نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید

سال نهم، شماره هجدهم، بهار و تابستان ۱۴۰۰، صفحه ۱۲۷-۱۴۱
www.ier.basu.ac.ir

ISSN: 2345-2269

DOI: 10.22084/ier.2022.4384

# مسأله زمان‌بندی تک‌ماشین با درنظر گرفتن اولویت‌های متغیر و زمان دسترسی کارها

سعیده غلامی[1*]، فاطمه گنجی[2]

۱. عضو هیأت علمی گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۲. دانشجوی دکترای مهندسی صنایع، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

**اطلاعات مقاله**

**تاریخچه مقاله:**
**دریافت ۱۴۰۰/۰۳/۲۴**
**پذیرش ۱۴۰۰/۰۵/۱۱**
**(مقاله پژوهشی)**

**کلمات کلیدی:**
**زمان‌بندی تک‌ماشین**
**سطوح اولویت**
**زمان دسترسی غیرقطعی**

**خلاصه**

در سال‌های اخیر، با افزایش روزافزون محیط رقابتی، اهمیت تحویل به‌موقع کالا و رضایت مشتری بیش از پیش نمودار شده است. لذا اهداف مرتبط با تحویل به‌موقع محصولات و خدمات به مشتری همچون کمینه‌سازی تعداد کار دارای دیرکرد توجه محققین را به‌خود جلب کرده است. هدف این پژوهش زمان‌بندی عملیات ماشین‌آلات به‌منظور کمینه‌سازی تعداد کارهای دیرکرددار وزنی در دو حالت تأخیر همراه با جریمه مالی و تأخیر همراه با فروش ازدست‌رفته است. در این مقاله زمان شروع انجام کار، متغیر تصمیم بوده و هر کار با محدودیت حداکثر یک‌بار انقطاع، پی‌گرفتنی می‌باشد، لیکن زمان در دسترس قرار گرفتن آن‌ها متفاوت در نظر گرفته می‌شود. همچنین زمان تکمیل هر عملیات در دو بازه دارای شناوری می‌باشد؛ ابتدای بازه، موعد تحویل کار بدون درنظر گرفتن جریمه و انتهای بازه، موعد تحویل با درنظر گرفتن جریمه تعیین می‌شود. بررسی اولویت متغیرکارها از نوآوری این پژوهش بوده؛ بدین ترتیب که با گذر زمان و نزدیک شدن کارها به موعد تحویل، کلیه کارها به سطوح اولویتی جدیدی وارد می‌شوند که این کار براساس عواملی مانند وزن کار و زمان باقیمانده از پردازش تعیین می‌شود. در این مقاله، ابتدا به مدل‌سازی ریاضی مسأله پرداخته شده و سپس توسط یک الگوریتم ابتکاری به حل مسأله و یافتن جواب‌های نزدیک بهینه پرداخته می‌شود. برای این منظور، تعداد ۲۷۰۰ مسأله نمونه تولید و هریک توسط نرم‌افزار گمز و الگوریتم ابتکاری حل شده است. نتایج به‌دست آمده، عملکرد نسبتاً خوب الگوریتم ابتکاری را در رسیدن به جواب نزدیک بهینه در مدت زمان منطقی نشان می‌دهند.

## ۱. مقدمه

امروزه مسائل زمان‌بندی در بسیاری از سیستم‌های تولیدی و خدماتی کاربرد وسیعی یافته‌اند. جوهره مسائل زمان‌بندی به تصمیم‌گیری در مورد تخصیص منابع و توالی عملیات منحصر می‌شود. زمان‌بندی، تخصیص منابع در طول زمان برای اجرای مجموعه‌ای از کارها است. سه دسته هدف عمده در زمان‌بندی مطرح است. این اهداف شامل بهره‌برداری کارا از منابع، پاسخ‌گویی سریع به تقاضا و انطباق دقیق زمان‌های تکمیل با موعدهای تحویل تعیین‌شده می‌باشد. دو نوع محدودیت مربوط به امکان‌پذیری معمولاً در مسائل زمان‌بندی ظاهر می‌شود: یکی محدودیت‌های دسترس‌پذیری منابع و دیگری محدودیت‌های تکنولوژیکی در ترتیب انجام کارها می‌باشد [۱].

در اکثر مسائل زمان‌بندی فرض می‌شود ماشین در طول افق برنامه‌ریزی به‌طور پیوسته کار می‌کند. این فرض ممکن است در برخی از حالت‌ها صحیح باشد، اما با درنظرگرفتن عواملی چون عملیات نگهداری و تعمیر، خرابی‌ها و یا سایر محدودیت‌های مرتبط با دسترسی ماشین‌آلات، این فرض صحیح نیست. دو گروه کلی برای مسائل با محدودیت دسترسی درنظر گرفته شده که براساس ثابت و یا انعطاف‌پذیر بودن محدودیت دسترسی تقسیم‌بندی شده‌اند که در گروه

* نویسنده مسئول: سعیده غلامی
تلفن: ۸۴۰۶۳۳۵۶-۰۲۱؛ پست الکترونیکی: s_gholami@kntu.ac.ir

دوم زمان شروع دوره عدم دسترسی، یک متغیر تصمیم است و تحت عنوان زمان‌بندی تک‌ماشین با دوره عدم دسترسی انعطاف‌پذیر از آن یاد می‌شود [۲]. بدین صورت که هر کار، هنگام پردازش، ماشین را همراه با کارهای زمان‌بندی شده شناور، گویی به‌صورت ماشینی با محدودیت دسترسی می‌بینند که به تدریج با ورود کارهای بیشتر، از زمان دسترسی ماشین می‌کاهد. همچنین هر کار دارای اولویت جهت پردازش می‌باشد که با گذر زمان، کارها به سطوح اولویتی جدید وارد شده و اولویت آن‌ها نسبت به یکدیگر تغییر می‌کند. لذا در ادامه باتوجه به جدید بودن نگرش و عدم وجود مطالعات مشابه در ادبیات موضوع، ناگزیر به مرور ادبیات موضوع با مفاهیم محدودیت دسترسی و تشریح مفهوم انعطاف‌پذیری پرداخته شده است. همچنین ادبیات مربوط به اولویت کارها و زمان‌بندی مجدد و همچنین رویکرد در نظرگیری پنجره زمانی مرور گردیده است.

دسترسی محدود ماشین‌آلات می‌تواند ناشی از برنامه‌های قبلی زمان‌بندی باشد، چراکه اکثر مسائل برنامه‌ریزی در دنیای واقعی پویا هستند و داده‌های ورودی پیوسته به‌هنگام می‌شوند. چنین حالتی در سطوح عملیاتی زمان‌بندی تولید اتفاق می‌افتد، به‌طوری‌که کارهای جاری به بازه‌های زمانی خاص و ماشین‌ها تخصیص می‌یابند و هنگامی که کارهای جدید به کارگاه می‌رسند، کارهای قبلی به برخی از بازه‌های زمانی و ماشین‌آلات تخصیص یافته‌اند، لذا کارهای جدید باید در بازه‌های پردازش در دسترس باقیمانده پردازش شوند [۳].

کاربرد دیگر دسترسی محدود ماشین در سیستم‌های عملیاتی با یک یا چند پردازنده مشاهده می‌شود، که در آن‌ها برنامه‌های با اولویت بالاتر با برنامه‌های در حال اجرا تداخل می‌کنند و بعضی از زمان‌ها جهت اجرای برنامه‌های با اولویت بالاتر از قبل رزرو می‌شوند. محدودیت دسترسی همچنین می‌تواند در سیستم‌های کامپیوتری چندکاربره به‌وجود آید؛ در این حالت معمولاً پردازشگر در زمان‌های خاصی به یک کاربر تخصیص می‌یابد و این زمان‌های خاص برای کاربران دیگر این پردازشگر به‌صورت بازه‌های عدم دسترسی نمود می‌یابند [۱].

در فضای رقابتی امروز باتوجه به افزایش روزافزون قدرت مشتریان، ارائه برنامه زمان‌بندی مناسب برای هریک از سازمان‌های تولیدی و خدماتی امری اجتناب‌ناپذیر است؛ هریک از سازمان‌های تولیدی و خدماتی به‌منظور رسیدن به اهداف خود و کسب سهم مناسب از بازار مشتریان خود، در تلاش‌اند تا به بهترین شکل، تخصیص و توالی فعلیت‌های خود را تعیین نمایند [۴].

در شرایط واقعی به‌ویژه در صنایع ملی کشور، در بیشتر صنایع تحویل به‌موقع بر طبق وعده مشتری، علی‌رغم اهمیت بسیار بالا، همواره با چالش و مشکلات زیادی روبه‌رو بوده است. به‌طوری‌که عدم تحویل به‌موقع محصول، به یکی از دغدغه‌های همیشگی مشتریان بدل شده است. از طرفی فقدان راهکار علمی مناسب و در دسترس تولیدکنندگان، هزینه‌های تولید را افزایش داده؛ به‌نحوی که برآوردن انتظار مشتریان و تحویل به‌موقع کالا باتوجه به محدودیت‌های درونی محیط‌های تولیدی، باعث بالا رفتن قیمت کالا شده و چنین تولیدی را از نظر اقتصادی مقرون‌به‌صرفه نمودار نمی‌سازد. لذا با اتخاذ رویکرد مناسب می‌تواند هزینه‌های مربوط به جریمه دیرکرد را کاهش داد.

از کاربردهای بسیار مهم مسأله، می‌توان به اهمیت اولویت مشتریان نسبت به یکدیگر اشاره کرد؛ همان‌طور که در دنیای امروز تجارت الکترونیک بسیار رواج یافته است، دراکثر موارد کابران سیستم در زمان‌های نامشخص به یک سیستم پشتیبان متصل و خدمت خود را دریافت می‌کنند. لذا در بسیاری از مطالعات گذشته بدون توجه به موضوع فوق، فرض را بر در دسترس بودن کارها در ابتدای زمان‌بندی دانسته و کلیه کارها را از اولویت قطعی نسبت به یکدیگر برخوردار می‌دانند؛ که در بازار امروز این فرض، دور از واقعیت است.

پژوهش‌ها نشان داده است در بین عوامل متعدد لحاظ شده در انتخاب پیمانکاران، زمان پاسخ‌گویی در کنار قیمت و کیفیت، مهم‌ترین عوامل بوده‌اند.

در بررسی موعد تحویل، معمولاً دو نوع هزینه آشکار می‌گردد:

۱) هزینه تعیین موعد تحویل

۲) هزینه تعیین موعد تحویل کوتاه

موعد تحویل باید به‌گونه‌ای تعیین شودکه مجموع هزینه‌های فوق حداقل گردد [۵].

تابع هدف تعداد کارهای دیرکرددار می‌تواند نشان‌دهنده تعداد تقاضاهای برآورد نشده مشتریان می‌باشد. لذا درنظر گرفتن این عامل، یک هدف منطقی و مورد توجه مدیریت تولید است [۳].

در مسائل زمان‌بندی کاربردی، ممکن است انواع متفاوتی از مشتریان وجود داشته باشد. برخی از مشتریان، نمی‌توانند تأخیر را تحمل کنند؛ به‌همین دلیل ممکن است هزینه بیشتری را برای تحویل به‌موقع کالای خود بپردازند. اما برخی مشتریان، به هزینه بیشتر از زمان اهمیت می‌دهند؛ بنابراین یک زمان‌بندی خوب باید به‌طور هم‌زمان، تقاضاهای مختلف انواع مشتریان را برآورده سازد [۶].

بسیاری از تحقیقات انجام شده در ادبیات موضوع، بر روی حالات قطعی و توسعه آن‌ها مطالعه کرده‌اند. در بسیاری از آن‌ها یک فرض اساسی وجود دارد که داده‌ها از قبل مشخص می‌باشند؛ و زمان‌بندی تمام کارها در ابتدای افق برنامه‌ریزی باتوجه به این موارد انجام می‌پذیرد. در زمان‌بندی چنین مسائلی را زمان‌بندی برون خط[2] می‌نامند. این تصور که همه کارها در لحظه صفر در دسترس می‌باشند تقریباً غیرممکن بوده و کلیه برنامه‌ریزی‌های بعدی را تحت الشعاع قرار می‌دهد. براین اساس، عدم قطعیت در محیط زمان‌بندی شرایط ورود کار جدید و زمان‌های پردازش نامعلوم را سبب می‌شود.

محیط واقعی تولید آمیخته‌ای از عدم قطعیت و فرآیندهای تصادفی می‌باشد که اثرات کلیدی بر روی استفاده از منابع همچون خرابی ماشین‌آلات و ورود کارهای پیش‌بینی نشده با اولویت بالاتر دارد. در زمان‌بندی تصادفی، اطلاعات جدید به‌طور پیوسته در دسترس قرار می‌گیرند. زمان اتمام کارها، زمان در دسترس قرار گرفتن کارها و

2. Offline

موعدهای تحویل اطلاعات جدیدی در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار می‌دهد که می‌بایست تعیین کند زمان‌های باقیمانده را چگونه زمان‌بندی نماید. آزادی عمل تصمیم‌گیرنده در استفاده از اطلاعات جدید، مبنایی برای ایجاد خط‌مشی‌های مختلف در تصمیم‌گیری است. چهار خط‌مشی کلی در این زمینه وجود دارد؛ یکی از آن‌ها به نام لیست ایستای غیرمنقطع است که تمام کارها در لحظه صفر در دسترس قرار گرفته و براساس اولویت چیده شده و لیست اولویت‌ها تا پایان زمان‌بندی تغییر نخواهد کرد [۷].

لیست ایستای منقطع، خط‌مشی دیگری است که کارها در لحظه صفر براساس لیست اولویتی زمان‌بندی می‌شوند؛ لیکن زمان‌های در دسترس غیرصفر می‌باشند؛ لیست اولویت‌ها هیچ‌گونه تغییری ندارد و در هر لحظه از زمان، کاری که در بالای لیست اولویت و در دسترس قرار دارد مورد پردازش قرار می‌گیرد [۷].

در خط‌مشی پویای غیرمنقطع، در هر لحظه که ماشین آزاد باشد، تصمیم‌گیرنده تعیین می‌کند کدام کار باید مورد پردازش قرار گیرد. ممکن است تصمیم وی به کل اطلاعات در دسترس وابسته باشد. همچنین خط‌مشی پویای منقطع، همچون حالت قبل به کلیه اطلاعات جهت تصمیم‌گیری باتوجه به امکان انقطاع کارهای در حال پردازش، نیاز دارد [۷].

تشابه‌های بسیاری در زمان‌بندی احتمالی با زمان‌های در دسترس و اولویت در نظریه صف وجود دارد. در نظریه صف پشتیبان می‌بایست کارها را در کلاس‌های مختلف اولویتی پردازش کند. تشابه این دو حوزه این است که کارهای مختلف دارای زمان‌های پردازش متفاوت با توزیع‌ها و وزن‌های متفاوت می‌باشند. با این وجود تفاوت‌های بسیاری نیز وجود دارد، یکی از تفاوت‌های مهم این است که در زمان‌بندی، هدف نوعا کمینه‌سازی معیاری است که $n$ کار را دربرمی‌گیرد، در حالی‌که در صف فرض می‌شود یک جریان نامتناهی از مشتریان وجود دارد و تمرکز بر روی نتایج تقریبی است. در زمان‌بندی هدف پیدا کردن روشی است که تابع هدف موردنظر مربوط به $n$ کار کمینه یا هزینه مورد انتظار آن بررسی شود؛ اما در صف، هدف محاسبه زمان مورد انتظار مشتریان خاص یا مشتریان یک کلاس در حالت پایدار و سپس تعیین خط‌مشی جهت کمینه‌کردن میانگین هزینه‌های مرتبط با هر مشتری یا هر کلاس از مشتری است. با این وجود از برخی خط‌مشی‌های موازی در این دو حوزه می‌توان به‌عنوان رویکردهای کاربردی در تحقیقات بهره گرفت [۷]. آنچه در این پژوهش مدنظر قرار گرفته است، مسأله‌ای با ماهیت ایستای منقطع بوده که در آن اولویت کارها، نه‌تنها ثابت نبوده، بلکه با گذر زمان، با تغییر فاکتورهای مؤثر، تغییر کرده و زمان‌بندی کارها را دستخوش پیچیدگی می‌نماید.

## ۲. ادبیات موضوع

لاو و همکاران [۸] مسأله زمان‌بندی تک‌ماشین با عدم دسترسی دوره‌ای انعطاف‌پذیر و هدف کمینه‌کردن بیشینه زمان تکمیل و با فرض کارهای ازسرگرفتنی را مورد بررسی قرار دادند. در این بررسی یک الگوریتم ابتکاری ارائه شده است که نوآوری آن، امکان جابه‌جایی دوره عدم دسترسی به اندازه مدت زمان $d$ می‌باشد.

مشکانی و مصلحی [۳] مسأله کمینه‌سازی تعداد کار دیرکرددار را با محدودیت دسترسی انعطاف‌پذیر باتوجه به میزان کارکرد ماشین در دوره‌های قبلی مورد بررسی قرار داده و یک الگوریتم ابتکاری و همچنین روش شاخه و کران را برای حل مسأله ارائه داده‌اند. همچنین ایشان در مقاله دیگری [۹] مسأله مزبور را با تابع هدف کمینه‌سازی زمان تکمیل کارها ارائه نموده‌اند. حمیدرضا فرداد و همکاران [۱۰] نسل جدیدی از شبکه‌های شهری را مورد توجه قرارداده و با تعریف کلاس‌های مختلف، محیط کاملاً انعطاف‌پذیری را جهت استفاده کاربران فراهم آورده‌اند. باتوجه به این‌که عمده داده‌های ارسال شده روی شبکه را بسته‌های $IP$ تشکیل می‌دهند؛ ایشان مکانیزم صف‌بندی مؤثر برای ایستگاه‌های شبکه $RPR$ به‌منظور نگاشت بهتر میان کلاس‌های ترافیک ارائه داده‌اند. سه کلاس سرویس متفاوت، شامل ارسال سفارشی، ارسال مطمئن و بهترین تلاش را تعریف و بااستفاده از اولویت‌های حذف چندگانه، روش صف‌بندی چندسطحی را پیشنهاد داده‌اند.

دنی هرملین و همکاران [۱۱] الگوریتم جدیدی برای کمینه‌سازی تعداد کارهای دیرکرددار وزنی ارائه داده‌اند؛ در این الگوریتم سه پارامتر که گویای تنوع داده‌های ورودی مسأله (زمان‌های پردازش، موعدهای تحویل و وزن کارها) بوده را درنظر گرفته و باتوجه به مقادیر مختلف پارامترها، به اثبات میزان سختی مسأله و ارائه راه‌حل پرداخته‌اند. به‌طور مثال نشان داده‌اند که مسأله $1||\sum w_j U_j$ درحالتی‌که تنوع موعدهای تحویل برابر با یک باشد، یک مسأله $Np\text{-}hard$ می‌باشد. همچنین نشان داده‌اند درصورتی‌که تنوع زمان‌های پردازش و وزن کارها برابر با یک باشد، مسأله در زمان چندجمله‌ای قابل حل می‌باشد.

ام هلا و بوفلین [۱۲] مسأله کمینه‌سازی تعداد کارهای دیرکرددار وزن‌دار را با درنظر گرفتن زمان‌های در دسترس بااستفاده از الگوریتم شاخه و کران حل نمودند. بااستفاده از مسأله کوله‌پشتی حدود جواب مسأله را در الگوریتم محدود نمودند.

کرامر و لی[۱۳] برای موعد تحویل کارها، کمینه‌سازی تعداد کار دیرکرددار وزنی را با پنجره زمانی درنظر گرفته و مسأله را بااستفاده از الگوریتم برنامه‌ریزی پویا از تک‌ماشین به ماشین‌های موازی توسعه داده‌اند. همچنین در رابطه با پنجره زمانی انگر و همکاران [۱۴] مسأله کمینه‌سازی تعداد کارهای دیرکرددار را مورد بررسی قرار دادند درحالی‌که بزرگترین پنجره زمانی از کوچکترین زمان پردازش کارها، کوچکتر مساوی می‌باشد. سیدنی [۱۵] کمینه‌سازی بیشترین زودکرد و دیرکرد را با درنظرگیری پنجره زمانی برای شروع و اتمام کار بررسی کرده‌اند. چنگ [۱۶] مسأله پنجره زمانی برای موعدهای تحویل را با درنظرگیری محدودیت کوچکتر بودن پنجره‌های زمانی موعدهای تحویل از کوچکترین زمان پردازش مورد مطالعه قرار داده‌اند.

بریاند و اوری [۱۷] کمینه‌سازی تعداد کارهای دیرکرددار را روی تک‌ماشین با درنظر گرفتن پنجره زمانی برای پردازش، مورد مطالعه

قرار داده‌اند. انقطاع مجاز نبوده و بازه $[r_j, d_j]$ را برای پردازش کار درنظر گرفته و یک مدل ریاضی $MIP$ برای آن توسعه داده‌اند.

در مسائل زمان‌بندی مجدد، معمولاً دو فاکتور درنظر گرفته می‌شود؛ یکی کارایی زمان‌بندی جدید نسبت به زمان‌بندی قبل که با اندازه‌گیری تابع هدف تعیین می‌شود، مانند کمینه‌سازی زمان تکمیل کل، زمان اتمام وزن‌دار، هزینه دیرکرد کل و تعداد کار دیرکرددار و ... و معیار دیگر ثبات زمان‌بندی می‌باشد؛ که به درجه انحراف زمان‌بندی مجدد از حالت قبل اشاره دارد. این درجه انحراف را می‌توان با تغییراتی که در زمان تکمیل رخ می‌دهد؛ و یا تغییراتی که در توالی کارها یا زمان شروع آن‌ها رخ می‌دهد اندازه گرفت. معمولاً زمان‌بندی‌های مجدد بر روی مدل‌سازی این دو معیار تمرکز دارند.

بیبو یانگ [۱۸] زمان‌بندی مجدد کارها را برای ورود یک کار جدید مورد مطالعه قرار داده‌اند. برای جلوگیری از اثرات منفی زمان‌بندی مجدد روی زمان‌بندی اولیه، زمان‌های پردازش کار جدید می‌تواند در هزینه، کاهش ایجاد کند که آن را هزینه فشردگی زمان نامیده‌اند. هدف، کمینه‌سازی تابع هزینه پس از زمان‌بندی مجدد است که دربردارنده هزینه‌های فشردگی و هزینه‌های اختلال در زمان‌بندی اولیه و سایر هزینه‌های زمان‌بندی کلاسیک است. در این پژوهش، دو فاکتور اندازه‌گیری کارایی، زمان اتمام کارها و زمان دیرکرد وزن‌دار درنظر گرفته شده و الگوریتم‌هایی با زمان حل چندجمله‌ای برای زمان اتمام کل و یک الگوریتم ابتکاری برای زمان دیرکرد وزن‌دار ارائه شده است. هال و پات [۱۹] زمان‌بندی مجدد کارهای ورودی را با تابع هدف کمینه‌سازی هزینه کل بررسی و معیار کارایی را زمان در جریان کل درنظر گرفته‌اند. همچنین برای مسأله، دو مدل ارائه داده که در یکی از آن‌ها کمینه‌سازی هزینه باتوجه به محدودیت انحراف از زمان‌بندی اولیه بررسی شده است؛ در دیگری دو هزینه اصلی زمان‌بندی و هزینه انحراف در نظر گرفته شده است.

وو و همکاران [۲۰] یک هدف مختلط را برای زمان‌بندی مجدد تک‌ماشین ارائه داده‌اند. هزینه‌های مورد بررسی شامل هزینه زودکرد، هزینه تأخیر و هزینه تغییر توالی است. نال و همکاران [۲۱] مسأله زمان‌بندی مجدد تک‌ماشین با ورود کار جدید را بررسی کرده‌اند. تابع هدف، کمینه‌سازی زمان اتمام کل و زمان اتمام وزن‌دار کارها بوده که با ورود کار جدید بدون نیاز به زمان آماده‌سازی، منجر به دیرکرد سایر کارها نیز نشود.

ترخوف و همکاران[۵] در مطالعات خود به ترکیب مسائل زمان‌بندی با نظریه صف بر روی دسته مسائل فلوشاپ دو ماشینه پرداخته‌اند. مسائل زمان‌بندی پویا شامل ترکیبی از هر دو چالش در زمان‌بندی کلاسیک و تصادفی است که به‌دلیل عدم قطعیت در زمان ورود کارها، نیازمندی‌های منابع و زمان‌های پردازش کارها پدید می‌آید. در مورد این دو چالش در این بررسی روی تلفیق نظریه صف و زمان‌بندی تمرکز شده است. در مسائل صف، ویژگی‌های درازمدت تصادفی مورد بحث قرار می‌گیرد؛ درحالی‌که مسائل زمان‌بندی، با موارد کوتاه مدت درگیر است. به‌نظر می‌رسد این تحقیق برای اولین‌بار ترکیب صف در زمان‌بندی را ارائه و ارزیابی می‌کند.

ازآنجاکه کارهای جدید، می‌بایست پس از در دسترس قرار گرفتن با مجموعه یکپارچه شوند؛ کارهای مختلف نیازمندی‌های متفاوتی برای پردازش روی منابع مختلف دارند و این ویژگی‌ها تا زمانی‌که کار به پشتیبان برسد (در دسترس قرار گیرد)، شناخته نمی‌شوند؛ باتوجه به افق زمان‌بندی، ممکن است توابع هدف متناقضی پیش بیاید. برای مثال توابع کوتاه مدت مانند کمینه‌سازی ماکزیمم دیرکرد و زمان تکمیل کل و در حالت درازمدت ممکن است کنترل الگوی مورد انتظار تقاضا مدنظر باشد.

در زمان‌بندی، هدف به‌دست آوردن توالی برای به‌دست آوردن معیار بهینه برای کارها در زمان دسترسی واقعی آن‌ها است. اغلب در ارزیابی عملکرد الگوریتم‌ها، از زمان محدود به معیارهای کوتاه مدت، فراتر می‌روند. در مقابل اهداف بلندمدت بر روی اندازه‌گیری عملکردی مانند پایداری تمرکز می‌کند که ثابت می‌کند آیا تعداد کارها، در یک افق نامحدود زمانی برای پارامترهای خاص سیستم، محدود باقی می‌ماند؟ برای حل مسأله زمان‌بندی پویا، کارها می‌بایست باتوجه به زمان شروع آن‌ها و سایر محدودیت‌ها، تخصیص داده شوند. با ورود کارها نیاز به پردازش برخط جهت تصمیم‌گیری است که برای حل آن‌ها نمی‌توان از رویکرد برون‌خط استفاده کرد. حل مسائل پویا، چالشی بین واکنش ترکیبی بین کارها، منابع و زمان است و باتوجه به تصادفی بودن، تصمیم‌گیری با استفاده از اطلاعات شناخته شده قطعی در نقطه تصمیم و خواص تصادفی بودن سناریوهایی که ممکن است در آینده رخ دهد، صورت می‌گیرد.

زمان‌بندی تصادفی اغلب دربردارنده اطلاعاتی از مسأله زمان‌بندی قطعی است که مقدار مورد انتظار یا برخی اندازه‌های احتمالی از توابع هدف را بهینه می‌کند. در زمان‌بندی پویا، رویکرد حل زمان‌بندی دوره‌ای با مجموعه‌ای از زیرمسأله‌های ایستا سازگار می‌شود. در یک زمان داده شده، مسأله ایستا دربردارنده کارهایی است که در حال حاضر در سیستم وجود دارند و با حل آن تابع هدف کوتاه مدت بهینه می‌شود. این زمان‌بندی به اجرا در می‌آید تا زمانی‌که زیرمسأله بعدی ورود کند. این نگرش به معنای این است که روش‌های توسعه داده شده برای مسائل ایستا به‌طور مستقیم قابل به‌کارگیری در پویا می‌باشند. با وجود این، آن‌ها تمایل به نگاه بلندمدت به عملکرد و خواص تصادفی سیستم دارند. ادبیات موضوع صف بیشتر به‌دنبال تعیین حالت پایدار پارامترهای سیستم مانند شرایط ثبات، میانگین زمان انتظار و میانگین طول صف است. همچنین سهم مهمی در ادبیات بر روی تعریف مدل‌ها برای عملکرد حالت پایدار، رفتار انتقال (گذار) و چشم‌انداز مدل متمرکز است. فضای نظریه صف با چشم‌انداز مدل‌ها که طراحی و کنترل سیستم نامیده می‌شوند سروکار دارد. در هر دو مسائل طراحی و کنترل صف هدف پیدا کردن مقادیر بهینه برای پارامترهای قابل کنترل در صف است. این پارامترها شامل تعداد ماشین‌های در دسترس برای پردازش کارهای رسیده، ظرفیت صف، نرخ ورود کارها به صف، نرخ خدمت‌دهی به کارها و ترکیبات آن‌هاست.

مسائل طراحی در صف ایستا هستند درحالی‌که مسائل کنترلی پویا می‌باشند، هدف در این مسائل معمولاً تعیین واکنش بهینه در زمانی است که سیستم در حالتی خاص به‌سر می‌برد. ترخوف [۵] مفروضات زیر را در پژوهش خود درنظر گرفته است:

- در مدل صف، توزیع زمان ورود کارها از قبل مشخص است.
- فرض بر این است که مدت زمان انجام کار و توزیع آن به محض ورود یک کار مشخص می‌شود. لیکن در مدل صف فرض می‌شود توزیع کارها از قبل مشخص اما زمان واقعی انجام کار در دسترس نیست تا زمانی‌که به اتمام برسد.
- در زمان‌بندی کلاسیک، مدت زمان دقیق پردازش کار قبل از ایجاد ساختار زمان‌بندی شناخته می‌شود.

این دو رویکرد (توزیع احتمالی و زمان واقعی در هنگام وقوع) می‌توانند با استفاده از تاریخچه داده‌ها به‌کار گرفته شوند و فعالیت‌های مشابه به‌طور متناوب اجرا شوند؛ در این صورت هر دو فرض درنظر گرفته شده است.

تفاوت این رویکرد با حالت برخط در این است که در حالت برخط هیچ‌گونه پیش‌فرض و اطلاعی در مورد شناخت زمان‌های ورود و توزیع مدت آن وجود ندارد. جهت تعیین تابع اولویت باتوجه به ادبیات موضوع موردنظر، سه رویکرد متفاوت دیده می‌شود:

- استفاده از تابع خط برازش (رگرسیون) و بررسی معناداری برخی فاکتورها بر روی میزان رضایت از طریق آزمون فرض
- استفاده از روش‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره برای رتبه‌بندی مشتریان باتوجه به شاخص‌های رضایت‌مندی ایشان
- استفاده از روش‌های داده‌کاوی جهت تحلیل داده‌های واقعی

در تحقیقات صورت گرفته در مورد موعد تحویل، غالباً یک مدل ریاضی بهینه‌سازی یا یک مدل رگرسیون ارائه شده که براساس آن موعد تحویل بهینه تعیین می‌گردد. در نتیجه میزان دوباره‌کاری‌ها تأثیر مهمی بر هزینه و زمان پروژه دارد. لذا تعیین سیاست‌ها و تخصیص منابع پروژه باید به‌گونه‌ای باشد که کمترین دوباره‌کاری ایجاد گردد. کشف دوباره‌کاری‌ها در مراحل اولیه بسیار بهتر از کشف آن‌ها در مراحل پایانی پروژه است. بنابراین تضمین کیفیت و نحوه اجرای آن، اهمیت فوق‌العاده می‌یابد.

### ۲-۱. پیچیدگی مسأله

مور [۲۲] مسأله کمینه‌سازی تعداد کار دیرکرددار بر روی یک ماشین را مورد مطالعه قرار داده و یک الگوریتم با زمان حل چندجمله‌ای برای حل بهینه مسأله ارائه داد. لنسترا [۲۳] مسأله کمینه‌سازی تعداد کار دیرکرددار وزنی با زمان‌های دسترسی متفاوت را مورد بررسی قرار داده و نشان داد که پیچیدگی مسأله *strongly Np-hard* است؛ همچنین نشان دادند مسأله مزبور در حالت وزن‌های مساوی نیز *strongly Np-hard* می‌باشد. باتوجه به این‌که مسأله موردنظر در این نوشتار، علاوه‌بر زمان‌های در دسترس متفاوت و تابع هدف تعداد کار دیرکرددار وزنی، دارای محدودیت سطوح اولویتی متفاوت نسبت به زمان نیز می‌باشد و نیز با گذر زمان، سایر کارهای قبلی چیده شده نیز، زمان‌بندی مجدد می‌شوند و تا رسیدن به آخرین کار، محل دقیق کارهای قبلی هنوز تثبیت نگردیده است؛ باتوجه به این‌که محدودیت اولویت‌های متغیر به پارامترهای ورودی اضافه گردیده، لذا مسأله مورد پژوهش در این نوشتار، از مسأله کمینه‌سازی تعداد کار دیرکرددار وزنی با زمان‌های دسترسی متفاوت آسان‌تر نخواهد بود. همچنین امکان انقطاع داشتن کارها موجب می‌شود که در برخی از بازه‌های زمانی، به‌دلیل منقطع شدن برخی کارها، به تعداد تکه کارهای موردنظر جهت زمان‌بندی افزوده شده و این امر باعث سخت‌تر شدن مسأله می‌گردد. باتوجه به توضیحات فوق، پیچیدگی مسأله مورد بررسی در این نوشتار حداقل به اندازه پیچیدگی مسأله کمینه‌سازی تعداد کار دیرکرددار وزنی با زمان‌های دسترسی متفاوت بوده و *strongly Np-hard* می‌باشد.

## ۳. تعریف مسأله

معیار عملکردی که در این تحقیق موردنظر می‌باشد، تعداد کارهای دیرکرددار وزنی می‌باشد که در دو بازه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فرض می‌شود هر کار دارای زمان پردازش معلوم بوده و دو بازه جهت تحویل به مشتری نیز معلوم است. بازه اول مربوط به زمان در دسترس قرارگرفتن کار تا رسیدن به موعد تحویل ($d_j$) است؛ که در صورت ارائه خدمت به مشتری در این بازه، رضایت مشتری جلب شده است. بازه دوم مربوط به فاصله بین موعد تحویل ($d_j$) و موعد تحویل همراه با دریافت جریمه دیرکرد ($\acute{d_j}$) بوده که پس از این بازه، انصراف مشتری اتفاق می‌افتد. ماشین در طول دوره زمان‌بندی، برای پردازش هر کار به مدت ثابت $p_j$ مشغول می‌باشد؛ که البته به‌دلیل مجاز بودن حداکثر یک‌بار انقطاع، می‌تواند به‌صورت پیوسته انجام نپذیرد. دو بازه مربوط به موعد تحویل خدمت به مشتری، بدون دیرکرد و با درنظرگرفتن دیرکرد، از قبل معلوم است. بازه اول نشان‌دهنده بازه‌ای است که از نظر مشتری، همراه با رضایت بوده، لیکن باتوجه به برخی فاکتورهای مرتبط با مشتری، به تدریج با نزدیک شدن به انتهای این بازه، اهمیت اتمام پردازش مربوط، بیشتر می‌شود. در این نوشتار، اهمیت مذکور به‌صورت سطوح فوریت مطرح می‌شود. این سطوح فوریتی به‌صورت تابعی شکسته خطی از برخی پارامترهای مربوط به مشتری تعیین می‌گردد. با این توضیح که اگر به سفارش مشتری $i$ام پس از در دسترس قرارگرفتن آن، پاسخ داده نشود؛ با گذر زمان و نزدیک شدن به انتهای بازه اول، سطح فوریت آن کار افزایش می‌یابد. لازم به‌ذکر است که سطوح فوریت هر کار با سایر کارها می‌تواند متفاوت می‌باشد. فرض می‌شود کلیه کارها دارای زمان پردازش و موعد تحویل از پیش معلوم هستند. کلیه کارهای مجموعه $N$ مستقل از یکدیگر و پی‌گرفتنی بوده و در زمان صفر در دسترس نمی‌باشند، زمان در دسترس قرار گرفتن کارها از فرآیند تصادفی مارکوفی پیروی می‌کند. یکی از نوآوری‌های مسأله در تعیین نحوه زمان‌بندی کارها باتوجه به سطوح فوریتی تغییرپذیر نسبت به زمان است. همان‌طور که در دنیای واقعی نیز موارد بسیاری دیده می‌شود؛ یک کار از لحظه ورود به محیط زمان‌بندی در طول بازه‌ای مشخص، ممکن است دارای

فوریت‌های متفاوتی نسبت به سایر کارهایی باشد که در زمان‌های مختلف در دسترس ماشین قرار می‌گیرند. در نهایت، پس از مدت زمانی، اولویت مزبور از بین رفته که مصداق بارز آن، حالت فروش ازدست‌رفته است. پس از تعیین فوریت یک کار، با ضرب مقدار آن در وزن یا اهمیت مشتری، اولویت مشتری به‌دست می‌آید. لذا با درنظر گرفتن تابع مناسبی از وزن کار (مشتری) موردنظر، مدت زمان سپری شده از زمان ورود کار، موعد تحویل کار، میزان شناوری کار و ... می‌توان به سطوح فوریتی و نهایتاً اولویتی مختلف کارها دست یافت. به‌عبارت دیگر، هر کار در بازه اول و یا دوم خود، دارای شناوری می‌باشد؛ با ورود هر کار جدید، باتوجه به اولویت آن کار و تابع هدف، زمان‌بندی مجدد صورت می‌پذیرد. لازم به‌ذکر است که باتوجه به انقطاع‌پذیر بودن کارها، هنگام زمان‌بندی مجدد، ممکن است برای یک کار، به زمان‌بندی مجدد قسمت منقطع شده از آن کار و یا بررسی مجدد حالت بدون انقطاع موردنیاز باشد. همزمان با انتخاب نقطه شروع پردازش برای کار جدید، نقطه شروع سایر کارها نیز در بازه موردنظرشان و در این حین فوریت آن‌ها نیز می‌تواند تغییر نماید.

**تابع فوریت:**

ازآنجاکه اهمیت یک مشتری متأثر از عواملی همچون وفاداری مشتری، مقدار سودآوری، مدت ارتباط مشتری، میزان نقدینگی و .. و می‌باشد؛ لذا به‌عنوان پارامتر مؤثر در زمان‌بندی مورد توجه می‌باشد. این پارامتر از طریق طراحی پرسش‌نامه و یا بررسی آمار گذشته قابل حصول بوده، اینک در مسأله مورد مطالعه به‌صورت داده ورودی درنظر گرفته شده و در بخش «تولید داده» باتوجه به مطالعات در پیشینه پژوهش، مقداردهی و تولید گردیده است.

فوریت یک متغیر وابسته به زمان می‌باشد که توسط تولیدکننده مورد پایش قرار گرفته تا بتواند به‌نحوه زمان‌بندی کارها به‌گونه‌ای کمک کند که در نهایت، تابع هدف و یا همان رضایت‌مندی مشتری را به‌سمت بهینه سوق دهد. این متغیر در نوشتار حاضر، توسط تابعی تعیین می‌گردد که وابسته به موعد تحویل، زمان در دسترس قرارگرفتن کارها و مدت زمان پردازش شده از کار و در تناظر و مقایسه با سایر کارها مشخص می‌شود. فوریت، موضوعی است که تولیدکننده جهت زمان‌بندی بهتر از آن کمک می‌گیرد و وزن هر مشتری، موضوعی است که در درازمدت و باتوجه به رفتار کیفی مشتری حاصل شده است؛ لیکن هردو مورد در راستای رسیدن به تابع هدف بهینه نقش‌آفرینی مؤثری دارند. لازم به‌ذکر است که این تابع در دنیای واقعی پیوسته است، لیکن جهت بررسی و استفاده از الگوریتم‌های حل مناسب، به‌صورت پلکانی و گسسته درنظر گرفته شده است؛ لذا بدیهی است که درخصوص کارها و سفارشات با شرایط و حساسیت‌های مختلف، می‌تواند دارای تعداد ضابطه‌های متنوع دیگری نیز باشد. به بیان دیگر، هر مشتری دارای یک وزن ($w_j$) و یک فوریت ($per_j$) می‌باشد، فوریت هر مشتری مربوط به فاصله زمانی باقیمانده تا موعد تحویل وی و با گذر زمان متغیر می‌باشد. یعنی مشتری از لحظه‌ای که سفارش می‌دهد تا لحظه‌ای که موعد تحویل وی فرا می‌رسد فوریت وی طبق یک تابع تغییر کرده و بالا می‌رود. (ممکن است یک مشتری در لحظه ورود فوریت ۲ داشته باشد، یعنی سه فوریت بالاتر قبل از وی باشند، اما با گذر زمان فوریت وی از ۲ به سمت فوریت ۵ حرکت می‌کند) (منظور از فوریت بالاتر، بیشتر شدن از نظر مقدار عددی است یعنی فوریت ۵ بالاتر از ۱ است)

فوریت توسط یک تابع به شکل زیر تعیین می‌گردد:

در این تابع منظور از $P_{rest\,j}$ مقدار زمان موردنیاز تا اتمام پردازش کار jام و همچنین $per_j$ نشان‌دهنده درجه فوریت کار jام است که می‌تواند بین ۱ تا ۵ متغیر باشد.

$$P_{rest\,j} \le 0.25P_j$$
$$= \begin{cases} P_{rest\,j} = d_j - t & per_j = 5 \\ 0 < d_j - t \le 0.25P_j & per_j = 4 \\ 0.25P_j < d_j - t \le 0.50P_j & per_j = 3 \\ 0.50P_j < d_j - t \le 0.75P_j & per_j = 2 \\ 0.75P_j < d_j - t & per_j = 1 \\ P_{rest\,j} > d_j - t & per_j = \alpha \end{cases}$$

$$0.25P_j < P_{rest\,j} \le 0.50P_j$$
$$= \begin{cases} P_{rest\,j} = d_j - t & per_j = 5 \\ 0.25P_j < d_j - t \le 0.50P_j & per_j = 4 \\ 0.50P_j < d_j - t \le 0.75P_j & per_j = 3 \\ 0.75P_j < d_j - t \le P_j & per_j = 2 \\ P_j < d_j - t & per_j = 1 \\ P_{rest\,j} > d_j - t & per_j = \alpha \end{cases}$$

$$0.50P_j < P_{rest\,j}$$
$$= \begin{cases} P_{rest\,j} = d_j - t & per_j = 5 \\ 0.5P_j < d_j - t \le 0.75P_j & per_j = 4 \\ 0.75P_j < d_j - t \le P_j & per_j = 3 \\ P_j < d_j - t \le 2P_j & per_j = 2 \\ 2P_j < d_j - t & per_j = 1 \\ P_{rest\,j} > d_j - t & per_j = \alpha \end{cases}$$

پس از محاسبه مقدار فوریت هر کار، با ضرب آن در مقدار وزن (اهمیت مشتری) مقدار اولویت موردنظر به‌دست آمده که در رابطه زیر نشان داده شده است.

اولویت کار = اهمیت کار * فوریت کار

### ۳-۱. مدل ریاضی

**پارامترهای مدل:**

$n$: تعداد کارها

$r_j$: زمان در دسترس بودن کارها

$P_j$: زمان پردازش کار j

$d_j$: موعد تحویل کار j

$w_j$: وزن کار jام در بازه اول

$d_j'$: موعد انصراف مشتری jام

$w_j'$: وزن کار jام در بازه دوم

$F$: کران بالایی برای حداکثر زمان تکمیل هر کار

$per_j$: فوریت کار jام

$crit_j$: اولویت کار jام

**متغیرهای تصمیم:**

$S_j$: زمان شروع کار j

$C_j$: زمان تکمیل کار j

$E_j$: میزان زودکرد کار j

$T_j$: میزان دیرکرد کار j

$U_j$: ۱ اگر کار jام با تأخیر انجام شود، ۰ در غیر این صورت

$X_{jt}$: ۱ اگر در لحظه t کار j در حال پردازش باشد، ۰ در غیر این صورت

$O_{jt}$: زمان پردازش شده از کار jام تا لحظه t

$Z_{jt}$: ۱ اگر کار j ام در زمان t تکمیل شده باشد، ۰ در غیر این صورت

$\alpha_{jj'}$: ۱ اگر اولویت j بالاتر از j´ باشد، ۰ در غیر این صورت

$P_{rest\,j}$: زمان باقیمانده تا اتمام پردازش کار j

$y_{1j}$: ۱ اگر $P_{rest\,j} \le 0.25P_j$، ۰ در غیر این صورت

$y_{2j}$: ۱ اگر $0.25P_j \le P_{rest\,j} \le 0.50P_j$، ۰ در غیر این صورت

$y_{3j}$: ۱ اگر $0.5P_j \le P_{rest\,j}$، ۰ در غیر این صورت

$x^1_{1j}$: ۱ اگر $d_j - t = P_{rest\,j}$، ۰ در غیر این صورت

$x^1_{2j}$: ۱ اگر $0 < d_j - t \le 0.25P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^1_{3j}$: ۱ اگر $0.25P_j < d_j - t \le 0.5P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^1_{4j}$: ۱ اگر $0.5P_j < d_j - t \le 0.75P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^1_{5j}$: ۱ اگر $d_j - t > 0.75P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^1_{6j}$: ۱ اگر $d_j - t < P_{rest\,j}$، ۰ در غیر این صورت

$x^2_{1j}$: ۱ اگر $d_j - t = P_{rest\,j}$ ، ۰ در غیر این صورت

$x^2_{2j}$: ۱ اگر $0.25Pj < d_j - t \le 0.5P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^2_{3j}$: ۱ اگر $0.5P_j < d_j - t \le 0.75P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^2_{4j}$: ۱ اگر $0.75P_j < d_j - t \le P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^2_{5j}$: ۱ اگر $d_j - t > P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^2_{6j}$: ۱ اگر $d_j - t < P_{rest\,j}$، ۰ در غیر این صورت

$x^3_{1j}$: ۱ اگر $P_{rest\,j} = d_j - t$، ۰ در غیر این صورت

$x^3_{2j}$: ۱ اگر $0.5Pj < d_j - t \le 0.75P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^3_{3j}$: ۱ اگر $0.75P_j < d_j - t \le P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^3_{4j}$: ۱ اگر $P_j < d_j - t \le 2P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^3_{5j}$: ۱ اگر $d_j - t > 2P_j$، ۰ در غیر این صورت

$x^3_{6j}$: ۱ اگر $d_j - t < P_{rest\,j}$، ۰ در غیر این صورت

مدل ریاضی مسأله در انتهای مقاله ارائه گردیده است.

عبارت (۱) تابع هدف مسأله می‌باشد که به کمینه‌سازی مجموع وزن‌دار تعداد کارهای دارای دیرکرد می‌پردازد. محدودیت‌های (۲) بیانگر این موضوع می‌باشد که زمان شروع کارها نمی‌تواند از زمان دردسترس قرار گرفتن آن زودتر باشد. محدودیت‌های (۳) و (۴) بیانگر میزان زودکرد کارها و محدودیت‌های (۵) و (۶) بیانگر میزان دیرکرد کارها می‌باشد. محدودیت (۷) و (۸) نشان می‌دهد که آیا کاری با تأخیر انجام شده است یا خیر. محدودیت (۹) تضمین کننده انجام یک کار بر روی ماشین در هر لحظه است. محدودیت شماره ۱۰ تا ۱۶ موارد مشابه را در خصوص بازه دوم بیان می‌کند.

محدودیت (۱۸) نشان می‌دهد مجموع زمان‌های منقطع شده از هر کار برابر با زمان پردازش آن است. محدودیت (۱۹) تضمین می‌کند، کاری قبل از در دسترس قرارگرفتن، نتواند انجام شود. محدودیت (۲۰) و (۲۱) زمان تکمیل کارها را نشان می‌دهد. محدودیت (۲۲) و (۲۳) زمان شروع کارها را نشان می‌دهد.

محدودیت (۲۴) رابطه بین متغیرهای $X_{jt}$ و $O_{jt}$ را نشان می‌دهد. محدودیت (۲۵) و (۲۶) رابطه میان متغیرهای $O_{jt}$ و $Z_{jt}$ را نشان می‌دهد. محدودیت (۲۷) بیانگر این است که اگر کاری در لحظه‌ای تکمیل شده باشد، در لحظات بعدی نیز تکمیل است و اگر کاری تکمیل نشده باشد، در لحظات قبلی نیز تکمیل نشده است. از محدودیت (۳۲) به‌بعد، نحوه استفاده از تابع فوریت و تعیین اولویت کارها به مدل ریاضی ارائه شده است. یکی از ورودی‌های مهم به تابع فوریت، $P_{rest}$ می‌باشد که نشان‌دهنده مقدار باقیمانده از پردازش یک کار است. لذا در محدودیت (۳۲) این متغیر ابتدا محاسبه و سپس در محدودیت‌های (۳۳)، (۳۴) و (۳۵) مورد استفاده قرار گرفته است. محدودیت‌های (۳۳)، (۳۴) و (۳۵) به‌ترتیب جهت فعال شدن یکی از سه تابع فوریت براساس مقدار $P_{rest}$ ارائه شده است. محدودیت (۳۶) نیز نشان‌دهنده برقراری تنها یکی از سه تابع فوق در هر لحظه می‌باشد.

از محدودیت (۳۷) تا (۵۷) مربوط به انتخاب یکی از ضابطه‌ها در هریک از توابع سه‌بخشی فوریت می‌باشد.

ارتباط محدودیت (۳۲) با روابط قبل از آن، نیز به مقدار زمانی از پردازش کار که سپری گردیده است برمی‌گردد؛ که این مدت زمان از طریق متغیر $O_{jt}$ به‌دست می‌آید. به بیان دیگر، این محدودیت، نقطه‌ای است که محدودیت‌های قبل از آن، مربوط به زمان سپری شده و درواقع زمان‌بندی شده از هر کار بوده و محدودیت‌های بعد از آن مربوط به تعیین فوریت و اولویت برای زمان‌بندی قسمت‌های زمان‌بندی نشده کار است.

محدودیت (۵۸) وزن کار با اولویت برتر و محدودیت (۵۹) کار با اولویت برتر را انتخاب می‌نماید. محدودیت (۶۰) تضمین می‌کند که در هر لحظه از میان کارهای در دسترس و ناتمام، کاری مورد پردازش قرار می‌گیرد که دارای اولویت بیشتری نسبت به سایرین است.

### ۳-۲. الگوریتم ابتکاری

در این بخش، الگوریتم ابتکاری متشکل از دوفاز ارائه شده است. در این الگوریتم، ابتدا کارها براساس زمان در دسترس قرار گرفتن، مرتب شده و سپس براساس اولویت به زمان‌بندی وارد می‌شوند. ازآنجاکه موعد انصراف هر کار پس از موعد تحویل آن برنامه‌ریزی شده است، لذا کارها درصورتی‌که تا قبل از موعد تحویل‌شان، مورد پردازش قرار نگیرند به فاز دوم، جهت زمان‌بندی تا قبل از فرارسیدن موعد انصراف وارد می‌شوند. تفاوت عمده فاز دوم با فاز اول در این می‌باشد که کلیه کارهایی که به فاز دوم وارد می‌شوند از همان ابتدای ورود به فاز دوم، در دسترس می‌باشند و وزن آن‌ها از w به w′ و موعد تحویل به موعد انصراف تغییر می‌یابد. همچنین در تابع فوریت نیز، پارامترهای d و $P_{rest\,j}$ به‌هنگام شده و متناظر با پارامترهای جدید، محاسبات صورت می‌پذیرد.

**فاز اول:**

**گام ۱:** کارها را براساس $r_j$ به‌صورت صعودی مرتب کنید.

$(U, U', Rj= \Phi)$

**گام ۲:** مقدار t=0 قرار داده و کارهای دردسترس را مشخص و در مجموعه Rj قرار دهید.

**گام ۳:** اولویت کارهای مجموعه $r_j$ را مشخص کنید. (اولویت از ضرب فوریت در اهمیت به‌دست می‌آید؛ که فوریت از تابع چندضابطه ای ارائه شده و اهمیت از داده‌های ورودی مسأله استخراج می‌گردد.)

**گام ۴:** کارها را براساس اولویت زمان‌بندی کرده، اگر در این لحظه کار تکمیل شد، به گام ۵ و در غیر این صورت به گام ۶ بروید.

**گام ۵:** اگر کار jام دارای دیرکرد می‌باشد؛ به گام ۷ و در غیر این صورت به گام به گام ۶ بروید.

**گام ۶:** مقدار t را یک واحد افزایش داده و کارهای دردسترس مجموعه Rj را به‌هنگام کرده و به گام ۳ بروید.

**گام ۷:** اگر زمان شروع پردازش کار jام در لحظه rj آن بوده است، این کار را از زمان‌بندی فاز اول حذف نموده و به فاز دوم منتقل نمایید. در غیر این صورت به گام ۸ بروید.

**گام ۸:** اگر مقدار دیرکرد (Tj=Cj-dj) بیشتر از انحراف از rj (Sj-rj) بود؛ کار jام را از زمان‌بندی فاز اول حذف نموده و به فاز دوم منتقل نمایید؛ در غیر این صورت از بین کار jام و کارهای زمان‌بندی شده ماقبل، کار با کمترین اهمیت را از زمان‌بندی فاز اول حذف و به فاز دوم منتقل نمایید. کار حذف شده را به لیست کارهای دیرکرددار اضافه نمایید (U).

**فاز دوم:**

تفاوت فاز دوم با فاز اول در دردسترس قرار داشتن همه کارها در لحظه شروع زمان‌بندی فاز دوم است. لذا می‌توان تابع فوریت در فاز اول را برای فاز دوم باتوجه به زمان پردازش باقیمانده از هریک از کارها و موعد انصراف مورد استفاده و درجه اولویت کارها را باتوجه به وزن جدید مورد محاسبه قرار داد.

**گام ۱:** مقدار t=0 قرار دهید. $(U'=\Phi)$

**گام ۲:** اولویت کارهای منتقل شده به فاز دوم را مشخص کنید.

**گام ۳:** کارها را براساس اولویت زمان‌بندی کرده، اگر در این لحظه کار تکمیل شد، به گام ۴ و در غیر این صورت به گام ۵ بروید.

**گام ۴:** اگر کار jام دارای دیرکرد می‌باشد؛ به گام ۶ و در غیر این صورت به گام ۵ بروید.

**گام ۵:** مقدار t را یک واحد افزایش داده و به گام ۲ بروید.

**گام ۶:** اگر مقدار دیرکرد (Tj=Cj-dj) بیشتر از انحراف از $r'_j$ (Sj- $r'_j$) بود؛ کار jام را از زمان‌بندی فاز دوم حذف نموده ؛ در غیر این صورت از بین کار jام و کارهای زمان‌بندی شده ماقبل در فاز دوم، کار با کمترین اهمیت را از زمان‌بندی فاز دوم حذف نمایید. کار حذف شده را در لیست کارهای ازدست‌رفته قرار دهید ($U'$).

### ۳-۳. نتایج محاسباتی

الگوریتم ابتکاری ارائه شده با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون کد شده و مسائل نمونه توسط نرم‌افزار گمز و الگوریتم ابتکاری، برروی یک کامپیوتر با مشخصات *Core i3* و *10 GB RAM* در محیط *Windows 7* حل شده‌اند. در ادامه نحوه تولید مسائل و تحلیل نتایج بیان شده است. برای ارزیابی عملکرد الگوریتم ابتکاری از یک مجموعه مسائل نمونه استفاده شده است. باتوجه به منابع در ادبیات موضوع مسأله، زمان پردازش دارای توزیع یکنواخت گسسته در بازه $[1،101]$ و موعدهای تحویل، به‌طور تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته در بازه $[r_j + p_j.r_j + p_j + k_2 n]$ و زمان‌های دسترسی به‌طور تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته در بازه $[0. k_1 n]$ تولید شده‌اند. همچنین مقادیر $w$، $w'$ و $d'$ به‌ترتیب دارای توزیع یکنواخت گسسته در بازه‌های $[1.10]$، $[w_j.100]$ و $[d_j.1.5\ d_j]$ می‌باشند. پارامترهای $k_1$ و $k_2$ دارای مقادیر $\{1،5،10،20\}$ بوده و برای تعداد کارها، یعنی $n$، مقادیر ۵، ۷، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰، ۹۰، ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ منظور شده است. در جدول (۱) نتایج محاسباتی حاصل از جواب بهینه خروجی نرم‌افزار گمز و جواب الگوریتم ابتکاری مورد مقایسه قرار گرفته است. لازم به‌ذکر است برای هر $n$ تعداد ۱۰ مسأله تولید و میانگین زمان‌های حل و میزان نزدیکی به بهینه مورد استنتاج قرار گرفته است. در مجموع، تعداد ۲۷۰۰ مسأله نمونه حل و نتایج آن ارائه گردیده است. باتوجه به محدودیت زمان حل (۱۰۰۰ ثانیه) در حل به روش گمز، بررسی تعداد بالاتر از ۴۰ منطقی به‌نظر نمی‌رسد. زمان‌های حل بادقت چهار رقم اعشار گرد شده است. باتوجه به جزئیات مسال حل شده، می‌توان چنین نتیجه گرفت که در مسائلی که پراکندگی موعدهای تحویل بیشتر و فاصله موعد تحویل از زمان پردازش بیشتر می‌باشد؛ زمان حل مسأله کمتر و چالش تقابل اولویت کارها نیز کاهش یافته است. همچنین در حالاتی که زمان‌های در دسترس کارها، به‌هم نزدیک‌تر می‌باشند، تلاقی دو بازه موعد تحویل و موعد انصراف و نهایتاً تقابل اولویت کارها با یکدیگر کاهش یافته است. همچنین زمانی‌که زمان‌های دسترسی کارها، به یکدیگر نزدیک است، روند حل مسأله از نظام بیشتری برخوردار است. به‌طور کلی الگوریتم ابتکاری، عملکرد نسبتاً خوبی در مسائل با تعداد کار بالا داشته است. نتایج نشان می‌دهد نرم‌افزار گمز در تعداد بالای کار قادر به حل مسأله نمی‌باشد؛ همچنین روند افزایشی شدید در زمان حل مسائل نیز نشان از عدم کارایی حل مدل ریاضی توسط این نرم‌افزار دارد. همان‌طور که از بررسی نتایج به‌دست می‌آید در نمونه‌های حل شده توسط هر دو الگوریتم، بیش از ۸۰٪ الگوریتم ابتکاری به جواب بهینه نزدیک شده است؛ این درحالی است که زمان حل الگوریتم ابتکاری تفاوت قابل ملاحظه‌ای با حل مدل ریاضی داشته است. لذا در حل مسائل با تعداد کار بالا، می‌تواند تا حد قابل قبولی مورد اعتماد بوده و نیز در حل مسأله به روش‌های دقیق نیز به‌عنوان حد بالای مناسب مورد استفاده و ارزیابی قرار گیرد. نتایج محاسباتی در جدول (۲) در انتهای مقاله ارائه شده است.

## ۴. نتیجه و جمع‌بندی

در این مقاله، مسأله کمینه‌سازی تعداد کار دیرکرددار وزنی با درنظرگرفتن اولویت متغیر کارها و زمان‌های دسترسی متفاوت مطرح و مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا تابع اولویت، جهت اولویت‌بندی مناسب کارها ارائه و بر این اساس باتوجه به موعد تحویل ارائه شده به مشتری، زمان‌بندی مورد بررسی قرار گرفته به‌نحوی‌که با نزدیک شدن یک کار به موعد تحویل آن، اولویت بالاتری درنظر گرفته می‌شود. جهت حل مسأله مورد بحث، ابتدا یک مدل ریاضی طراحی و در محیط نرم‌افزار گمز حل گردیده است. همچنین برای افزایش سرعت حل مسأله در تعداد بالای کار، الگوریتم ابتکاری در دو فاز طراحی و در محیط پایتون کدنویسی گردیده و نتایج محاسباتی آن ارائه شده است. براساس نتایج، الگوریتم ابتکاری عملکرد نسبتا مناسبی در میزان نزدیکی جواب به بهینه (حدود ۸۰٪) داشته و ازنظر زمان حل نیز از سرعت بالایی برخوردار است.

**مدل ریاضی مسأله**

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} U_j W_j + \sum_{j=1}^{n} U_j' w_j' \quad (۱)$$

Subject to:

$$S_j \geq r_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۲)$$

$$E_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۳)$$

$$E_j \geq d_j - C_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴)$$

$$T_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۵)$$

$$T_j \geq C_j - d_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۶)$$

$$T_j - E_j = C_j - d_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۷)$$

$$T_j \leq M\, U_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۸)$$

$$U_j \leq M\, T_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۹)$$

$$E'_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱۰)$$

$$E'_j \geq d'_j - C'_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱۱)$$

$$T'_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱۲)$$

$$T'_j \geq C'_j - d'_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱۳)$$

$$T'_j - E'_j = C'_j - d'_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱۴)$$

$$T'_j \leq M\, U'_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱۵)$$

$$U'_j \leq M\, T'_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱۶)$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{jt} \leq 1 \quad \forall t = 1,2, \dots, F \quad (۱۷)$$

$$\sum_{t=1}^{F} X_{jt} = P_j \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱۸)$$

$$\sum_{t=1}^{rj} X_{jt} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۱۹)$$

$$M(P_j - O_{jt}) \geq C_j - t \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۲۰)$$

$$P_j - O_{jt} \leq M(C_j - t) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۲۱)$$

$$M(O_{jt} - 1) \geq -S_j + t - 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۲۲)$$

$$O_{jt} - 1 \leq M(-S_j + t - 1) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۲۳)$$

$$\sum_{t=1}^{t} X_{jt} = O_{jt} \quad \forall t = 1.2. \dots . F-1,\ \forall j = 1.2. \dots . n \quad (۲۴)$$

$$M(P_j - O_{jt}) \geq 1 - Z_{jt} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۲۵)$$

$$P_j - O_{jt} \leq M(1 - Z_{jt}) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۲۶)$$

$$Z_{jt} \leq Z_{jt+1} \quad \forall t = 1.2. \dots . F-1,\ \forall j = 1.2. \dots . n,\ \forall t = 1.2. \dots . F-1,\ \forall j = 1.2. \dots . n \quad (۲۷)$$

$$C_j - tX_{jt} \geq -M(1 - Z_{jt}) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۲۸)$$

$$C_j - tX_{jt} \leq M(1 - Z_{jt}) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۲۹)$$

$$C_j \leq tX_{jt} + M(1 - Z_{jt}) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۳۰)$$

$$\sum_{t=sj}^{F} Z_{jt} = 1 \quad \forall t = 1.2. \dots . F-1 \quad (۳۱)$$

$$P_{rest\,j} = P_j - O_{jt} \quad \forall t = 1.2. \dots . F-1,\ \forall j = 1.2. \dots . n \quad (۳۲)$$

$$P_{rest\,j} \leq 0.25P_j + M(1 - y_{1j}) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۳۳)$$

$$0.25P_j + \varepsilon - M(1 - Y_{2j}) \leq P_{rest\,j} \leq 0.5P_j + M(1 - y_{2j}) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۳۴)$$

$$0.5P_j + \varepsilon - M(1 - y_{3j}) \leq P_{rest\,j} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۳۵)$$

$$y_{1j} + y_{2j} + y_{3j} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۳۶)$$

$$d_j - t = P_{rest\,j} + M(1 - x_{5j}^1) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۳۷)$$

$$\varepsilon - M(1 - x_{4j}^1) < d_j - t \leq 0.25P_j + M(1 - x_{4j}^1) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۳۸)$$

$$0.25P_j + \varepsilon - M(1 - x_{3j}^1) < d_j - t \leq 0.5P_j + M(1 - x_{3j}^1) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۳۹)$$

$$0.5P_j + \varepsilon - M(1 - x_{2j}^1) < d_j - t \leq 0.75P_j + M(1 - x_{2j}^1) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۰)$$

$$0.75P_j + \varepsilon - M(1 - x_{1j}^1) < d_j - t \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۱)$$

$$d_j - t < P_{rest\,j} + M(1 - x_{6j}^1) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۲)$$

$$x_{1j}^1 + x_{2j}^1 + x_{3j}^1 + x_{4j}^1 + x_{5j}^1 + x_{6j}^1 = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۳)$$

$$d_j - t = P_{rest\,j} + M(1 - x_{5j}^2) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۴)$$

$$0.25P_j + \varepsilon - M(1 - x_{4j}^2) < d_j - t \leq 0.5P_j + M(1 - x_{4j}^2) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۵)$$

$$0.5P_j + \varepsilon - M(1 - x_{3j}^2) < d_j - t \leq 0.75P_j + M(1 - x_{3j}^2) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۶)$$

$$0.75P_j + \varepsilon - M(1 - x_{2j}^2) < d_j - t \leq P_j + M(1 - x_{2j}^2) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۷)$$

$$P_j + \varepsilon - M(1 - x_{1j}^2) < d_j - t \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۸)$$

$$d_j - t < P_{rest\,j} + M(1 - x_{6j}^2) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۴۹)$$

$$x_{1j}^2 + x_{2j}^2 + x_{3j}^2 + x_{4j}^2 + x_{5j}^2 + x_{6j}^2 = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۵۰)$$

$$d_j - t = P_{rest\,j} + M(1 - x_{5j}^3) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۵۱)$$

$$0.5P_j + \varepsilon - M(1 - x_{4j}^3) < d_j - t \leq 0.75P_j + M(1 - x_{4j}^3) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۵۲)$$

$$0.75P_j + \varepsilon - M(1 - x_{3j}^3) < d_j - t \leq P_j + M(1 - x_{3j}^3) \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (۵۳)$$

$$P_j + \varepsilon - M(1 - x_{2j}^3) < d_j - t \leq 2P_j + M(1 - x_{2j}^3) \quad \forall\, j = 1, \dots, n \qquad (۵۴)$$

$$2P_j + \varepsilon - M(1 - x_{1j}^3) < d_j - t \quad \forall\, j = 1, \dots, n \qquad (۵۵)$$

$$d_j - t < P_{rest\,j} + M(1 - x_{6j}^3) \quad \forall\, j = 1, \dots, n \qquad (۵۶)$$

$$x_{1j}^3 + x_{2j}^3 + x_{3j}^3 + x_{4j}^3 + x_{5j}^3 + x_{6j}^3 = 1 \quad \forall\, j = 1, \dots, n \qquad (۵۷)$$

$$w_{kj} = w_j . x_{kj}^i \quad \forall k = 2,3,4,5;\ \forall j = 1,2, \dots, n;\ \forall i = 1,2,3 \qquad (۵۸)$$

$$(k-1).w_{kj} - M(2 - y_{ij} - x_{kj}^i) \leq per_j . w_{kj} \leq (k-1).w_{kj} + M(2 - y_{ij} - x_{kj}^i) \quad \forall k = 2,3,4,5;\ \forall j = 1,2, \dots, n;\ \forall i = 1,2,3 \qquad (۵۹)$$

$$\beta - M(2 - y_{ij} - x_{kj}^i) \leq per_j \leq \beta + M(2 - y_{ij} - x_{kj}^i) \quad \forall j = \forall i = 1.2.3 \qquad (۶۰)$$

$$M \gg -\beta \qquad (۶۱)$$

$$per_j \leq per_{j'} + M(1 - \alpha_{jj'}) \quad \forall j = 1.2. \dots . n;\ j \neq j' \qquad (۶۲)$$

$$per_{j'} - per_j \leq 4\alpha_{jj'} \quad \forall j = 1.2. \dots . n;\ j \neq j' \qquad (۶۳)$$

**جدول (۱): نتایج محاسباتی**

| فاصله ابتکاری تا بهینه (٪) | میانگین زمان حل (ثانیه) | الگوریتم ابتکاری | میانگین زمان حل | n ،k1 ،K2 دسته | فاصله ابتکاری تا بهینه (٪) | میانگین زمان حل توسط گمز (ثانیه) | الگوریتم ابتکاری (ثانیه) | میانگین زمان حل | n ،k1 ،K2 دسته | فاصله ابتکاری تا بهینه (٪) | میانگین زمان حل توسط گمز (ثانیه) | الگوریتم ابتکاری (ثانیه) | میانگین زمان حل | n ،k1 ،K2 دسته |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰.۰۹ | ۶۸۶.۳۲۵۹ | ۲.۲۶۵۵ | ۶۱،۲۰،۲۰،۱ | ۰ | ۱۰.۳۵۲۵ | ۰.۹۴۴۵ | ۳۱،۷،۲۰،۱۰ | ۰ | ۲.۵۴۴۶ | ۰.۷۴۴۴ | ۱،۵،۱،۱ |
| ۰.۰۶ | ۶۸۹.۲۵۴۹ | ۲.۲۶۱۸ | ۶۲،۲۰،۲۰،۵ | ۰ | ۱۰.۲۷۸۶ | ۰.۹۲۶۸ | ۳۲،۷،۲۰،۲۰ | ۰ | ۳.۰۰۲۵ | ۰.۸۱۲۲ | ۲،۵،۱،۵ |
| ۰.۱۱ | ۶۹۲.۳۱۴۶ | ۲.۲۹۱۲ | ۶۳،۲۰،۲۰،۱۰ | ۰ | ۶۴.۳۲۱۲ | ۱.۲۴۶۱ | ۳۳،۱۰،۱،۱ | ۰ | ۳.۰۰۶۶ | ۰.۹۰۶۵ | ۳،۵،۱،۱۰ |
| ۰.۱۰ | ۶۷۴.۴۹۸۶ | ۲.۲۸۵۱ | ۶۴،۲۰،۲۰،۲۰ | ۰ | ۶۵.۰۰۱۲ | ۱.۲۳۶۷ | ۳۴،۱۰،۱،۵ | ۰ | ۳.۰۰۴۷ | ۰.۸۰۷۳ | ۴،۵،۱،۲۰ |
| ۰.۰۹ | ۹۸۹.۰۰۲۱ | ۳.۲۷۱۴ | ۶۵،۳۰،۱،۱ | ۰ | ۶۵.۰۰۱۲ | ۱.۲۲۸۴ | ۳۵،۱۰،۱،۱۰ | ۰ | ۴.۰۲۴۵ | ۰.۷۲۳۳ | ۵،۵،۵،۱ |
| ۰.۱۵ | ۹۹۶.۷۸۵۴ | ۳.۲۸۰۱ | ۶۶،۳۰،۱،۵ | ۰ | ۶۴.۲۱۲۵ | ۱.۲۲۴۰ | ۳۶،۱۰،۱،۲۰ | ۰ | ۴.۰۳۶۱ | ۰.۷۲۰۴ | ۶،۵،۵،۵ |
| ۰.۱۰ | ۹۶۵.۲۵۸۹ | ۳.۳۴۲۹ | ۶۷،۳۰،۱،۱۰ | ۰ | ۶۵.۰۴۵۷ | ۱.۲۲۰۸ | ۳۷،۱۰،۵،۱ | ۰ | ۴.۱۱۲۰ | ۰.۷۲۲۹ | ۷،۵،۵،۱۰ |
| ۰.۰۹ | ۹۹۹.۳۵۷۸ | ۳.۳۰۴۵ | ۶۸،۳۰،۱،۲۰ | ۰ | ۶۵.۳۰۲۱ | ۱.۲۴۸۸ | ۳۸،۱۰،۵،۵ | ۰ | ۴.۰۵۸۷ | ۰.۷۲۸۰ | ۸،۵،۵،۲۰ |
| ۰.۰۱۲ | ۹۸۲.۳۲۱۱ | ۳.۲۷۶۲ | ۶۹،۳۰،۵،۱ | ۰ | ۶۴.۶۹۸۷ | ۱.۲۲۴۲ | ۳۹،۱۰،۵،۱۰ | ۰ | ۳.۱۴۵۲ | ۰.۷۲۸۰ | ۹،۵،۱۰،۱ |
| ۰.۰۱۴ | ۹۸۵.۳۶۲۱ | ۳.۲۶۳۲ | ۷۰،۳۰،۵،۵ | ۰ | ۶۵.۴۵۱۲ | ۱.۲۳۲۰ | ۴۰،۱۰،۵،۲۰ | ۰ | ۳.۶۵۴۵ | ۰.۷۲۱۲ | ۱۰،۵،۱۰،۵ |
| ۰.۰۸ | ۹۹۶.۳۲۵۴ | ۳.۴۹۹۹ | ۷۱،۳۰،۵،۱۰ | ۰ | ۶۵.۰۰۲۱ | ۱.۲۱۹۲ | ۴۱،۱۰،۱۰،۱ | ۰ | ۴.۲۵۸۹ | ۰.۷۲۲۶ | ۱۱،۵،۱۰،۱۰ |
| ۰.۱۵ | ۹۹۳.۳۶۹۸ | ۳.۶۰۹۴ | ۷۲،۳۰،۵،۲۰ | ۰ | ۶۴.۰۳۲۸ | ۱.۲۲۸۸ | ۴۲،۱۰،۱۰،۵ | ۰ | ۴.۱۱۲۲ | ۰.۷۲۴۷ | ۱۲،۵،۱۰،۲۰ |
| ۰.۱۳ | ۹۶۵.۵۴۷۸ | ۳.۳۰۴۰ | ۷۳،۳۰،۱۰،۱ | ۰ | ۶۴.۱۴۸۵ | ۱.۲۲۲۱ | ۴۳،۱۰،۱۰،۱۰ | ۰ | ۴.۷۴۱۲ | ۰.۷۲۱۵ | ۱۳،۵،۲۰،۱ |
| ۰.۱۷ | ۹۵۰.۲۵۷۴ | ۳.۲۹۱۴ | ۷۴،۳۰،۱۰،۵ | ۰ | ۶۴.۲۵۸۷ | ۱.۲۲۸۲ | ۴۴،۱۰،۱۰،۲۰ | ۰ | ۳.۹۹۸۴ | ۰.۷۲۳۴ | ۱۴،۵،۲۰،۵ |
| ۰.۱۱ | ۹۶۸.۳۹۸۴ | ۳.۳۰۱۲ | ۷۵،۳۰،۱۰،۱۰ | ۰ | ۶۴.۳۶۹۸ | ۱.۲۲۹۹ | ۴۵،۱۰،۲۰،۱ | ۰ | ۴.۵۶۲۰ | ۰.۷۶۱۷ | ۱۵،۵،۲۰،۱۰ |
| ۰.۱۶ | ۹۷۹.۵۹۸۴ | ۳.۲۵۵۰ | ۷۶،۳۰،۱۰،۲۰ | ۰ | ۶۵.۹۸۵۸ | ۱.۲۲۳۴ | ۴۶،۱۰،۲۰،۵ | ۰ | ۴.۰۲۹۸ | ۰.۸۱۲۳ | ۱۶،۵،۲۰،۲۰ |
| ۰.۱۴ | ۹۹۴.۳۸۷۷ | ۳.۲۶۴۹ | ۷۷،۳۰،۲۰،۱ | ۰ | ۶۷.۲۵۱۲ | ۱.۲۲۲۴ | ۴۷،۱۰،۲۰،۱۰ | ۰ | ۹.۶۵۲۵ | ۰.۹۶۱۰ | ۱۷،۷،۱،۱ |
| ۰.۱۳ | ۹۶۶.۹۸۹۹ | ۳.۲۷۸۱ | ۷۸،۳۰،۲۰،۵ | ۰ | ۶۷.۴۸۵۲ | ۱.۲۳۱۸ | ۴۸،۱۰،۲۰،۲۰ | ۰ | ۹.۴۵۷۷ | ۰.۹۶۱۰ | ۱۸،۷،۱،۵ |
| ۰.۱۲ | ۹۸۵.۸۸۷۵ | ۳.۲۹۶۲ | ۷۹،۳۰،۲۰،۱۰ | ۰ | ۶۷۰.۲۳۱۵ | ۲.۲۷۹۹ | ۴۹،۲۰،۱،۱ | ۰ | ۹.۸۶۲۲ | ۰.۹۵۴۱ | ۱۹،۷،۱،۱۰ |
| ۰.۱۱ | ۹۸۱.۱۹۴۸ | ۳.۳۰۰۱ | ۸۰،۳۰،۲۰،۲۰ | ۰ | ۶۵۰.۰۰۲۵ | ۲.۳۰۳۱ | ۵۰،۲۰،۱،۵ | ۰ | ۹.۱۲۶۹ | ۰.۹۵۵۹ | ۲۰،۷،۱،۲۰ |
| – | ۴.۲۵۹۱ | ۸۱،۴۰،۱،۱ | ۰.۱۲ | ۶۸۰.۲۱۵۴ | ۲.۲۶۶۱ | ۵۱،۲۰،۱،۱۰ | ۰ | ۹.۳۳۶۸ | ۰.۹۵۶۶ | ۲۱،۷،۵،۱ |
| – | ۴.۲۴۴۹ | ۸۲،۴۰،۱،۵ | ۰.۰۸ | ۶۵۳.۲۶۸۹ | ۲.۲۸۳۶ | ۵۲،۲۰،۱،۲۰ | ۰ | ۹.۵۶۸۹ | ۰.۹۵۱۷ | ۲۲،۷،۵،۵ |
| – | ۴.۲۵۴۸ | ۸۳،۴۰،۱،۱۰ | ۰.۰۲ | ۶۷۴.۲۱۴۵ | ۲.۲۷۷۹ | ۵۳،۲۰،۵،۱ | ۰ | ۹.۱۲۴۹ | ۰.۹۴۸۰ | ۲۳،۷،۵،۱۰ |
| – | ۴.۲۷۴۱ | ۸۴،۴۰،۱،۲۰ | ۰.۰۶ | ۶۸۵.۲۵۰۱ | ۲.۲۷۰۸ | ۵۴،۲۰،۵،۵ | ۰ | ۱۰.۰۱۲۱ | ۰.۹۳۷۱ | ۲۴،۷،۵،۲۰ |
| – | ۴.۲۶۷۰ | ۸۵،۴۰،۵،۱ | ۰.۰۹ | ۶۸۲.۰۱۴۷۵ | ۲.۲۷۹۷ | ۵۵،۲۰،۵،۱۰ | ۰ | ۹.۵۲۶۵ | ۰.۹۱۹۸ | ۲۵،۷،۱۰،۱ |
| – | ۴.۲۷۲۷ | ۸۶،۴۰،۵،۵ | ۰.۰۵ | ۶۶۷.۲۵۹۶ | ۲.۲۷۹۳ | ۵۶،۲۰،۵،۲۰ | ۰ | ۱۰.۳۰۵۲ | ۱.۰۷۹۹ | ۲۶،۷،۱۰،۵ |
| – | ۴.۳۲۶۶ | ۸۷،۴۰،۵،۱۰ | ۰.۰۹ | ۶۹۸.۳۶۹۴ | ۲.۲۷۶۰ | ۵۷،۲۰،۱۰،۱ | ۰ | ۹.۸۸۹۵ | ۱.۰۳۹۰ | ۲۷،۷،۱۰،۱۰ |
| – | ۴.۵۰۷۰ | ۸۸،۴۰،۵،۲۰ | ۰.۱۰ | ۶۹۹.۳۲۱۴ | ۲.۲۷۶۹ | ۵۸،۲۰،۱۰،۵ | ۰ | ۱۰.۰۲۱۱ | ۱.۱۲۱۹ | ۲۸،۷،۱۰،۲۰ |
| – | ۴.۲۹۹۰ | ۸۹،۴۰،۱۰،۱ | ۰.۱۲ | ۶۷۸.۲۵۸۴ | ۲.۲۸۲۰ | ۵۹،۲۰،۱۰،۱۰ | ۰ | ۱۰.۵۲۶۳ | ۱.۱۶۱۱ | ۲۹،۷،۲۰،۱ |
| – | ۴.۲۹۲۰ | ۹۰،۴۰،۱۰،۵ | ۰.۱۵ | ۶۶۴.۲۱۷۹ | ۲.۲۸۵۹ | ۶۰،۲۰،۱۰،۲۰ | ۰ | ۹.۵۸۹۸ | ۱.۰۴۹۹ | ۳۰،۷،۲۰،۵ |
| ۸.۷۹۲۱ | | ۱۵۱،۸۰،۵،۱۰ | ۰ | | ۶.۴۶۲۶ | ۱۲۱،۶۰،۱۰،۱ | | | ۴.۳۴۸۰ | ۹۱،۴۰،۱۰،۱۰ |
| ۹.۰۴۱۷ | | ۱۵۲،۸۰،۵،۲۰ | ۰ | | ۶.۴۲۵۲ | ۱۲۲،۶۰،۱۰،۵ | | | ۴.۶۳۱۹ | ۹۲،۴۰،۱۰،۲۰ |
| ۹.۱۸۵۷ | | ۱۵۳،۸۰،۱۰،۱ | | | ۶.۴۴۸۰ | ۱۲۳،۶۰،۱۰،۱۰ | | | ۴.۳۳۵۰ | ۹۳،۴۰،۲۰،۱ |
| ۹.۵۶۸۷ | | ۱۵۴،۸۰،۱۰،۵ | | | ۶.۴۳۰۸ | ۱۲۴،۶۰،۱۰،۲۰ | | | ۴.۴۲۱۸ | ۹۴،۴۰،۲۰،۵ |

| فاصله ابتکاری تا بهینه (٪) | میانگین زمان حل الگوریتم ابتکاری (ثانیه) | میانگین زمان حل گمز (ثانیه) | n ،k1 ،K2 دسته | فاصله ابتکاری تا بهینه (٪) | میانگین زمان حل الگوریتم ابتکاری (ثانیه) | میانگین زمان حل توسط گمز (ثانیه) | n ،k1 ،K2 دسته | فاصله ابتکاری تا بهینه (٪) | میانگین زمان حل الگوریتم ابتکاری (ثانیه) | میانگین زمان حل گمز (ثانیه) | n ،k1 ،K2 دسته |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ۵.۱۸۵۳ | | ۹۵،۴۰،۲۰،۱۰ | | ۶.۴۵۳۷ | | ۱۲۵،۶۰،۲۰،۱ | | ۹.۶۵۶۱ | | ۱۵۵،۸۰،۱۰،۱۰ |
| | ۴.۸۸۶۴ | | ۹۶،۴۰،۲۰،۲۰ | | ۶.۴۴۰۵ | | ۱۲۶،۶۰،۲۰،۵ | | ۹.۳۶۹۹ | | ۱۵۶،۸۰،۱۰،۲۰ |
| | ۵.۴۷۱۶ | | ۹۷،۵۰،۱،۱ | | ۷.۴۹۷۵ | | ۱۲۷،۶۰،۲۰،۱۰ | | ۹.۰۸۵۲ | | ۱۵۷،۸۰،۲۰،۱ |
| | ۵.۴۹۱۶ | | ۹۸،۵۰،۱،۵ | | ۷.۹۱۳۶ | | ۱۲۸،۶۰،۲۰،۲۰ | | ۹.۰۳۷۳ | | ۱۵۸،۸۰،۲۰،۵ |
| | ۵.۶۷۱۲ | | ۹۹،۵۰،۱،۱۰ | | ۷.۸۳۹۵ | | ۱۲۹،۷۰،۱،۱ | | ۹.۱۹۰۵ | | ۱۵۹،۸۰،۲۰،۱۰ |
| | ۵.۷۲۸۱ | | ۱۰۰،۵۰،۱،۲۰ | | ۷.۳۹۲۰ | | ۱۳۰،۷۰،۱،۵ | | ۹.۳۳۸۶ | | ۱۶۰،۸۰،۲۰،۲۰ |
| | ۵.۶۰۸۹ | | ۱۰۱،۵۰،۵،۱ | | ۷.۴۷۲۹ | | ۱۳۱،۷۰،۱،۱۰ | | ۱۰.۵۵۴۸ | | ۱۶۱،۹۰،۱،۱ |
| | ۵.۵۷۸۸ | | ۱۰۲،۵۰،۵،۵ | | ۷.۴۸۱۹ | | ۱۳۲،۷۰،۱،۲۰ | | ۱۰.۳۶۳۲ | | ۱۶۲،۹۰،۱،۵ |
| | ۵.۶۱۱۴ | | ۱۰۳،۵۰،۵،۱۰ | | ۷.۴۸۸۹ | | ۱۳۳،۷۰،۵،۱ | | ۱۰.۵۵۶۸ | | ۱۶۳،۹۰،۱،۱۰ |
| | ۵.۷۰۲۲ | | ۱۰۴،۵۰،۵،۲۰ | | ۷.۵۱۹۷ | | ۱۳۴،۷۰،۵،۵ | | ۱۰.۷۵۰۱ | | ۱۶۴،۹۰،۱،۲۰ |
| | ۵.۴۵۷۰ | | ۱۰۵،۵۰،۱۰،۱ | | ۷.۵۹۶۵ | | ۱۳۵،۷۰،۵،۱۰ | | ۱۱.۲۷۳۳ | | ۱۶۵،۹۰،۵،۱ |
| | ۶.۴۱۹۸ | | ۱۰۶،۵۰،۱۰،۵ | | ۷.۸۴۲۹ | | ۱۳۶،۷۰،۵،۲۰ | | ۱۲.۱۳۹۵ | | ۱۶۶،۹۰،۵،۵ |
| | ۵.۴۲۶۹ | | ۱۰۷،۵۰،۱۰،۱۰ | | ۸.۰۰۸۵ | | ۱۳۷،۷۰،۱۰،۱ | | ۱۱.۲۷۱۷ | | ۱۶۷،۹۰،۵،۱۰ |
| | ۵.۳۹۸۸ | | ۱۰۸،۵۰،۱۰،۲۰ | | ۷.۵۰۲۹ | | ۱۳۸،۷۰،۱۰،۵ | | ۱۰.۹۷۹۳ | | ۱۶۸،۹۰،۵،۲۰ |
| | ۵.۴۲۰۳ | | ۱۰۹،۵۰،۲۰،۱ | | ۷.۵۷۸۳ | | ۱۳۹،۷۰،۱۰،۱۰ | | ۱۰.۵۳۷۳ | | ۱۶۹،۹۰،۱،۱ |
| | ۵.۳۸۰۳ | | ۱۱۰،۵۰،۲۰،۵ | | ۷.۵۶۹۰ | | ۱۴۰،۷۰،۱۰،۲۰ | | ۱۰.۳۰۰۸ | | ۱۷۰،۹۰،۱۰،۵ |
| | ۵.۴۷۱۴ | | ۱۱۱،۵۰،۲۰،۱۰ | | ۸.۰۶۵۰ | | ۱۴۱،۷۰،۲۰،۱ | | ۱۰.۳۶۶۹ | | ۱۷۱،۹۰،۱۰،۱۰ |
| | ۵.۴۱۷۸ | | ۱۱۲،۵۰،۲۰،۲۰ | | ۸.۳۶۳۴ | | ۱۴۲،۷۰،۲۰،۵ | | ۱۰.۵۲۴۹ | | ۱۷۲،۹۰،۱۰،۲۰ |
| | ۶.۳۸۶۶ | | ۱۱۳،۶۰،۱،۱ | | ۸.۰۶۹۱ | | ۱۴۳،۷۰،۲۰،۱۰ | | ۱۰.۸۰۷۸ | | ۱۷۳،۹۰،۲۰،۱ |
| | ۶.۳۲۳۱ | | ۱۱۴،۶۰،۱،۵ | | ۸.۰۸۸۰ | | ۱۴۴،۷۰،۲۰،۲۰ | | ۱۰.۹۶۳۹ | | ۱۷۴،۹۰،۲۰،۵ |
| | ۶.۳۳۱۳ | | ۱۱۵،۶۰،۱،۱۰ | | ۹.۰۷۵۶ | | ۱۴۵،۸۰،۱،۱ | | ۱۰.۶۴۵۴ | | ۱۷۵،۹۰،۲۰،۱۰ |
| | ۶.۴۳۸۶ | | ۱۱۶،۶۰،۱،۲۰ | | ۸.۹۳۰۰ | | ۱۴۶،۸۰،۱،۵ | | ۱۰.۷۰۰۳ | | ۱۷۶،۹۰،۲۰،۲۰ |
| | ۶.۳۸۴۳ | | ۱۱۷،۶۰،۵،۱ | | ۹.۱۶۰۷ | | ۱۴۷،۸۰،۱،۱۰ | | ۱۱.۳۵۱۷ | | ۱۷۷،۱۰۰،۱،۱ |
| | ۶.۳۹۲۰ | | ۱۱۸،۶۰،۵،۵ | | ۹.۲۸۶۶ | | ۱۴۸،۸۰،۱،۲۰ | | ۱۲.۸۲۱۴ | | ۱۷۸،۱۰۰،۱،۵ |
| | ۶.۴۱۸۲ | | ۱۱۹،۶۰،۵،۱۰ | | ۹.۰۹۳۰ | | ۱۴۹،۸۰،۵،۱ | | ۱۲.۸۳۹۰ | | ۱۷۹،۱۰۰،۱،۱۰ |
| | ۶.۴۰۹۴ | | ۱۲۰،۶۰،۵،۲۰ | | ۹.۲۸۵۰ | | ۱۵۰،۸۰،۵،۵ | | ۱۱.۷۸۵۸ | | ۱۸۰،۱۰۰،۱،۲۰ |
| | ۱۱.۶۵۶۴ | | ۱۸۱،۱۰۰،۵،۱ | | ۳۵.۳۹۲۹ | | ۲۱۱،۳۰۰،۱،۱۰ | | ۶۰.۸۴۶۶ | | ۲۴۱،۵۰۰،۱،۱ |
| | ۱۱.۶۳۴۴ | | ۱۸۲،۱۰۰،۵،۵ | | ۳۵.۱۹۶۹ | | ۲۱۲،۳۰۰،۱،۲۰ | | ۶۱.۵۲۸۱ | | ۲۴۲،۵۰۰،۱،۵ |
| | ۱۱.۶۵۴۳ | | ۱۸۳،۱۰۰،۵،۱۰ | | ۳۶.۴۹۰ | | ۲۱۳،۳۰۰،۵،۱ | | ۶۳.۵۱۹۷ | | ۲۴۳،۵۰۰،۱،۱۰ |
| | ۱۱.۹۲۲۰ | | ۱۸۴،۱۰۰،۵،۲۰ | | ۳۵.۳۳۹۰ | | ۲۱۴،۳۰۰،۵،۵ | | ۶۵.۶۵۸۵ | | ۲۴۴،۵۰۰،۱،۲۰ |
| | ۱۱.۹۹۲۸ | | ۱۸۵،۱۰۰،۱۰،۱ | | ۳۴.۷۷۵۸ | | ۲۱۵،۳۰۰،۵،۱۰ | | ۶۳.۰۴۴۹ | | ۲۴۵،۵۰۰،۵،۱ |
| | ۱۱.۹۰۶۸ | | ۱۸۶،۱۰۰،۱۰،۵ | | ۳۵.۵۲۲۷ | | ۲۱۶،۳۰۰،۵،۲۰ | | ۶۳.۵۷۱۴ | | ۲۴۶،۵۰۰،۵،۵ |
| | ۱۲.۰۴۷۰ | | ۱۸۷،۱۰۰،۱۰،۱۰ | | ۳۴.۰۰۰۷ | | ۲۱۷،۳۰۰،۱۰،۱ | | ۶۵.۰۵۱۷ | | ۲۴۷،۵۰۰،۵،۱۰ |
| | ۱۲.۰۷۳۵ | | ۱۸۸،۱۰۰،۱۰،۲۰ | | ۳۴.۳۹۱۷ | | ۲۱۸،۳۰۰،۱۰،۵ | | ۶۷.۱۳۵۲ | | ۲۴۸،۵۰۰،۵،۲۰ |
| | ۱۱.۹۶۹۱ | | ۱۸۹،۱۰۰،۲۰،۱ | | ۳۴.۷۵۲۵ | | ۲۱۹،۳۰۰،۱۰،۱۰ | | ۶۳.۵۷۶۰ | | ۲۴۹،۵۰۰،۱۰،۱ |
| | ۱۲.۳۳۵۲ | | ۱۹۰،۱۰۰،۲۰،۵ | | ۳۵.۶۴۵۲ | | ۲۲۰،۳۰۰،۱۰،۲۰ | | ۶۴.۳۹۹۰ | | ۲۵۰،۵۰۰،۱۰،۵ |
| | ۱۱.۶۴۹۷ | | ۱۹۱،۱۰۰،۲۰،۱۰ | | ۳۴.۳۴۰۶ | | ۲۲۱،۳۰۰،۲۰،۱ | | ۶۵.۳۳۹۸ | | ۲۵۱،۵۰۰،۱۰،۱۰ |
| | ۱۱.۶۷۴۰ | | ۱۹۲،۱۰۰،۲۰،۲۰ | | ۳۴.۷۴۵۲ | | ۲۲۲،۳۰۰،۲۰،۵ | | ۶۷.۷۳۶۳ | | ۲۵۲،۵۰۰،۱۰،۲۰ |
| | ۲۲.۹۶۷۲ | | ۱۹۳،۱۰۰،۱،۱ | | ۳۵.۴۶۳۴ | | ۲۲۳،۳۰۰،۲۰،۱۰ | | ۶۴.۵۸۱۷ | | ۲۵۳،۵۰۰،۲۰،۱ |
| | ۲۳.۰۷۱۹ | | ۱۹۴،۲۰۰،۱،۵ | | ۳۶.۱۶۲۶ | | ۲۲۴،۳۰۰،۲۰،۲۰ | | ۶۵.۹۳۷۵ | | ۲۵۴،۵۰۰،۲۰،۵ |
| | ۲۲.۷۲۲۸ | | ۱۹۵،۲۰۰،۱،۱۰ | | ۴۶.۲۴۹۳ | | ۲۲۵،۴۰۰،۱،۱ | | ۶۷.۲۲۶۷ | | ۲۵۵،۵۰۰،۲۰،۱۰ |
| | ۲۴.۰۰۲۲ | | ۱۹۶،۲۰۰،۱،۲۰ | | ۴۷.۱۸۳۴ | | ۲۲۶،۴۰۰،۱،۵ | | ۶۹.۰۸۰۹ | | ۲۵۶،۵۰۰،۲۰،۲۰ |
| | ۲۵.۱۹۸۲ | | ۱۹۷،۲۰۰،۵،۱ | | ۴۸.۳۳۴۰ | | ۲۲۷،۴۰۰،۱،۱۰ | | ۱۸۰.۲۴۱۵ | | ۲۵۷،۱۰۰۰،۱،۱ |
| | ۲۴.۲۶۶۶ | | ۱۹۸،۲۰۰،۵،۵ | | ۴۸.۹۲۱۲ | | ۲۲۸،۴۰۰،۱،۲۰ | | ۱۸۴.۲۱۲۰ | | ۲۵۸،۱۰۰۰،۱،۵ |
| | ۲۳.۷۱۱۵ | | ۱۹۹،۲۰۰،۵،۱۰ | | ۴۷.۴۳۲۷ | | ۲۲۹،۴۰۰،۵،۱ | | ۱۹۰.۲۰۳۰ | | ۲۵۹،۱۰۰۰،۱،۱۰ |
| | ۲۶.۲۴۴۳ | | ۲۰۰،۲۰۰،۵،۲۰ | | ۴۸.۲۷۸۱ | | ۲۳۰،۴۰۰،۵،۵ | | ۱۹۴.۷۸۴۴ | | ۲۶۰،۱۰۰۰،۱،۲۰ |
| | ۲۴.۵۸۸۱ | | ۲۰۱،۲۰۰،۱۰،۱ | | ۴۹.۶۵۲۱ | | ۲۳۱،۴۰۰،۵،۱۰ | | ۱۹۳.۶۶۵۱ | | ۲۶۱،۱۰۰۰،۵،۱ |
| | ۲۳.۰۷۵۴ | | ۲۰۲،۲۰۰،۱۰،۵ | | ۵۰.۶۸۴۴ | | ۲۳۲،۴۰۰،۵،۲۰ | | ۱۹۵.۰۰۲۱ | | ۲۶۲،۱۰۰۰،۱۰،۱۰ |
| | ۲۳.۵۷۲۲ | | ۲۰۳،۲۰۰،۱۰،۱۰ | | ۴۸.۱۰۰۵ | | ۲۳۳،۴۰۰،۱۰،۱ | | ۲۰۰.۱۲۱۱ | | ۲۶۳،۱۰۰۰،۱۰،۲۰ |

| فاصله ابتکاری تا بهینه (٪) | میانگین زمان حل گمز (ثانیه) | الگوریتم ابتکاری (ثانیه) میانگین زمان حل | n ،k1 ،K2 دسته | فاصله ابتکاری تا بهینه (٪) | میانگین زمان حل گمز (ثانیه) | الگوریتم ابتکاری (ثانیه) میانگین زمان حل توسط | n ،k1 ،K2 دسته | فاصله ابتکاری تا بهینه (٪) | میانگین زمان حل گمز (ثانیه) | الگوریتم ابتکاری (ثانیه) میانگین زمان حل | n ،k1 ،K2 دسته |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ۲۳.۳۴۰۲ | ۲۰۴،۲۰۰،۱۰،۲۰ | | | ۴۸.۴۹۶۵ | ۲۳۴،۴۰۰،۱۰،۵ | | | ۲۱۲.۲۰۱۰ | ۲۶۴،۱۰۰۰،۲۰،۲۰ |
| | | ۲۵.۴۲۸۱ | ۲۰۵،۲۰۰،۲۰،۱ | | | ۴۹.۹۲۷۹ | ۲۳۵،۴۰۰،۱۰،۱۰ | | | ۳۵۰.۱۵۱۱ | ۲۶۵،۲۰۰۰،۱۰،۵ |
| | | ۲۲.۹۳۷۸ | ۲۰۶،۲۰۰،۲۰،۵ | | | ۵۰.۸۵۷۷ | ۲۳۶،۴۰۰،۱۰،۲۰ | | | ۳۶۰.۲۲۰۰ | ۲۶۶،۲۰۰۰،۱۰،۲۰ |
| | | ۲۳.۵۰۳۳ | ۲۰۷،۲۰۰،۲۰،۱۰ | | | ۴۸.۸۹۷۵ | ۲۳۷،۴۰۰،۲۰،۱ | | | ۲۵۵.۲۳۰۳ | ۲۶۷،۲۰۰۰،۲۰،۲۰ |
| | | ۲۶.۱۶۹۶ | ۲۰۸،۲۰۰،۲۰،۲۰ | | | ۴۹.۶۵۸۱ | ۲۳۸،۴۰۰،۲۰،۵ | | - | | ۲۶۸،۵۰۰۰،۱۰،۱۰ |
| | | ۳۷.۲۶۰۰ | ۲۰۹،۳۰۰،۱،۱ | | | ۵۰.۳۷۲۲ | ۲۳۹،۴۰۰،۲۰،۱۰ | | - | | ۲۶۹،۵۰۰۰،۲۰،۱۰ |
| | | ۳۶.۲۷۹۹ | ۲۱۰،۳۰۰،۱،۵ | | | ۵۱.۸۲۳۴ | ۲۴۰،۴۰۰،۲۰،۲۰ | | - | | ۲۷۰،۱۰۰۰۰،۱،۱ |

**جدول (۳): مرور ادبیات پیشین**

| مدل مسأله | نویسنده | سال | روش حل |
|---|---|---|---|
| $1\|\sum w_j U_j$ و پنجره زمانی | کرامر و لی | ۱۹۹۴ | DP |
| $1\|r_j\|\sum w_j U_j$ | ام هلا و بوفلین | ۲۰۰۵ | ابتکاری |
| $1\|nr-fa\|\overline{F}$ | چن ۲۰۰۶ | ۲۰۰۶ | BIP |
| زمان‌بندی مجدد (تابع هزینه کل) | بیبویانگ | ۲۰۰۶ | ابتکاری |
| $1\|nr-fpa\|C_{\max}$ | لاو وجی | ۲۰۰۹ | ابتکاری |
| $1\|nr-r_j\|\sum U_j$ | بریاند و اوروری | ۲۰۱۱ | MIP<br>BB |
| ترکیب مسأله فلوشاپ با نظریه صف | ترخوف و همکاران | ۲۰۱۴ | ابتکاری |
| $1\|nr-fpa\|\sum C_i$ | مشکانی و مصلحی | ۲۰۱۶ | NP-hard |
| $1\|nr-fPa\|\overline{F}$ | مشکانی و مصلحی | ۲۰۱۸ | BB |
| $1\|nr-fPa\|\overline{F}$ | مشکانی و مصلحی | ۲۰۱۸ | NP-hard |
| مسأله پیشنهادی | | | |
| زمان‌بندی کارها با اولویت متغیر و زمان دسترسی متفاوت با تابع هدف تعداد کار دیرکرددار وزنی - رویکرد حل ابتکاری | | | |

## مراجع


[1] Baker, K.R., *Introduction to sequencing and scheduling*, John Wily, New York, 1974.

[2] Chen, J.S., "Optimization models for the machine scheduling problem with a single flexible maintenance activity", *Engineering Optimization*, Vol., No., 2006.

[3] Mashkani, O., Moslehi, Gh., (2018) Minimizing the Number of Tardy Jobs in the Single Machine Scheduling Problem under Bimodal Flexible and Periodic Availability Constraints, International Journal of Industrial Engineering & Production Research, 29(1), pp. 15-34.

[۴] جواد بهنامیان و فاطمه کمیجانی (۱۳۹۷)، ارائه الگوریتم شاخه و برش برای حل مسأله زمان‌بندی تولید کارگاهی با استفاده از نامعادلات معتبر، نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، پاییز و زمستان ۱۳۹۷، سال ششم، شماره سیزدهم، صفحه ۹۳۱-۹۹۱.

[5] Terekhov, D., Tran, T., Down, D., BECK, Ch., (2014) Integrating Queueing Theory and Schedulingfor Dynamic Scheduling Problems, Journal of Arti_cial Intelligence Research, 50(7), pp. 535-572.

[۶] مجید حسین‌زاده و راشد صحرائیان (۱۳۹۶)، حل مسأله زمان‌بندی چندعاملی در محیط جریان کارگاهی با درنظر گرفتن اثر زمانی و رد کردن کارها با استفاده از یک الگوریتم فراابتکاری، نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، بهار و تابستان ۱۳۹۶، سال پنجم، شماره دهم، صفحه ۶۷-۲۳.

[7] M. Pinedo (2008), Scheduling: Theory, Algorithms and Systems, Springer, New York, NY, USA, 3rd edition.

[8] Low, C., Ji, M., Hsu, C.J., and Su, C.T. (2002) Minimizing the makespan in a single machine scheduling problem with flexible and periodic maintenance, Applied Mathematical Modelling, 34(2), pp. 334-342.

[9] Mashkani, O., Moslehi, Gh., (2016) Minimising the total completion time in a single machine scheduling

problem under bimodal flexible periodic availability constraints, International Journal of Computer Integrated Manufacturing, 29(3), pp. 1-19.

[۱۰]فرداد حمیدرضا و همکاران (۱۳۸۷)، ارایه یک روش صف‌بندی جدید برای انتقال ترافیک Diffserv روی شبکه RPR، مهندسی برق مجلسی، پاییز ۱۳۸۷، دوره ۲، شماره ۲، از صفحه ۳۵ تا ۴۳.

[11] Hermelin, D., (2018) Karhi, Sh., Pinedo, M., New algorithms for minimizing the weighted number of tardy jobs on a single machine, Ann Oper Res, published online.

[12] M'Hallah, R., Bulfin, R., (2005) Minimizing the weighted number of tardy jobson a single machine with release dates, European Journal of Operational Research, 176, pp. 727–744.

[13] Kramer, F., Lee, C., (1994) Due Window Scheduling for Parallel Machines, 20(2), pp. 69-89.

[14] Anger F.D., Lee C.Y., and Martin-Vega L.A. (1986) Single machine scheduling with tight windows. Research Report, Department of Industrial and Systems Engineering, University of Florida.

[15] Sidney, J.B., (1977) Optimal single machine scheduling with earliness and tardiness penalties, Operations Research, 25, 62–69.

[16] Chang, P.C., Su, L.H., (2001) Scheduling n jobs on one machine to minimize the maximum lateness with a minimum number of tardy jobs, Computers &IndustrialEngineering40,349–360.

[17] Briand, C., Ourari, S., (2011) Minimizing the number of tardy jobs for the singlemachine scheduling problem: MIP-based lower andupper bounds, RAIRO-OR.

[18] Yang. B., (2007) Single machine rescheduling with new jobs arrivals and processing time compression, Int J Adv Manuf Technol,34: 378–384

[19] Hall N.G. and C.N. Potts (2004), Rescheduling for new orders, Operations Research 52, 440-453.

[20] Wu, C.C., and Lee, W.C., (2003) Scheduling linear deteriorating jobs to minimize makespan with an availability constraint on a single machine, Information Processing Letters, 87(2), pp. 89-93.

[21] Ming Liu, a., Feifeng Zhengb, c., Shijin Wanga, Jiazhen Huoa., (2012) Optimal algorithms for online single machine scheduling with deteriorating jobs, Theoretical Computer Science, 445, pp. 75-81.

[22] Moore, J.M., "An n job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of late jobs", *Management Science*, Vol., No., pp. 102-109, 1968.

[23] Lenstra, J.K., Rinnooy, A.H.G. and P. Brucker, (1977) Complexity of machine scheduling problems, *Annals of Discrete Mathematics*, **1**, 343-362.

IERPS Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

ISSN: 2345-2269

Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

Spring and Summer 2020, Volume 9., No. 18., pp. 127-141
www.ier.basu.ac.ir

DOI: 10.22084/ier.2022.4384

# The Problem of Scheduling a Single Machine by Considering Variable Priorities and Release Times

**S. Gholami[1*], F. Ganji [2]**

[1.] Assistant Professor, Department of Industrial Engineering, Faculty of Industrial Engineering, Khajeh Nasir al-Din Tusi University of Technology, Tehran, Iran

[2.] PhD Student in Industrial Engineering, Department of Industrial Engineering, Faculty of Industrial Engineering, Khajeh Nasir al-Din Tusi University of Technology, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

***Article history*:**

Received 14 June 2021
Accepted 01 August 2021

***Keywords*:**

Single machine scheduling
Variable priority levels
Release time

ABSTRACT

In recent years, with the competitive environment, the importance of on time delivery and customer satisfaction is crucial. The objective functions, such as minimizing the number of tardy jobs, have attracted an increasing attention. This study aims to schedule the operations by minimizing the number of weighted tardy jobs in two modes of delay with a financial penalty and delay with lost sales. In this paper, the start time of operation is a decision variable. Furthermore, the operations can be only pursued one time, but the time of their availability is considered uncertain. In addition, the completion time of each operation is variable in two intervals; At the beginning of the interval, the delivery time of the task is considered without any penalty while at the end of the interval, the delivery time is determined with a penalty. As another innovation, this research examines the priority of variables so that by approaching the due dates and deadlines as well as the degree of customer urgency. It is updated based on some factors including the weight of the product order and the remaining processing time. In this paper, first the mathematical problem formulation is established and then a heuristic algorithm is used to solve the proposed model and find near-optimal solutions. To accomplish that, 2700 sample problems are generated and each is solved by GAMS software and the mentioned heuristic algorithm. The obtained results show the satisfactory performance of the heuristic algorithm in obtaining the near-optimal solution in a reasonable time.

[*] Corresponding author. S. Gholami
*Tel.:021-84063356; E-mail address: s_gholami@kntu.ac.ir*