبکه‌ای برای تسهیلات ثابت پرازدحام در قالب یک مدل پوششی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مسأله، انصراف قبل از ورود به عنوان یکی از منابع از دست دادن تقاضا مدنظر قرار می‌گیرد. در مدل‌سازی مسأله تحت بررسی، فرض می‌شود که تقاضای هر مشتری از طریق نزدیک‌ترین تسهیل، پوشش داده شده و هر مشتری پیش از ورود به تسهیل با توجه به تعداد افراد حاضر در صف در مورد ورود یا انصراف از ورود تصمیم‌گیری کند. به منظور نشان دادن بی‌میلی مشتریان و متناسب کردن آن با جمعیت

¹⁹ Reneging

²⁰ Jockeying

با توجه به نمادگذاری تعریف شده، مدل ریاضی مسأله به صورت زیر است:

$$\text{Min } w = \sum_{l \in L} (\lambda_l - \bar{\lambda}_l) \quad (1)$$

$$\bar{\lambda}_l = \lambda_l \sum_{n \in N} b_n \pi_{ln} \quad \forall l \in L \quad (2)$$

$$\lambda_l = \sum_{i \in I} d_i x_{il} \quad \forall l \in L \quad (3)$$

$$\sum_{l \in L} x_{il} = 1 \quad \forall i \in I \quad (4)$$

$$t'_{il} = \sum_{j \in J} t_{ij} y_{jl} \quad \forall i \in I, l \in L \quad (5)$$

$$\sum_{k \in L} x_{ik} t'_{ik} \leq t'_{il} \quad \forall i \in I, l \in L \quad (6)$$

$$\sum_{j \in J} y_{jl} = 1 \quad \forall l \in L \quad (7)$$

$$\sum_{l \in L} y_{jl} \leq 1 \quad \forall j \in J \quad (8)$$

$$x_{il}, y_{jl} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, l \in L \quad (9)$$

$$\lambda_l, \bar{\lambda}_l, t'_{il}, \pi_{ln} \geq 0 \quad \forall i \in I, l \in L \quad (10)$$

تابع هدف (رابطه (۱)) مجموع نرخ تقاضاهای از دست رفته در تسهیلات را کمینه می‌سازد. محدودیت (۲) متوسط نرخ ورود مشتریان در هر تسهیل را محاسبه می‌نماید. در این رابطه b_n معرف شکل کلی تابع بی‌میلی است که در بخش آتی با معرفی آن، شکل صریح این محدودیت، ارائه می‌گردد. معادله (۳) مجموع نرخ تقاضاهای تخصیص یافته به هر یک از تسهیلات را محاسبه می‌نماید. محدودیت (۴) تضمین می‌کند که هر مشتری به یک تسهیل، تخصیص داده شود. محدودیت (۵) کوتاه‌ترین فاصله هر یک از مشتریان را از هر یک از تسهیلات محاسبه می‌نماید. محدودیت (۶) تضمین می‌کند که هر مشتری به نزدیک‌ترین تسهیل تخصیص یابد. محدودیت (۷) تضمین می‌کند که هر تسهیل فقط در یکی از سایت‌ها مستقر گردد. محدودیت (۸) نشان می‌دهد که در هر سایت، حداکثر یک تسهیل مستقر می‌شود. محدودیت‌های (۹) و (۱۰) دامنه متغیرهای مربوط به مدل را نشان می‌دهند. در مدل ارائه شده، محدودیت (۲) فاقد شکل صریحی است؛ لازمه بازنویسی این محدودیت براساس متغیرها و پارامترهای معرفی شده، تحلیل سیستم‌های صف M/M/1 مربوط به تسهیلات است. در ادامه با معرفی تابع بی‌میلی مشتری، سیستم‌های صف تسهیلات، تحلیل شده و از نتایج آن به منظور بازنویسی مدل ریاضی استفاده می‌شود.

• نظام خدمت‌دهی از نوع نوبتی^{۲۱} است و صف‌ها در حالت پایدار^{۲۲} بررسی می‌شوند.

در این بخش، ابتدا شکل کلی مدل با هدف حداقل کردن مجموع تقاضای از دست رفته، ارائه می‌گردد. از آنجایی که هر تسهیل به صورت مستقل از سایر تسهیلات، خدمات خود را ارائه می‌نماید، تابع هدف از مجموع تقاضای از دست رفته در هر یک از تسهیلات به دست خواهد آمد. مقدار تقاضای از دست رفته در هر یک از تسهیلات وابسته به تابع بی‌میلی b_n است. توابع کاهنده‌ای همچون $\frac{1}{n+1}$ ، $e^{-\alpha n}$ و $\frac{1}{n^2+1}$ (که در آنها، n نشان‌دهنده تعداد افراد حاضر در تسهیل است) از جمله توابعی هستند که در ادبیات موضوع برای نشان دادن تابع بی‌میلی مورد استفاده قرار گرفته‌اند [۱۱]. در بخش آتی با در نظر گرفتن تابع $\frac{1}{n+1}$ به عنوان تابع بی‌میلی، به محاسبه متوسط نرخ ورود تقاضا به هر تسهیل پرداخته و شکل صریحی از تابع هدف را ارائه خواهیم نمود. نمادگذاری استفاده شده در مدل ریاضی به شرح زیر است:

مجموعه اندیس‌ها

I : مجموعه مشتریان (i : اندیس مشتریان)

J : مجموعه سایت‌های کاندیدا برای احداث تسهیلات (j : اندیس سایت‌ها)

L : مجموعه تسهیلات (l و k : اندیس تسهیلات)

N : جمعیت مشتریان در هر تسهیل (n : اندیس تعداد مشتریان موجود در تسهیل)

پارامترها

S : تعداد تسهیلات

d_i : نرخ تقاضا (تعداد تقاضا در واحد زمان) برای مشتری i

μ : نرخ خدمت‌دهی در هر یک از تسهیلات

t_{ij} : کوتاه‌ترین فاصله بین مشتری i و سایت j

متغیرهای تصمیم

y_{jl} : اگر سایت j به منظور استقرار تسهیل l فعال شود برابر ۱ و در غیر اینصورت برابر ۰ است.

x_{il} : اگر مشتری i به تسهیل l تخصیص یابد برابر ۱ و در غیر اینصورت برابر ۰ است.

λ_l : مجموع نرخ تقاضاهای تخصیص یافته (نرخ مراجعه مشتری) به تسهیل l .

$\bar{\lambda}_{nl}$: نرخ ورود مشتری به تسهیل l زمانی که n نفر در این تسهیل، حضور دارند.

$\bar{\lambda}_l$: متوسط نرخ ورود به تسهیل l .

t'_{il} : کوتاه‌ترین فاصله بین مشتری i و تسهیل l .

π_{ln} : احتمال حدی حضور n مشتری در تسهیل l .

²¹First come – first served (FCFS)

²²Steady state

است، می‌توان تابع هدف مدل ارائه شده را به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= \sum_{l \in L} \left(\lambda_l - \mu + \mu e^{\frac{-\lambda_l}{\mu}} \right) \\ &= \sum_{l \in L} \lambda_l - S\mu + \mu \sum_{l \in L} e^{\frac{-\lambda_l}{\mu}} \end{aligned} \quad (17)$$

در آخرین عبارت به دست آمده به عنوان تابع هدف، بخش اول نشان‌دهنده مجموع نرخ‌های مراجعه به کلیه تسهیلات است. واضح است که این مقدار باید با مجموع نرخ‌های تقاضای کل مشتریان (که مقدار ثابتی است)، برابر باشد. بخش دوم نیز مجموع نرخ خدمت کل تسهیلات را نشان می‌دهد و مقداری ثابت است. در بخش سوم نیز، مقدار ثابت μ در عبارت مجموع ضرب شده است. با این اوصاف، کمینه کردن رابطه نشان داده شده در (۱۷) معادل کمینه کردن رابطه زیر است:

$$\text{Min } w' = \sum_{l \in L} e^{\frac{-\lambda_l}{\mu}} \quad (18)$$

دو نکته در مورد رابطه (۱۸) حائز اهمیت است؛ نخست آنکه این رابطه، مجموع احتمالات خالی بودن را برای کلیه تسهیلات کمینه می‌سازد که در هماهنگی با تابع هدف اصلی (کمینه کردن تقاضای از دست رفته) است. نکته دوم آنکه اگرچه بهینه‌سازی رابطه فوق و تابع هدف اصلی منجر به مجموعه‌ای یکسان از متغیرهای تصمیم می‌گردند، اما لازم است مقدار بهینه تابع هدف اصلی (رابطه (۱)) از طریق رابطه زیر از تابع هدف جدید (رابطه (۱۸)) به دست آید:

$$\text{Min } w = \sum_{l \in L} \lambda_l - S\mu + \mu(\text{Min } w') \quad (19)$$

حال با در نظر گرفتن رابطه (۱۸) به عنوان تابع هدف و محدودیت‌های (۳) تا (۱۰) شکل صریح مدل ریاضی به دست آمده است و می‌توان از نرم‌افزارهای بهینه‌سازی مناسب برای به دست آوردن مکان بهینه تسهیلات استفاده نمود.

۴- نتایج محاسباتی

به منظور ارزیابی مدل، در این بخش تعدادی مثال عددی در ابعاد مختلف حل و تحلیل می‌گردد. مثال‌های ارائه شده شامل ۵ و ۱۰ نقطه تقاضا هستند و هر نقطه تقاضا به عنوان یک سایت کاندیدا برای احداث یک تسهیل در نظر گرفته شده است. جداول (۱) و (۲) ماتریس کوتاه‌ترین فاصله بین گره‌ها و همچنین نرخ‌های وقوع تقاضا را به ترتیب برای دو نوع مسأله با شبکه‌های دارای ۵ و ۱۰ گره نشان می‌دهند. در هر دسته از مسائل ۵ و ۱۰ گرهی، نرخ‌های وقوع تقاضا برای گره‌های شبکه در دو حالت $A1$ (حجم پایین تقاضا) و $A2$

۳- تحلیل سیستم‌های صف تسهیلات

همان‌گونه که پیشتر گفته شد در سیستم‌های صف تعریف شده برای تسهیلات، هر مشتری به هنگام مراجعه به تسهیل متناظر خود، با توجه به تعداد افراد موجود در سیستم خدمت‌دهی، در مورد ورود یا انصراف از ورود تصمیم‌گیری می‌نماید. با افزایش طول صف، تمایل مشتریان برای پیوستن به صف دریافت خدمات، کاهش می‌یابد. به منظور نشان دادن تأثیر معکوس جمعیت سیستم بر نرخ ورود مشتریان به سیستم، از تابع کاهنده b_n استفاده می‌شود. تابع کاهشی که بدین منظور در نظر گرفته شده است به صورت $b_n = \frac{1}{n+1}$ می‌باشد که در تحلیل سیستم‌های صفی که با انصراف قبل از ورود مواجه هستند به کرات مورد استفاده قرار گرفته است [۱۱]. با در نظر گرفتن این تابع، نرخ ورود به هر تسهیل از طریق رابطه زیر از نرخ مراجعه به دست می‌آید:

$$\bar{\lambda}_{nl} = \frac{\lambda_l}{n+1} \quad \forall l \in L, n \in N \quad (11)$$

متوسط نرخ ورود نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\lambda}_l = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{ln} \bar{\lambda}_{nl} \quad \forall l \in L \quad (12)$$

می‌توان نشان داد که مقادیر احتمالات حدی برای این سیستم صف از رابطه زیر به دست می‌آیند [۱۱]:

$$\pi_{ln} = \frac{e^{-\rho_l} \rho_l^n}{n!} \quad \forall l \in L, n \in N \quad (13)$$

که در آن، مقدار ρ_l به عنوان ضریب بهره‌وری تسهیل l به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_l = \frac{\lambda_l}{\mu} \quad \forall l \in L \quad (14)$$

ضریب بهره‌وری، نسبت تقاضا به عرضه را برای یک تسهیل نشان می‌دهد و واضح است که در سیستم‌های صف متعارفی که دارای یک خدمت‌دهنده هستند، این ضریب باید از یک کمتر باشد تا سیستم به حالت پایدار دست یابد. به دلایلی که در بخش آتی عنوان خواهند شد اعمال چنین شرطی در مدل صف معرفی شده، لازم نیست. با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۳)، رابطه (۱۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\bar{\lambda}_l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\rho_l} \rho_l^n}{n!} \frac{\lambda_l}{n+1} \quad \forall l \in L \quad (15)$$

با انجام قدری محاسبات ریاضی، شکل صریح متوسط نرخ ورودی به تسهیل l به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{\lambda}_l = \mu \left(1 - e^{\frac{-\lambda_l}{\mu}} \right) \quad \forall l \in L \quad (16)$$

حال که نرخ ورودی برای هر یک از تسهیلات مشخص شده

جدول‌های (۱) و (۲) معرفی شده‌اند. همان گونه که نتایج حل مثال‌های عددی نشان می‌دهند با افزایش نرخ خدمت تسهیلات، حجم تقاضای از دست رفته مشتریان کمتر می‌شود و برعکس، در صورتی که نرخ خدمت در مقابل نرخ‌های ورود، کم باشد، قسمت عمده‌ای از کل نیاز مشتریان به تقاضای از دست رفته تبدیل می‌شود.

در سیستم‌هایی که با مشتریان کم‌حوصله مواجه هستند و نرخ ورود به آنها، تابعی کاهنده نسبت به جمعیت سیستم است، همواره سیستم در حالت پایدار خواهد بود زیرا در صورتی که تعداد مشتریان موجود در سیستم به بینهایت، میل کند، نرخ ورود براساس تابع کاهنده، به سمت صفر میل خواهد کرد و در نتیجه هیچگاه جمعیت سیستم به بینهایت میل نخواهد کرد. با این اوصاف، برخلاف سیستم‌های متعارف صف، در چنین سیستم‌هایی، نیازی به اعمال شرط کوچک‌تر از یک بودن نرخ بهره‌وری نیست

جدول (۳): نتایج اجرای مدل برای شبکه‌های دارای ۵ گره

	تسهیلات فعال	نرخ تسهیلات		نرخ ورود	تعداد تسهیلات
		نرخ خدمت	نرخ فعال		
A1	۰/۱	۲,۰۴,۵	۰/۰۰	۲/۰۵	۱/۷۵
	۵	۱,۰۴,۵	۲/۶۲	۲/۰۵	۰/۱۶
A2	۱	۱,۰۴,۵	۰/۰۵	۱۳/۶۳	۱۰/۶۸
	۵	۱,۰۴,۵	۱/۲۳	۱۳/۶۳	۴/۷۸

جدول (۴): نتایج اجرای مدل برای شبکه‌های دارای ۱۰ گره

	تسهیلات فعال	نرخ تسهیلات		نرخ ورود	تعداد تسهیلات	
		نرخ خدمت	نرخ فعال			
۳	A1	۰/۱	۳,۸۰,۱۰	۰/۰۰	۵/۲۹	۴/۹۹
		۵	۱,۰۳,۴	۲/۱۳	۵/۲۹	۰/۹۴
	A2	۱	۳,۶,۷	۰/۰۰	۲۱/۳۰	۱۸/۳۰
		۵	۳,۴,۶	۰/۷۶	۲۱/۳۰	۱۰/۱۰
۵	A1	۰/۱	۲,۰۴,۶,۷,۱۰	۰/۰۰	۵/۲۹	۴/۷۹
		۵	۱,۲,۵,۷,۱۰	۴/۰۷	۵/۲۹	۰/۶۴
	A2	۱	۲,۰۴,۶,۸,۱۰	۰/۰۹	۲۱/۳۰	۱۶/۳۹
		۵	۱,۳,۵,۷,۸	۲/۳۰	۲۱/۳۰	۷/۸۰

۵- جمع‌بندی و ارائه پیشنهادها

مکان‌یابی تسهیلات پرازدحام با خدمت‌دهندگان ثابت یکی از پرکاربردترین انواع مسائل مکان‌یابی به شمار می‌رود که در طی دو دهه اخیر، توجه بسیاری از محققین این حوزه را به خود جلب کرده است. در این مقاله به مسأله مکان‌یابی تسهیلات پرازدحام با در نظر گرفتن انصراف قبل از ورود مشتریان پرداختیم. در مسأله تحت بررسی، چنین فرض شده است که هر مشتری به نزدیک‌ترین تسهیل مراجعه می‌نماید. مشتری به هنگام مراجعه به تسهیل متناظر خود، با

(حجم بالای تقاضا) مدنظر قرار گرفته‌اند تا امکان بررسی اثر حجم تقاضای مشتریان بر مکان استقرار تسهیلات، فراهم گردد.

جدول (۱): اطلاعات مربوط به مثال‌های ۵ تسهیلی

	۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳/۳				
۳	۱/۶	۲/۰			
۴	۷/۶	۲/۲	۲/۹		
۵	۳/۹	۹/۳	۹/۷	۹/۱	
A1	۰/۱	۰/۴	۰/۱	۰/۶	۰/۸
A2	۴/۰	۱/۴	۰/۶	۴/۲	۳/۴

جدول (۲): اطلاعات مربوط به مثال‌های ۱۰ تسهیلی

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	۱۱/۰									
۳	۴۲/۷	۲۵/۳								
۴	۱۱/۶	۳۶/۸	۲۸/۶							
۵	۰/۴	۱۸/۴	۰/۳	۶/۷						
۶	۳۸/۰	۱۷/۴	۴۷/۲	۳۵/۲	۶/۹					
۷	۲۹/۱	۱۶/۵	۲۳/۳	۱۲/۳	۸/۵	۱۰/۱				
۸	۱۱/۳	۱۱/۵	۴۷/۸	۱۷/۶	۲۸/۰	۲۸/۲	۲۹/۷			
۹	۹/۴	۴۶/۲	۱۱/۶	۲۱/۱	۳۱/۵	۲/۶	۱۵/۸	۳۵/۳		
۱۰	۴/۸	۲۱/۱	۳۸/۳	۳۵/۳	۳۲/۷	۲۰/۸	۱۶/۳	۳۸/۳	۴۰/۶	
A1	۰/۱	۰/۴	۰/۱	۰/۶	۰/۸	۰/۳	۰/۹	۰/۶	۰/۷	۰/۸
A2	۲/۹	۱/۳	۴/۰	۱/۹	۲/۸	۱/۲	۰/۹	۴/۲	۱/۱	۰/۹

در مثال‌های مربوط به شبکه‌های دارای ۵ گره، فرض شده است که از بین پنج سایت کاندیدا، سه سایت برای احداث تسهیلات، انتخاب شوند. در مثال‌های مربوط به شبکه‌های دارای ۱۰ گره، دو حالت (احداث ۳ تسهیل یا ۵ تسهیل) مدنظر قرار گرفته است. دو نوع نرخ خدمت نیز برای تسهیلات در نظر گرفته شده‌اند؛ در مثال‌های دارای حجم پایین تقاضا (گروه A1)، نرخ‌های خدمت ۰/۱ و ۵ و در مثال‌های دارای حجم بالای تقاضای (گروه A2)، نرخ‌های خدمت ۱ و ۵ به ترتیب نشان‌دهنده سرعت پایین و سرعت بالا برای ارائه خدمت در تسهیلات می‌باشند. با این اوصاف، در مجموع ۱۲ مثال عددی (۴ مثال برای شبکه‌های دارای ۵ گره و ۸ مثال برای شبکه‌های دارای ۱۰ گره) تولید شده و مدل ریاضی متناظر هر یک توسط نرم‌افزار بهینه‌ساز GAMS، حل‌کننده BARON حل شده است. نتایج به دست آمده از نرم‌افزار برای شبکه‌های ۵ و ۱۰ گرهی به ترتیب در جداول (۳) و (۴) گزارش شده‌اند. در این دو جدول، ستون‌های w ، w' و D به ترتیب مقدار تابع هدف تغییر یافته (رابطه (۱۸))، تابع هدف مدل اصلی (رابطه (۱)) که معادل تقاضای از دست رفته است) و مجموع کل نرخ‌های تقاضای مشتریان را نشان می‌دهند. همچنین سطرهای A1 و A2 نرخ‌های تقاضایی است که در

- as an M/G/1 queue, *Journal of Service Science & Management*, 3: 287-297.
- [9] Moghadas, F. M., Kakhki, H. T. (2011). Maximal covering location-allocation problem with M/M/k queuing system and side constraints, *Iranian Journal of Operations Research*, 2: 1-16.
- [10] Aboolian, R., Berman, O., Drezner, Z. (2009). The multiple server center location problem, *Journal of Operations Research*, 167: 337-352.
- [11] Narayan Bhat, U. (2008). *An Introduction to Queuing Theory: Modeling and Analysis in Applications*, Birkhauser Verlag.

توجه به تعداد مشتریانی که در صف انتظار دریافت خدمت رؤیت می‌نماید، تصمیم می‌گیرد که به تسهیل وارد شده و تا دریافت خدمت، منتظر بماند و یا آنکه از ورود به صف منصرف شود. این مسأله با هدف کمینه کردن مجموع تقاضاهای از دست رفته در قالب یک مدل ریاضی غیرخطی عدد صحیح آمیخته مدل‌سازی شد. از آنجایی که نرخ ورود مشتریان به هر تسهیل با افزایش تعداد مشتریان حاضر در تسهیل کاهش می‌یابد، از تابع کاهنده $\frac{1}{n+1}$ به منظور برآورد متوسط نرخ ورود مشتریان به هر تسهیل استفاده شده است. به منظور ارزیابی عملکرد مدل ریاضی، تعدادی مثال عددی ارائه و توسط نرم‌افزار بهینه‌ساز GAMS حل و نتایج تحلیل شدند.

در این مقاله، انصراف قبل از ورود به عنوان رایج‌ترین شکل بی‌حوصلگی مدنظر قرار گرفت. در بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی، ممکن است انصراف مشتری بعد از ورود به سیستم اتفاق افتد. در این نوع از بی‌حوصلگی، مشتری پس از پیوستن به صف، مدت زمان انتظار خود را در صف و سیستم برآورد می‌نماید و براساس آن، تصمیم می‌گیرد که همچنان در صف باقی بماند یا تسهیل را ترک کند. همچنین پس از ترک تسهیل، مشتری ممکن است به طور کلی از دریافت خدمت منصرف شود یا آنکه به تسهیل خلوت‌تری مراجعه نماید. بررسی این نوع از بی‌حوصلگی، می‌تواند حوزه جذابی برای مطالعات آتی باشد. همچنین در این مقاله شکل خاصی از تابع بی‌میلی مورد بررسی قرار گرفت؛ از آنجایی که توابع بی‌میلی، کاهش نرخ ورود مشتریان به تسهیلات را کنترل می‌کنند، توابع دیگری می‌توانند به منظور برآورد نرخ ورود مشتریان در نظر گرفته شوند.

۶- مراجع

- [1] Larson, R. C. (1974). A hypercube queuing model for facility location and redistricting in urban emergency services, *Computers and Operations Research*, 1: 67-95.
- [2] Larson, R. C. (1975). Approximating the performance of urban emergency service systems, *Operations Research*, 23: 845-868.
- [3] Wang, Q., Batta, R., Rump, C. (2002). Algorithms for a facility location problem with stochastic customer demand and immobile servers, *Annals of Operations Research*, 111: 17-34.
- [4] Berman, O., Drezner, Z. (2007). The multiple server location problem, *Journal of the Operational Research Society*, 58: 91-99.
- [5] Pasandideh, S. H. R., AkhavanNiaki, S. T. (2010). Genetic application in a facility location problem with random demand within queuing framework, *Journal of Intelligent Manufacturing*, 23: 651-659.
- [6] Chambari, A. H., Rahmati, S. H., Hajipoor, V., Karimi, A. (2011). A Bi-Objective Model for Location-Allocation Problem within Queuing Framework, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 54: 138 -145.
- [7] Berman, O., Huang, R., Kim, S., Menezes. (2007). Locating capacitated facilities to maximize captured demand, *IIE Transactions*, 39: 1015-1029.
- [8] Hamaguchi, T., Nakade, K. (2010). Optimal location of facilities on a network in which each facility is operating



Network Location for Congested Facilities Considering Balking

J. Arkat¹, Sh. Zamani

Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

ARTICLE INFO

Article history:

Received 26 April 2013

Accepted 31 August 2013

Keywords:

Network location,
Congested facilities,
Balking,
Impatient customers

ABSTRACT

In this paper, we investigate network location problem for congestible facilities, considering balking, the reluctance of customers to join the queue upon arrival. Balking often happens when the estimated waiting times by customers are more than their patience threshold. Based on the number of current customers, each customer decides to join or leave the system upon the arrival. Since balking is a usual issue in the real world situations, taking it into consideration increases the reality of mathematical models. In the proposed model, the selection of candidate sites and the assignment of customers to facilities are performed in such a manner that the total lost demands is minimized. We use a monotonically decreasing function to calculate arrival rates for facilities. In order to evaluate the proposed mathematical model, some numerical examples are presented and solved using GAMS.

¹Corresponding author.

Tel.: +98 8716624775; E-mail addresses: j.arkat@uok.ac.ir