نشـــریه پـــژوهـــش‌های مهنـــدســـی صنـــایع در سیســـتم‌هـــای تولیـــد

IERPS

ISSN: 2345-2269

نشـریه پـژوهـش‌های مهنـدسـی صنـــایع در سیستـم‌هــای تولیـــد

سال هشتم، شماره شانزدهم، بهار و تابستان ۱۳۹۹، صفحـــــه ۹۵–۱۱۱

www.ier.basu.ac.ir

DOI: 10.22084/ier.2020.20328.1909

تعیین سیاست بهینه سفارش‌دهی در مدل چند دوره‌ای احتمالی با در نظر گرفتن قیمت خرید تصادفی

زهرا رجبی[۱]، هیبت اله صادقی[۲*]، انور محمودی[۳]

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

۲. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

۳. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۸/۸/۴

پذیرش ۱۳۹۹/۵/۱

(مقاله پژوهشی)

کلمات کلیدی:

مسئله روزنامه‌فروش چند دوره‌ای

فرآیند تصادفی

قیمت‌گذاری

برنامه‌ریزی پویا احتمالی

خلاصه

در این مقاله مسئله برنامه‌ریزی و کنترل موجودی دو دوره‌ای با تقاضای احتمالی موردبررسی قرار می‌گیرد. در این سیستم فقط در اول دوره امکان سفارش‌دهی وجود دارد. تقاضا در طول دوره اول تصادفی و از توزیع مشخصی پیروی می‌کند و تقاضا برای محصولات باقیمانده در پایان دوره اول، وابسته به قیمت فروش آن در طول دوره دوم است. در این حالت قیمت فروش محصولات پایان دوره اهمیت زیادی پیدا می‌کند به‌گونه‌ای که قیمت کم باعث فروش بیشتر می‌شود. همچنین در مسئله موردبررسی فرض شده است که قیمت خرید محصولات در اول دوره یک فرآیند تصادفی و وابسته به زمان است. برای مسئله بیان شده مدل ریاضی ارائه‌شده است و سپس سعی می‌شود براساس نگرش برنامه‌ریزی پویا احتمالی، مقدار بهینه قیمت فروش پایان دوره، مقدار بهینه سفارش‌دهی و قیمت خرید محصولات به‌منظور ماکزیمم کردن سود سیستم تعیین گردد. در نهایت با بیان مثال عددی به بررسی عملکرد مدل بیان شده و تحلیل حساسیت آن پرداخته می‌شود.

۱. مقدمه

در دنیای واقعی به‌علت محدود بودن دوره فروش محصولات، مدل موجودی تک‌دوره‌ای (مسئله روزنامه‌فروش) برای خرید بهینه محصولات پیشنهاد می‌شود. کالاهای مانند گوشی‌های همراه و رایانه‌ها، کالاهای خوراکی با مصارف روزانه که اغلب فاسدشدنی هستند، کالاهای با دوره فروش فصلی و دوره‌ای از قبیل پوشاک، محصولات خدماتی، رزرو کردن بلیت هواپیما و... نمونه‌هایی از کالاهای تک‌دوره‌ای هستند که دارای طول عمر کوتاهی هستند و از مدل کنترل موجودی تک‌دوره‌ای به‌منظور مدیریت ظرفیت و یا ارزیابی سفارش‌دهی برای این محصولات استفاده می‌شود. از دیگر کاربردهای این مدل می‌توان به بانک‌های خون، رستوران‌ها، خواربار فروشی‌ها، تولیدکنندگان مواد لبنی و خوراکی اشاره کرد [۱].

در مدل‌های تک‌دوره‌ای معمول این فرض در نظر گرفته می‌شود که کالاهای باقیمانده در انتهای دوره با یک قیمت کمتر از قیمت خرید اسقاط می‌شود و حتی در بعضی مواقع هزینه امحا در نظر گرفته می‌شود. درحالی‌که در خیلی از محصولات فوق، کالاهای باقیمانده بعد از دوره اصلی فروش با قیمت‌های نه لزوماً کمتر از قیمت خرید فروخته می‌شوند. در واقع تقاضای قابل‌توجهی بعد از دوره فروش اصلی وجود

* نویسنده مسئول: هیبت‌اله صادقی

تلفن: ۰۸۷-۳۳۶۶۰۰۷۳؛ پست الکترونیکی: h.sadeghi@uok.ac.ir

دارد که معمولاً وابسته به قیمت پیشنهادی در دوره دوم است [۲].

از طرفی قیمت خرید اولیه محصولات و یا مواد اولیه در بازارهای امروزی دارای نوسانات زیادی است به‌طوری‌که در نظر گرفتن یک قیمت ثابت برای خرید محصولات در زمان‌های متفاوت مدل‌های ریاضی را از واقعیت موجود دور می‌کند [۳]. این امر به‌خصوص در بازارهای ایران که نرخ ارز معمولاً در حال تغییر است قابل‌توجه‌تر است. به همین دلیل در نظر گرفتن قیمت مواد اولیه یا اقلام خریدنی به‌صورت تصادفی می‌تواند مسئله مدل را به واقعیت نزدیک‌تر نماید.

در این مقاله مسئله تک‌دوره‌ای با در نظر گرفتن قیمت خرید تصادفی و همچنین وجود دوره دوم بعد از دوره اصلی فروش در نظر گرفته می‌شود. هدف مقاله تعیین زمان خرید اقلام، مقدار سفارش و همچنین قیمت فروش در دوره دوم است به‌طوری‌که سود مورد انتظار سیستم بیشینه شود.

در بسیاری از مواقع در مسئله روزنامه‌فروش قیمت تمام شده یک محصول مستقل از تعداد محصول خریداری شده نیست، بدین معنا که با بالا رفتن تعداد سفارش‌ها قیمت کمتری برای هر واحد محصول پرداخت می‌شود. طالعی‌زاده و نیاکی [۴] به بررسی مدل روزنامه‌فروش چند محصولی با محدودیت‌های سطح خدمات و ظرفیت انبار پرداختند و تخفیفات افزایشی را در خرید محصولات در نظر گرفتند به‌گونه‌ای که محصولات به‌صورت بسته‌ای سفارش داده شوند و برای حل مدل از الگوریتم ژنتیک استفاده کردند. در این راستا طالعی‌زاده و نیاکی [۵] همچنین مسئله روزنامه‌فروش چند محصولی و چند محدودیتی با دو هدف را مورد مطالعه قرار دادند و یکی از هدف‌های آن‌ها یافتن مقادیر سفارش به‌گونه‌ای که سود مورد انتظار ماکزیمم شود. هدف دیگر آن‌ها ماکزیمم کردن سطح خدمات بود و سیاست‌های تخفیف کلی و افزایشی را به کار بردند و در نهایت الگوریتم هیبرید و شبیه‌سازی فازی را برای حل مدل ارائه کردند. ژانگ و هوا [۶] از رویکرد پورتفولیو (Portfolio) برای مسئله چند محصولی روزنامه‌فروش با در نظر گرفتن محدودیت بودجه استفاده کردند که در آن استراتژی تهیه هر محصول روزنامه‌فروش براساس قرارداد پورتفولیو طراحی شده است. این قرارداد شامل قرارداد قیمت ثابت و قرارداد آپشن (اختیار معامله) است. در نهایت یک مثال عددی ارائه کردند که مزیت قرارداد پورتفولیو را نشان داد و براساس آن به تحلیل حساسیت مدل پرداختند. بشیری و همکاران [۷] یک مدل ریاضی جدید در مسئله کنترل موجودی تک‌دوره‌ای چند سطحی به همراه شبکه تولید و توزیع برای برنامه‌ریزی استراتژیک و تاکتیکی ارائه کردند آن‌ها زمان‌های مختلف را برای تصمیمات استراتژیک در نظر گرفتند و هدف آن‌ها بیشینه کردن سود خالص در شبکه بود و سپس برای نشان دادن کاربرد مدل پیشنهادی و عملکرد آن نمونه‌های عددی را با CPLEX حل کردند. سجادی و همکاران [۸] مدل چند دوره ای اندازه انباشته را موردبررسی قرار دادند و با ارائه یک رویکرد حل جدید توانستند تا حد قابل قبولی الگوریتم قبلی را بهبود دادند.

صادقی [۹] مسئله برنامه‌ریزی تولید را با فرض سفارش دوره‌ای و در نظر گرفتن قابلیت اطمینان و همچنین سیاست سفارش‌دهی دوره‌ای موردبررسی قرار داد و با تجزیه‌وتحلیل مدل بیان شده کارایی مدل را در حالات مختلف موردبررسی قرار داد.

پال و همکاران [۱۰] یک مدل روزنامه‌فروش کلاسیک تک‌دوره‌ای را برای تعیین مقدار بهینه سفارش که در آن مشتریان با کمبود مواجه هستند، تحلیل کردند در مدل آن‌ها تنها میانگین و واریانس تقاضا شناخته شده است و بدون در نظر گرفتن توزیع خاصی برای تقاضا مدل را توسعه دادند در مدل آن‌ها کمبود جزئی مجاز است و قطعه با کمبود به‌عنوان فروش از دست رفته در نظر گرفته می‌شود. پسندیده و همکاران [۱۱] مسئله کنترل موجودی تک‌دوره‌ای دو سطحی با استراتژی‌های بازار و رضایت مشتری را مورد مطالعه قرار دادند که در آن چندین محصول نهایی و مواد اولیه با میزان استفاده متفاوت وجود دارد. مسئله را ابتدا از نظر ریاضی فرمول‌بندی کردند و سپس از یک الگوریتم بهینه‌سازی انبوه ذرات برای حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده کردند و در نهایت برای تأیید نتایج به‌دست‌آمده، یک الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده به‌عنوان یک معیار ارائه کردند. کرامت‌پور و همکاران [۱۲] یک مسئله کنترل موجودی تک‌دوره‌ای دو سطحی را مدل‌سازی کردند، در آن تقاضا متغیر تصادفی است و کمبود به‌عنوان فروش از دست رفته در نظر گرفته می‌شود و هدف آن‌ها حداکثر کردن سود مورد انتظار و سطح خدمات در پایان فصل، به‌طور همزمان است سپس از الگوریتم بهینه‌سازی چند هدفه غیرتهاجمی (MOIWO) برای حل مسئله توسعه دادند در نهایت از الگوریتم ژنتیک مرتب‌سازی و الگوریتم ژنتیک رتبه‌بندی برای تأیید راه‌حل به‌دست‌آمده توسط MOIWO استفاده کردند به‌علاوه از روش تاگوچی برای یافتن مقادیر پارامترهای الگوریتم استفاده کردند و در نهایت، ۳۰ مسئله آزمایشی به‌منظور ارزیابی عملکرد راه‌حل‌ها و نیز نشان دادن مناسب بودن روش توسعه‌یافته در نظر گرفتند.

ابراهیمی‌نسب و همکاران [۱۳] یک زنجیره تأمین دو سطحی با تقاضای احتمالی را موردبررسی قرار دادند و برای کاهش ریسک خرده‌فروش و از قرارداد انعطاف مقداری استفاده کرده‌اند نتایج نشان می‌دهد که قرارداد پیشنهادی قادر به هماهنگ‌سازی مقدار سفارش در زنجیره موردبررسی است به‌نحوی‌که سودآوری کل زنجیره‌تأمین بیشینه گردد و هیچ‌یک از اعضا نسبت به حالت تصمیم‌گیری انفرادی متضرر نشوند.

میترا و چاترجی [۱۴] مسئله تک‌دوره‌ای روزنامه‌فروش تحت تقاضای تصادفی پایان فصل را مورد مطالعه قرار دادند و مدلی را برای تعیین مقدار بهینه سفارش و سود مورد انتظار توسعه دادند و ثابت کردند که مقدار بهینه سفارش و سود مورد انتظار کمتر از مقادیر مربوط به‌دست‌آمده از فرمول استاندارد روزنامه‌فروش است و همچنین مثال‌های عددی و تحلیل حساسیت برای محاسبه میزان انحراف راه‌حل‌های بهینه واقعی از راه‌حل‌های روزنامه‌فروش ارائه دادند. پتروزی و دادا [۱۵] مسئله روزنامه‌فروش، با تقاضای تصادفی را برای محصولات فاسدشدنی در نظر گرفتند. در این مسئله تقاضا وابسته به قیمت به

همراه مقداری تصادفی بیان شده است و هدف تعیین مقدار بهینه سفارش و قیمت بهینه فروش است به‌گونه‌ای‌که سود سیستم حداکثر گردد. پتروزی و دادا [۱۶] ، همچنین قیمت‌گذاری دو مرحله‌ای را با فرصت‌های بازپرسازی در ابتدا و پایان دوره در نظر گرفتند و مسئله روزنامه‌فروش با قیمت‌گذاری را برای تأمین‌کنندگان چندگانه گسترش دادند. تانگ و همکاران [۱۷] قیمت‌گذاری پویا را در مسئله روزنامه‌فروش با تقاضای تصادفی و بازده تصادفی بررسی کردند. هدف آن‌ها به حداکثر رساندن سود است و عملکرد سیستم را با سیاست‌های قیمت‌گذاری پویا و ثابت مقایسه کردند. هوآ و همکاران [۱۸] قیمت‌گذاری بهینه و مقدار سفارش برای مسئله روزنامه‌فروش تک‌محصولی با حمل‌ونقل رایگان را بررسی کردند. در مدل آن‌ها با توجه به اینکه تأمین‌کننده خدمات حمل‌ونقل رایگان ارائه می‌دهد خرده‌فروش با تقاضای احتمالی مواجه است و قیمت خرده‌فروش توزیع تقاضا را تحت تأثیر قرار می‌دهد. آن‌ها با استفاده از تجزیه‌وتحلیل عددی اثر حمل‌ونقل رایگان، تخفیف و هزینه حمل‌ونقل را موردبررسی قرار دادند و نشان دادند که حتی با وجود اینکه خرده‌فروش با تقاضای تصادفی روبه‌رو است، حمل‌ونقل رایگان می‌تواند به‌طور مؤثر خرده‌فروش را به سفارش بیشتر تشویق کند و می‌تواند به سود تأمین‌کننده، خرده‌فروش و مشتریان نهایی باشد. موناهان و همکاران [۱۹] مسئله روزنامه‌فروش را با در نظر گرفتن قیمت‌گذاری پویا بررسی کردند و یک روش جدید برای مدل بهینه‌سازی پویا که در آن تابع تقاضا به‌صورت حاصل‌ضرب تابعی از قیمت و مقدار تصادفی است ارائه کردند و بیان کردند که مسئله قیمت‌گذاری پویا و مدل‌های موجودی پویا در یک راستا هستند و منجر به یک تفسیر مجدد از مسئله قیمت‌گذاری پویا به‌عنوان یک مسئله تنظیم قیمت روزنامه‌فروش می‌شود و در نهایت یک الگوریتم عملی و کارآمد برای محاسبه قیمت بهینه ارائه دادند. سون [۲۰] به‌مرورکلی از مدل‌های قیمت‌گذاری چند محصولی در مسئله روزنامه‌فروش با تمرکز به این‌که تقاضا تابعی از قیمت است پرداخت و علاوه‌بر این‌که به معرفی مدل‌هایی که فقط بر قیمت‌گذاری تمرکز دارند به بررسی انواع مدل‌هایی که قیمت‌گذاری به‌طور مشترک به همراه تصمیماتی مانند تولید یا توزیع گرفته می‌شود نیز پرداخت. مووری و همکاران [۲۱] مدل روزنامه‌فروش چند محصولی را با محدودیت ظرفیت منابع پیشنهاد کردند که در آن تقاضا ماهیت تصادفی داشت و علاوه‌بر تعیین میزان سفارش، قیمت‌گذاری محصول را نیز انجام می‌داد. شی و همکاران [۲۲] مسئله روزنامه‌فروش را در حالت چندمحصولی و چند محدودیتی را با تصمیم‌گیری‌های قیمت‌گذاری خرده‌فروش و تخفیف‌های مقداری تأمین‌کننده در نظر گرفتند. آن‌ها این مسئله را در قالب برنامه‌ریزی عمومی جداسازنده (Generalized Disjunctive Programming -GDP) مدل کرده و با استفاده از روش ابتکاری به‌همراه آزادسازی لاگرانژ به حل مدل پرداختند. شویوما و همکاران [۲۳] به تجزیه‌وتحلیل مسئله روزنامه‌فروش با تقاضای وابسته به قیمت و تخفیف‌های چندگانه پرداختند و مقدار بهینه سفارش، قیمت اولیه فروش و طرح تخفیف در مسئله روزنامه‌فروش را بررسی کردند و یک روش برای حل مسئله با توزیع تقاضای عمومی و دو نوع تقاضای وابسته به قیمت ارائه کردند.

در بعضی از تحقیقات انجام شده مسئله روزنامه‌فروش را به‌صورت چندمرحله‌ای بررسی کرده‌اند اولین محققانی که یک تحلیل دقیق در رابطه با مسئله‌ی موجودی احتمالی چند دوره‌ای ارائه دادند آرو، هاریس و مارسچک بودند [۲۴]. آلفارِس و اِلمورا [۲۵] مسئله روزنامه‌فروش را با عملکرد تصادفی و هزینه ثابت سفارش‌دهی درحالی‌که هزینه کمبود موردتوجه قرار می‌گیرد و فرض آن‌ها این بود که فقط میانگین و واریانس تقاضا مشخص است آن‌ها مسئله بیان شده را در دو حالت تک‌دوره‌ای و چنددوره‌ای بررسی کردند. کیم و همکاران [۲۶] برای بهینه‌سازی هزینه کل لجستیک محصولات فاسدشدنی، یک مدل چند دوره‌ای روزنامه‌فروش را ارائه کردند و از روش ریسک استفاده کردند و در نهایت یک مثال عددی و تحلیل حساسیت برای آن انجام دادند. آزاد غلامی و سندول [۲۷] مسئله روزنامه‌فروش تک‌دوره‌ای با تقاضای تصادفی وابسته به قیمت را به چند دوره‌ای وابسته به زمان گسترش دادند و مسئله روزنامه‌فروش چند دوره‌ای با تقاضای تصادفی را در چارچوب استاکلبرگ که در آن عمده‌فروش رهبر و خرده‌فروش(روزنامه‌فروش) دنبال کننده است، تحلیل کردند و از یک ساختار چندگانه برای تقاضا استفاده کردند. یک راه‌حل جامع برای این بازی استاکلبرگ چندمرحله‌ای تصادفی ارائه می‌دهند که مواردی را با افق‌های محدود و بی‌نهایت پوشش می‌دهد. ژانگ و همکاران [۲۸] به بررسی یک مدل روزنامه‌فروش دو محصولی، چند دوره‌ای غیرایستا پرداختند که در آن انتقال موجودی بین دوره‌ها مجاز نیست. هر دوره روزنامه‌فروش با محدودیت بودجه مواجه است و هدف آن‌ها تعیین مقدار بهینه سفارش بود. میترا [۲] مسئله دو دوره‌ای احتمالی با در نظر گرفتن تعیین قیمت برای محصولات باقیمانده در پایان دوره را بررسی کرد. شیانگلینگ و پینگ [۳] فرض می‌کنند که روزنامه‌فروش قبل از آغاز فصل فروش یک دوره زمانی خاص را برای خرید محصول "زمان انعطاف‌پذیر" از یکی از تأمین‌کنندگان جایگزین که در قیمت نوسان دارند، در نظر می‌گیرد و از طریق تجزیه‌وتحلیل عددی نشان می‌دهند که استراتژی خریدوفروش مشترک بسیار بهتر از تصمیم‌گیری خریدوفروش جداگانه است و در نهایت به بررسی تأثیر پارامترهای کلیدی در تصمیم‌گیری خرید پرداخته‌اند. اولاً و همکاران [۲۹] قیمت‌گذاری پویا را در مدل روزنامه‌فروش چند دوره‌ای تحت تقاضای وابسته به قیمت تصادفی را بررسی کردند و آن‌ها سعی کردند که با در نظر گرفتن یک سیاست تخفیف، تا خرده‌فروشان مقدار سفارش بیشتری را در آغاز فصل سفارش دهد و در نهایت سود نهایی افزایش یابد. در نهایت به این نتیجه رسیدند که سیاست تخفیف پیشنهادی مقدار سود مورد انتظار سیستم را حداکثر می‌کند. در نهایت یک مثال عددی ارائه کردند و براساس آن به تحلیل حساسیت مدل پرداختند.

نخعی و همکاران [۳۰] بیان کردند که با توجه به شرایط رقابتی و محدود بودن طول دوره فروش محصولات فصلی مدیریت کالاهای

فصلی از اهمیت بالایی برخوردار هستند. آن‌ها مدل قیمت‌گذاری و کنترل موجودی توأم کالاهای فصلی و جایگزین موردبررسی قرار دادند و هدف اصلی خود را ارائه مدل تعیین همزمان قیمت و سیاست بهینه موجودی برای حداکثرسازی سود بنگاه بیان کردند.

در ادامه پیشینه تحقیق موردبررسی در جدول (۱) دسته‌بندی‌شده است. با توجه به پیشینه تحقیق بررسی شده، در مدل روزنامه‌فروش قیمت خرید محصول بیشتر به‌صورت قطعی در نظر گرفته شده است درحالی‌که در برخی از موارد قیمت خرید می‌تواند تصادفی باشد. در این مطالعه مدل روزنامه‌فروش چند دوره‌ای با تقاضا وابسته به قیمت در نظر گرفته می‌شود و قیمت خرید محصول نیز از یک فرآیند تصادفی پیروی می‌کند.

در این تحقیق، پژوهش انجام شده توسط میترا [۲] توسعه داده شده و فرض شده است که قیمت خرید محصول موردنیاز یک فرآیند تصادفی است که قبل از شروع دوره یک فاصله زمانی برای خرید محصول وجود دارد قیمت خرید در این فاصله به‌صورت تصادفی تغییر می‌کند و از مدل بلک شولز [۳۱] پیروی می‌کند. همچنین به‌صورت دو مرحله‌ای بررسی می‌شود که تقاضای محصول در طول دوره اول به‌صورت یک مقدار تصادفی و تقاضا در در طول دوره دوم وابسته به قیمت فروش در آن دوره است.

ادامه این مقاله به این صورت ارائه می‌شود که در بخش دوم مدل ریاضی مسئله تشریح شده و تابع سود مسئله فرموله می‌شود. همچنین با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی پویای احتمالی رویکرد حل مسئله توسعه داده شده و نحوه به‌دست آوردن جواب‌های بهینه بیان می‌شود. در نهایت در بخش سوم یک مثال عددی جهت تحلیل حساسیت پارامترهای مهم و اعتبارسنجی مدل ارائه می‌گردد.

جدول (۱): دسته‌بندی پیشینه تحقیق

نویسنده	سال	مدل: تک دوره‌ای	مدل: چند دوره‌ای	قیمت خرید: قطعی	قیمت خرید: تصادفی	قیمت گذاری	تقاضا: احتمالی	تقاضا: وابسته قیمت احتمالی	روش حل: بهینه‌سازی	روش حل: هیوریستیک	روش حل: متاهیوریستیک
پال و همکاران [۱۰]	۲۰۱۵	✓		✓			✓		✓		
پتروزی و دادا [۱۵]	۱۹۹۹	✓		✓		✓		✓	✓		
پسندیده و همکاران [۱۱]	۲۰۱۷	✓		✓			✓				✓
کرامت‌پور و همکاران [۱۲]	۲۰۱۸	✓		✓			✓				✓
میترا و چاترجی [۱۴]	۲۰۱۸	✓		✓		✓	✓		✓		
شیوما و همکاران [۲۳]	۲۰۱۷	✓		✓		✓		✓	✓		
ژانگ و همکاران [۲۸]	۲۰۱۹		✓	✓			✓		✓		
میترا [۲]	۲۰۱۸		✓	✓		✓		✓	✓		
شیانگلینگ و پینگ [۳]	۲۰۱۸	✓			✓			✓	✓		
اولا و همکاران [۲۹]	۲۰۱۹		✓	✓		✓		✓	✓		
این مقاله			✓		✓	✓		✓	✓		

۲. مدل‌سازی

در مدل موردبررسی، روزنامه‌فروش قبل از شروع دوره برنامه‌ریزی در فاصله زمانی‌که فرصت خرید محصول است، محصول موردنیاز خود را خریداری می‌کند و باید توجه کرد که قیمت خرید محصول در فاصله زمانی طبق یک فرایند تصادفی انجام می‌گیرد و قیمت خرید محصول از مدل بلک - شولز پیروی می‌کند، مقدار قیمت خرید در زمان t با $a(t)$ نشان داده می‌شود. محصول خریداری شده تا زمان شروع برنامه‌ریزی نگهداری می‌شود، نرخ هزینه نگهداری در این مدت زمان برابر h فرض شده است. با شروع دوره، تقاضا برای محصولات خریداری شده صادر می‌شود و همان‌طور که بیان شد، تقاضای محصول در طول دوره اول به‌صورت یک مقدار تصادفی و تقاضا در در طول دوره دوم وابسته به قیمت فروش در آن دوره است. در این تحقیق فرض شده است که تقاضای دوره دوم یک تابع خطی از قیمت فروش در آن دوره است پس اگر تقاضای محصول در دوره دوم با $D_{(\upsilon)}$ نشان داده شود، در این صورت تابع تقاضای دوره دوم را به‌صورت $D_{(\upsilon)} = \alpha - \beta\upsilon (\alpha, \beta > 0)$ نشان می‌دهیم که α نشان‌دهنده پتانسیل بازار است و β حساسیت تقاضا نسبت به قیمت را نشان می‌دهد.

در این مقاله، ابتدا براساس مفاهیم کنترل موجودی، تابع سود کل برای دو دوره برنامه‌ریزی تعیین می‌شود سپس براساس مفاهیم برنامه‌ریزی پویای برگشتی، ابتدا برای محصولات باقی‌مانده در پایان دوره اول، تصمیم‌گیری خواهد شد و مقدار قیمت بهینه محصولات در دوره دوم تعیین می‌شود سپس مقدار بهینه سفارش در دوره اول را تعیین می‌کنیم و در نهایت مقدار بهینه تابع سود کل تعیین می‌شود. سایر مفروضات مسئله به‌صورت زیر است.

مفروضات مسئله:

۱) تقاضا در دوره اول تصادفی و از توزیع مشخصی پیروی می‌کند.
۲) قیمت خرید یک فرآیند تصادفی و وابسته به زمان است.
۳) مسئله به‌صورت دو دوره‌ای بررسی می‌شود.
۴) تقاضا در دوره دوم وابسته به قیمت فروش در آن دوره است.

پارامترهای مسئله

p	قیمت فروش هر واحد از محصول
N	زمان فروش
h	نرخ هزینه نگهداری محصول خریداری شده
α	پارامتر تقاضا، که نشان‌دهنده پتانسیل بازار است
β	پارامتر تقاضا، که نشان‌دهنده حساسیت تقاضا به قیمت است

توابع

$D_{(\upsilon)}$	تقاضای دوره دوم
$\omega_{(\upsilon)}$	درآمد دوره دوم
κ	متغیر تصادفی تقاضا در دوره اول
I	موجودی باقیمانده در پایان دوره اول
$F_\kappa(\kappa)$	تابع توزیع تجمعی تقاضا در دوره اول
$f_\kappa(\kappa)$	تابع چگالی تقاضا در دوره اول
ψ	میزان سود سیستم در طول دو دوره

متغیرهای تصمیم

$a(\mathrm{t})$	قیمت خرید برای هر واحد از محصول در t
υ	قیمت فروش هر واحد محصول در دوره دوم
q	مقدار سفارش در ابتدای دوره اول
c	قیمت تمام شده برای هر واحد از محصول

۲-۱. بررسی تقاضای محصول

همان‌طور که بیان شد تقاضای محصول در طول دوره اول به‌صورت یک مقدار تصادفی و تقاضا در طول دوره دوم وابسته به قیمت فروش در آن دوره است. در این تحقیق فرض شده است که تقاضای دوره دوم یک تابع خطی از قیمت فروش در آن دوره است پس اگر تقاضای محصول در دوره دوم با $D_{(\upsilon)}$ نشان داده شود، در این صورت تابع تقاضای دوره دوم را به‌صورت $D_{(\upsilon)} = \alpha - \beta\upsilon(\alpha, \beta > 0)$ نشان می‌دهیم که α نشان‌دهنده پتانسیل بازار است و β حساسیت تقاضا نسبت به قیمت را نشان می‌دهد. در این رابطه، مشخص است که مقدار حداکثر قیمت فروش در دوره دوم را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد.

$$\alpha - \beta\upsilon = 0 \Rightarrow \upsilon_{\max} = \frac{\alpha}{\beta}$$

۲-۲. محاسبه درآمد در دوره دوم

در تعیین مقدار درآمد حاصل از قیمت فروش در دوره دوم، می‌توان قیمت محصول را در تابع تقاضا خطی ضرب کرد که با توجه به رابطه (۱) به دست می‌آید. چون هدف اصلی مسئله در دوره دوم تعیین بهینه قیمت هر واحد محصول در دوره دوم با هدف حداکثر کردن درآمد در طول این دوره است پس ابتدا با توجه به تابع درآمد به تعیین مقدار بهینه قیمت فروش در دوره دوم پرداخته شده است.

$$\omega_{(\upsilon)} = \upsilon D_{(\upsilon)} = \alpha\upsilon - \beta\upsilon^2 \tag{۱}$$

لم ۱: تابع درآمد دوره دوم رابطه (۱) مقعر است.

اثبات: تابع $\omega_{(\upsilon)}$ مقعر است اگر و تنها اگر مشتق دوم تابع نسبت به قیمت فروش منفی باشد.

مشتق اول تابع درآمد نسبت به υ:

$$\frac{\partial(\omega_{(\upsilon)})}{\partial\upsilon} = \alpha - 2\beta\upsilon$$

مشتق دوم تابع درآمد نسبت به υ:

$$\frac{\partial^2(\omega_{(\upsilon)})}{\partial\upsilon^2} = -2\beta < 0$$

مشتق دوم منفی است و نشان می‌دهد $\omega_{(\upsilon)}$ مقعر است.

۲-۳.تعیین روند قیمت‌گذاری محصولات پایان دوره

برای حل مسئله از برنامه‌ریزی پویا برگشتی استفاده می‌شود، بر این اساس ابتدا وضعیت دوره دوم براساس میزان موجودی باقیمانده در ابتدای دوره دوم مشخص می‌شود. سپس براساس جواب به‌دست‌آمده در دوره دوم، به بررسی جواب بهینه دوره اول پرداخته می‌شود.

با توجه به اینکه تابع درآمد مقعر است اگر مشتق اول را برابر صفر قرار داد می‌توان مقدار بهینه قیمت فروش در دوره دوم را به‌دست آورد.

$$\frac{\partial(\omega_{(\upsilon)})}{\partial\upsilon} = 0 \Rightarrow \alpha - 2\beta\upsilon = 0$$

$$\Rightarrow \upsilon^* = \frac{\alpha}{2\beta} \tag{۲}$$

با جایگذاری مقدار بهینه قیمت فروش در دوره دوم در رابطه $D_{(\upsilon)} = \alpha - \beta\upsilon$ مقدار بهینه فروش را می‌توان به‌دست آورد.

$$D^*_{(\upsilon^*)} = \frac{\alpha}{2} \tag{۳}$$

همچنین با جایگذاری مقدار بهینه قیمت فروش در دوره دوم و مقدار بهینه فروش در رابطه (۱) مقدار بهینه درآمد در دوره دوم را می‌توان به‌دست آورد.

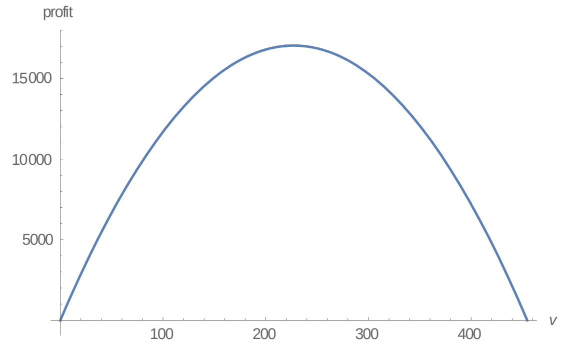
$$\omega^*_{(\upsilon^*)} = \frac{\alpha^2}{4\beta} \tag{۴}$$

بنابراین روند تصمیم‌گیری براساس تفکر برنامه‌ریزی پویا برگشتی برای قیمت‌گذاری در دوره دوم به‌صورت زیر بیان می‌شود:

۱. درصورتی‌که موجودی ابتدای دوره دوم از مقدار بهینه فروش در در دوره دوم ($D^*_{(\upsilon^*)}$) بیشتر باشد، مقدار بهینه قیمت هر واحد محصول در دوره دوم $\upsilon^* = \frac{\alpha}{2\beta}$ خواهد بود.

۲. از طرف دیگر اگر موجودی دوره دوم از مقدار بهینه فروش در دوره دوم کمتر باشد، ($I < D^*_{(\upsilon^*)}$)تمام موجودی باقی‌مانده فروخته می‌شود و مقدار بهینه قیمت فروش آن به‌صورت رابطه زیر محاسبه می‌شود.

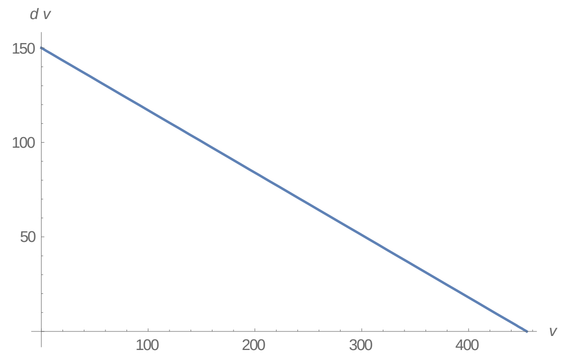
$$D(\upsilon) = \alpha - \beta\upsilon \Rightarrow \mathrm{I} = \alpha - \beta\upsilon \rightarrow \beta\upsilon = \alpha - I$$
$$\Rightarrow \upsilon = \frac{1}{\beta}(\alpha - I) \tag{۵}$$



شکل (۱): تغییرات درآمد نسبت به قیمت فروش

در شکل(۱) تابع درآمد به‌عنوان نمونه به ازای تابع تقاضا برابر $D_{(\upsilon)} = 150 - 0.33\times\upsilon$ رسم شده است که مقدار بهینه قیمت فروش با توجه به رابطه(۲) برابر ۲۲۷/۲۷ می‌شود.

شکل (۲) تغییرات تقاضا نسبت به قیمت فروش را نشان می‌دهد که تابع تقاضا برابر $D_{(\upsilon)} = 150 - 0.33\times\upsilon$ در نظر گرفته شده است و مقدار بهینه قیمت فروش برابر ۲۲۷/۲۷ است.



شکل (۲): تغییرات تقاضا نسبت به قیمت فروش

۲-۴. تابع سود کل

بعد از تصمیم‌گیری دوره دوم براساس حالات مختلف موجودی باقیمانده در پایان دوره اول، حال به بررسی دوره اول پرداخته می‌شود. اگر تقاضا در دوره اول کمتر از میزان سفارش باشد در این صورت مقداری از محصولات در پایان دوره اول باقیمانده است که باید برای دوره دوم تعیین قیمت شوند. در این صورت میزان سود کل برابر با مجموع میزان فروش در دوره اول و درآمد در دوره دوم منهای هزینه خرید است که رابطه آن به‌صورت زیر است.

$$\psi_1 = p\kappa + \omega_\upsilon - cq \tag{۶}$$

اگر مقدار موجودی باقیمانده در پایان دوره اول از مقدار بهینه فروش دوره دوم بیشتر باشد در این صورت به‌جای ω_υ در رابطه (۶) می‌توان مقدار بهینه فروش در دوره دوم ($\omega^*_{(\upsilon^*)}$) را جایگذاری نمود. در این صورت داریم:

$$\psi_2 = p\kappa + \omega^*_{(\upsilon^*)} - cq \quad if \quad \kappa < q - D^*_{(\upsilon^*)} \tag{۷}$$

اگر مقدار موجودی باقیمانده در پایان دوره اول از مقدار بهینه فروش دوره دوم کمتر باشد در این صورت مقدار قیمت فروش در دوره دوم بستگی به میزان موجودی باقیمانده دارد که مقدار آن را براساس رابطه (۵) تعیین می‌شود.

$$\psi_3 = p\kappa + \frac{1}{\beta}\big(\alpha - (q-\kappa)\big)(q-\kappa) - cq$$
$$if \quad \kappa > q - D^*_{(\upsilon^*)} \ \ \& \ \ \kappa < q \tag{۸}$$

اگر تقاضا در دوره اول بیشتر از میزان سفارش باشد در این صورت برای دوره دوم موجودی باقی نمی‌ماند در این صورت ω_υ برابر صفر خواهد شد و مقدار سود در این حالت به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\psi_3 = (p-c)q \quad if \quad \kappa > q \tag{۹}$$

بنابراین با توجه به حالات بیان شده مقدار متوسط سود کل $E[\psi]$ به‌صورت رابطه (۱۰) است اگر در این رابطه $\mathrm{M} = p\kappa + \frac{1}{\beta}\{\alpha - (q-\kappa)\}(q-\kappa) - cq$ باشد:

$$\mathrm{E}[\psi] = \int_0^{q-\alpha/2}\left(p\kappa + \frac{\alpha^2}{4\beta} - cq\right) f_\kappa(\kappa)d\kappa$$
$$+\int_{q-\alpha/2}^{q} \mathrm{M}\times f_\kappa(\kappa)d\kappa + \int_q^\infty (p-c)qf_\kappa(\kappa)d\kappa \tag{۱۰}$$

با ساده‌سازی رابطه فوق مقدار متوسط سود مورد انتظار به‌صورت رابطه (۱۱) است اگر در این رابطه $\mathrm{Z} = p\kappa + \frac{\alpha}{\beta}(q-\kappa) - \frac{1}{\beta}(q-\kappa)^2 - cq$ باشد:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\psi] &= \frac{\alpha^2}{4\beta}\int_0^{q-\alpha/2} f_\kappa(\kappa)d\kappa + \int_0^q \mathrm{Z}\times f_\kappa(\kappa)d\kappa \\
&-\int_0^{q-\alpha/2}\left[\frac{\alpha}{\beta}(q-\kappa)-\frac{1}{\beta}(q-\kappa)^2\right]f_\kappa(\kappa)d\kappa \\
&+\int_q^\infty (p-c)q f_\kappa(\kappa)d\kappa \\
&= \frac{\alpha^2}{4\beta}F_\kappa\left(q-\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{\alpha}{\beta}\int_0^q (q-\kappa)\, f_\kappa(\kappa)d\kappa - \\
&\frac{\alpha}{\beta}\int_0^{q-\alpha/2}(q-\kappa)\, f_\kappa(\kappa)d\kappa - \frac{1}{\beta}\int_0^q (q-\kappa)^2\, f_\kappa(\kappa)d\kappa + \\
&\frac{1}{\beta}\int_0^{q-a/2}(q-\kappa)^2\, f_\kappa(\kappa)d\kappa - c\int_0^q (q-\kappa)\, f_\kappa(\kappa)d\kappa - \\
&(p-c)\int_q^\infty (\kappa-q)\, f_\kappa(\kappa)d\kappa + (p-c)\,\mu_\kappa
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

لم ۲: تابع سود مقعر است.

اثبات: تابع سود نسبت به q اکیداً مقعر است اگر و تنها اگر مشتق دوم آن نسبت به میزان سفارش منفی باشد. مشتق اول $E[\psi]$ نسبت به q به‌صورت رابطه (۱۲) است.

$$\begin{aligned}
\frac{d(\mathrm{E}[\psi])}{dq} &= \frac{\alpha^2}{4\beta}\, f_\kappa\left(q-\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{\alpha}{\beta}F_\kappa(q) - \\
&\frac{\alpha}{\beta}\left[F_\kappa\left(q-\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{\alpha}{2}\, f_\kappa\left(q-\frac{\alpha}{2}\right)\right] \\
&-\frac{2}{b}\int_0^q F_\kappa(\kappa)d\kappa + \\
&\frac{2}{\beta}\left[\frac{\alpha}{2}F_\kappa\left(q-\frac{\alpha}{2}\right)+\int_0^{q-\alpha/2}F_\kappa(\kappa)d\kappa\right] + \\
&\frac{\alpha^2}{4\beta}\, f_\kappa\left(q-\frac{\alpha}{2}\right)+(p-c)-pF_\kappa(q) \\
&= (p-c)-\left(p-\frac{\alpha}{\beta}\right)F_\kappa(q) - \\
&\frac{2}{\beta}\left[\int_0^q F_\kappa(\kappa)d\kappa - \int_0^{q-\alpha/2}F_\kappa(\kappa)d\kappa\right]
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

مشتق دوم $E[\psi]$ نسبت به q به‌صورت رابطه (۱۳) است.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2(\mathrm{E}[\psi])}{dq^2} &= -\left(p-\frac{\alpha}{\beta}\right)f_\kappa(q) - \\
&\frac{2}{\beta}\left[F_\kappa(q)-F_\kappa\left(q-\frac{\alpha}{2}\right)\right]
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

چون $P > \upsilon_{\max} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ و $F_x(\mathrm{q}) > F_x\left(q-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ پس $\dfrac{d^2(\mathrm{E}[\psi])}{dq^2} < 0$ است و تابع سود نسبت به q مقعر است.

۲-۵. محاسبه مقدار سفارش

پس از تعیین قیمت فروش در دوره دوم در مورد مقدار بهینه سفارش باید تصمیم‌گیری شود. مقدار سفارش بهینه در ابتدای دوره اول با توجه به توزیع تقاضا در دوره اول و عملکرد درآمد در پایان دوره دوم تهیه می‌شود. برای تعیین مقدار سفارش با توجه به مقعر بودن تابع سود، می‌توان مشتق اول $E[\psi]$ نسبت به q را برابر صفر قرار داد. فرض شده است که مقدار تقاضا در دوره اول تصادفی است و از توزیع یکنواخت در طول بازه $[A,B]$ پیروی می‌کند. در این صورت مقدار مشتق اول تابع سود نسبت به میزان سفارش به‌صورت رابطه (۱۴) است.

$$\begin{aligned}
\frac{d(\mathrm{E}[\psi])}{dq} &= (p-c)-\left(p-\frac{\alpha}{\beta}\right)F_\kappa(q) - \\
&\frac{2}{b}\left[\int_0^q F_\kappa(\kappa)d\kappa - \int_0^{q-\alpha/2}F_\kappa(\kappa)d\kappa\right] = 0
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

که در این رابطه مقدار χ به‌صورت زیر است و برای ساده‌سازی با χ نشان داده شده است.

$$\frac{A^2}{2(B-A)}+\frac{(\mathrm{a}+2\mathrm{A}-2\mathrm{S})^2}{8(A-B)}+\frac{q^2}{2(B-A)}+\frac{qA}{(B-A)}$$

در این صورت رابطه (۱۴) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\frac{d(\mathrm{E}[\psi])}{dq} = -c+p-\frac{\left(-\dfrac{\alpha}{\beta}+p\right)(q-A)}{(B-A)}-\frac{2\times\chi}{b}$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتق اول تابع سود نسبت به مقدار سفارش، می‌توان مقدار بهینه سفارش‌دهی را تعیین کرد در این صورت داریم:

$$\Rightarrow \frac{d(\mathrm{E}[\psi])}{dq} = -\frac{\alpha^2+4A\beta c+4\beta Bc+4\beta Bp-4\beta pS}{4\beta(A-B)} = 0$$

$$\Rightarrow q^* = \frac{\alpha^2+4\beta cA-4\beta cB+4\beta pB}{4\beta p} \tag{۱۵}$$

با توجه به تصادفی بودن تقاضا در طول دوره اول، میزان درآمد دوره دوم نیز تصادفی است و مقدار متوسط آن را می‌توان براساس رابطه (۱۶) به‌دست آورد.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\omega] &= \int_A^{q-\alpha/2}\left(\frac{\alpha^2}{4\beta}\right)\times\frac{1}{B-A}\times d\kappa + \\
&\int_{q-\alpha/2}^q\left[\left(\frac{1}{\beta}\big(\alpha-(q-\kappa)\big)\right)(q-\kappa)\right]\times \\
&\frac{1}{B-A}\times d\kappa
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

۲-۶. بررسی قیمت خرید محصول

در این تحقیق فرض می‌شود قیمت خرید محصول از مدل بلک شولز پیروی می‌کند. این مدل یکی از معتبرترین مدل‌های موجود جهت

قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ها می‌باشد که نقش اساسی و محوری در مهندسی مالی داشته است. فرض اساسی در این مدل این است که قیمت سهام از یک فرایند تصادفی پیروی می‌کند و تغییرات قیمت سهام در یک دوره زمانی کوتاه‌مدت دارای توزیع لاگ نرمال می‌باشد. الگوی بلک-شولز از طریق یک الگوی عمومی و با استفاده از منحنی نرمال قیمت اختیار معامله به دست می‌آید. در این مقاله نیز قیمت خرید محصول در زمان t دارای یک فرآیند تصادفی $a=\left\{a_{(t)},t\geq 0\right\}$ است که توسط معادله (۱۶) بیان شده است [۳۲].

$$da(t)=a(t)\left\{\mu dt+\sigma dW(t)\right\} \qquad t\geq 0 \tag{۱۷}$$

فرآیند $w=\left\{w_{(t)},t\geq 0\right\}$ یک حرکت براونی استاندارد است که در آن مقدار اولیه این فرایند برابر صفر است به‌عبارت‌دیگر $w_{(0)}$ برابر صفر است همچنین $E\left[w_{(t)}\right]=0$ و $E\left[w_{(t)}^2\right]=t$ است در این صورت با حل معادله (۱۷)مقدار قیمت خرید در زمان t به‌صورت رابطه (۱۸) است.

$$a(t)=a(0)\times Exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\times W(t)\right), \tag{۱۸}$$
$$\mu\in R,\ \ \sigma>0\ \ and\ \ t>0$$

در رابطه (۱۷)، $\mu\in R$ و $\sigma\in R$ به‌ترتیب متوسط نرخ رشد قیمت و انحراف معیار نرخ رشد قیمت خرید را نشان می‌دهند و این ضرایب ثابت هستند. فرایند $a=\left\{a_{(t)},t\geq 0\right\}$ معمولاً در مدل‌هایی که قیمت آن‌ها مشخص نیست استفاده می‌شود.

با توجه به اینکه محصول خریداری شده ممکن است قبل از شروع دوره اول خریداری شود پس نیاز است این محصولات تا زمان فروش نگهداری شوند و این امر بر روی قیمت خرید تمام شده محصولات تأثیر می‌گذارد. اگر خریدار در زمان t خرید خود را انجام دهد و آن را در زمان N به فروش برساند، بنابراین خریدار محصول را به اندازه $(N-t)$ واحد زمانی نگهداری می‌کند و اگر نرخ هزینه نگهداری در واحد زمان h باشد در این صورت هزینه نگهداری محصول به‌صورت $a_{(t)}\left[h(N-t)\right]$ است.

قیمت تمام شده به‌صورت مجموع هزینه خرید و هزینه نگهداری بیان شده است و چون قیمت خرید محصول یک فرآیند تصادفی است بنابراین قیمت تمام شده محصول نیز به‌صورت یک فرآیند تصادفی بیان می‌شود که به‌صورت رابطه (۱۹) است.

$$\begin{aligned}c(t)&=a(t)+a(t)\times h\times(N-t)\\&=a(t)\times(h\times N+1-h\times t)\end{aligned} \tag{۱۹}$$

روش تعیین قیمت محصول

با توجه به اینکه هزینه قیمت تمام شده محصول در طول زمان تغییر می‌کند، پس یک استراتژی بهینه طراحی شده است تا بتوان بهترین زمان خرید را تعیین کرد. پس از تعیین زمان خرید با استفاده از روش برگشتی می‌توان مقدار سفارش مطلوب و قیمت خرید را به‌دست آورد.

یکی از روش‌های بسیار کاربردی در تعیین قیمت و ارزش‌گذاری محصولات و معاملات روش قیمت‌گذاری دوجمله‌ای است. در الگوی دوجمله‌ای (الگوی درختی)، قیمت‌گذاری براساس یک مسیر دوجمله‌ای به افزایش و کاهش قیمت‌ها در زمان سررسید توجه می‌شود و با استفاده از درخت دوجمله‌ای، ارزش اختیار معامله به دست می‌آید. در این مقاله از درخت دوجمله‌ای [۳۳] برای به دست آوردن تقریبی از $a_{(t)}$ استفاده می‌شود. این روش به این صورت است که ابتدا، فاصله زمانی $[0,T]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌شود و مقدار آن با Δ نشان داده می‌شود پس

$$\Delta=T/n, \qquad i=j\Delta, \qquad j=0,1,2,\ldots n-1$$

قیمت خرید اولیه $a(\mathrm{i})$ است و فرض اولیه به این صورت است که چون هزینه خرید از یک فرایند قدم زدن تصادفی پیروی می‌کند در هر مرحله زمانی ممکن است دو نوع قیمت خرید وجود داشته باشد یعنی در صورت افزایش، قیمت خرید در $\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta}}$ و در صورت کاهش، قیمت خرید در $\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$ ضرب می‌شود. فرض می‌شود که در هر مرحله قیمت خرید به دو مقدار یکی با احتمال ς به $a(\mathrm{i})\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta}}$ و یا با احتمال $1-\varsigma$ به $a(\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$ می‌رسد. در قیمت خرید به‌جای t از $i+\Delta$ در درخت دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم که در این رابطه $\lambda=1+\frac{\mu-.5\sigma^2}{\sigma}\sqrt{\Delta}$ و $\gamma=1-\frac{\mu-.5\sigma^2}{\sigma}\sqrt{\Delta}$ است.

$$a(\mathrm{i}+\Delta)\begin{cases}a(\mathrm{i})\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta}} & prob\quad \varsigma=\frac{1}{2}(\lambda)\\ a(\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta}} & prob\ \ 1-\varsigma=\frac{1}{2}(\gamma)\end{cases} \tag{۲۰}$$

پس از اینکه مقدار قیمت خرید برای تمام نقاط تعیین شد، قیمت تمام شده محصول را برای تمام نقاط از درخت دوجمله‌ای با استفاده از معادله (۱۹) به‌دست می‌آوریم سپس با استفاده از برنامه‌ریزی پویا احتمالی بازگشتی مقدار سود را تعیین می‌کنیم.

در این حالت اگر i یکی از تاریخ‌های تصمیم‌گیری باشد در این صورت ارزش‌گذاری اختیار معامله به‌صورت زیر بیان می‌شود که در این رابطه $c(t)=a(i)(h\times n+1-h\times i)$، $\eta=(\mathrm{i}+\Delta,1)$ و $\delta=(\mathrm{i}+\Delta,2)$ است.

$$\begin{aligned}&U(i)=\\&Max\left\{\varsigma\times U(\eta)+(1-\varsigma)\times U(\delta),\Pi^*\left(c(t)\right)\right\}\end{aligned} \tag{۲۱}$$

در رابطه (۲۱) برای به‌دست آوردن مقادیر مختلف ارزش‌گذاری اختیار معامله ($U(i)$) در طول دوره موردنظر براساس برنامه‌ریزی پویا برگشتی استفاده می‌شود، ابتدا مقدار $U(n)$ محاسبه می‌شود که مقدار آن برابر با مقدار متوسط سود در همان دوره است. سپس مقادیر

ارزش معامله در دوره $n-1$ برابر با مقدار متوسط ارزش معامله در دوره n است که مقدار آن براساس رابطه(۲۲) محاسبه می‌شود. برای دوره $i\,,\, i=1,2,...,n-2$ برای محاسبه $U(i)$ از رابطه (۲۱) استفاده می‌شود.

$$U_{n-1}=\varsigma\times U_n(i+\Delta,1)+(1-\varsigma)\times U_n(i+\Delta,2) \qquad (۲۲)$$

۲-۷. رویکرد حل مسئله

رویکرد حل مسئله، براساس روش برنامه‌ریزی پویا بیان شده است در این مقاله از روش برنامه‌ریزی پویا برگشتی برای حل مسئله و تعیین متغیرهای تصمیم استفاده شده است بنابراین براساس نگرش برنامه‌ریزی پویا، مسئله به‌صورت سه مرحله در نظر گرفته شده است که ابتدا مرحله سوم موردبررسی قرار می‌گیرد و متغیر تصمیم در این مرحله قیمت فروش در دوره دوم ا ست بعد از تعیین قیمت فروش در دوره دوم، که بنا به مفاهیم برنامه‌ریزی پویا به میزان سفارش وابسته است به برنامه‌ریزی مرحله دوم می‌پردازیم در این دوره نیز براساس نگرش برنامه‌ریزی پویا مقدار بهینه سفارش با در نظر گرفتن نتایج مرحله سوم با هدف حداکثر کردن سود در این مرحله تعیین می‌شود. سپس در مرحله اول برنامه‌ریزی پویا با در نظر گرفتن مرحله دوم، نوبت به تعیین تصمیم‌گیری در مرحله اول می‌رسد در این مرحله نیز قیمت خرید محصول با در نظر گرفتن نتایج مراحل قبلی، تعیین می‌شود.

روند کلی برنامه‌ریزی پویای احتمالی بیان شده مطابق با الگوریتم زیر است:

قدم اول: مقدار پارامترهای مسئله مشخص شود

قدم دوم: Δ مساوی T/n قرار داده شود و $i=j\Delta \quad \& \quad j=0,1,2,...n-1$

قدم سوم: مقدار $U(n)$ برابر متوسط سود در دوره n قرار داده شود.

قدم چهارم: در دوره $n-1$ مقادیر $U(n-1)$ از رابطه (۲۲) محاسبه شود.

قدم پنجم: دوره‌های $(n-2)$ تا ۱ از رابطه برگشتی زیر محاسبه شود:

$$U(\mathrm{i})=\max\left\{\prod^*\left(c(\mathrm{t})\right),\varsigma U(\mathrm{i}+\Delta,1)+(1-\varsigma)U(\mathrm{i}+\Delta,2)\right\}$$

قدم ششم: اگر $j\leq 1$ باشد سپس برو به قدم ۷ در غیر این صورت $j=j-1$ و بازگشت به قدم ۵

قدم هفتم: پایان

براساس برنامه‌ریزی پویا، پس از اتمام مراحل تصمیم‌گیری، سعی می‌شود تصمیم بهینه را تعیین کرد. در این مرحله به دنبال بهترین زمان برای تعیین سفارش‌دهی هستیم برای این منظور در هر مقطع زمانی پس از به دست آوردن مقدار $U(i)$ برای تمام دوره‌ها از دوره آخر در هر دوره برای تمام شاخه‌ها اگر رابطه (۲۲) برقرار باشد، آن مقطع زمانی بهترین زمان برای خرید است و در این مقطع زمانی، می‌توان مقدار بهینه سفارش q^* را براساس رابطه (۱۵) و همچنین مقدار بهینه قیمت تمام شده را محاسبه کرد و این روند تا ابتدای دوره ادامه دارد.

$$\prod^*\left(c(\mathrm{t})\right)\geq\varsigma\,\mathrm{U(i+\Delta,1)}+(1-\varsigma)\,\mathrm{U(i+\Delta,2)} \qquad (۲۳)$$

۳. مثال عددی

محصولی را در نظر بگیرید که قیمت خرید آن یک فرایند تصادفی است که از رابطه $c(\mathrm{t})=\mathrm{a(t)}(0.1\times 3+1-0.1\mathrm{t})$ پیروی می‌کند $\mathrm{a(t)}$ یک فرایند تصادفی است که برای به‌دست آوردن آن از درخت دوجمله‌ای استفاده می‌شود که مقادیر آن در طی زمان مطابق نمودار (۱) است. همچنین نرخ هزینه نگهداری هر واحد محصول برابر ۰/۱ است و قیمت خرید اولیه محصول ۷۰ واحد است در این حالت فاصله زمانی $[0,3]$ را به ۵ فاصله زمانی کوتاه تقسیم می‌شود. مقدار انحراف معیار و متوسط نرخ رشد قیمت خرید برابر ۱ است و تقاضا در دوره اول تصادفی بوده و دارای توزیع یکنواخت در طول بازه $[50,300]$ است همچنین تقاضا در دوره دوم ثابت بوده و وابسته به قیمت فروش است و رابطه آن $D_{(\upsilon)}=150-0.33\times\upsilon$ است. قیمت هر واحد از این محصول در طول دوره ۵۰۰ است. نتایج به‌دست‌آمده به‌صورت زیر است.

با توجه به رابطه (۲) و (۴) مقدار درآمد بهینه و مقدار بهینه قیمت فروش در دوره دوم به‌صورت زیر تعیین شده است:

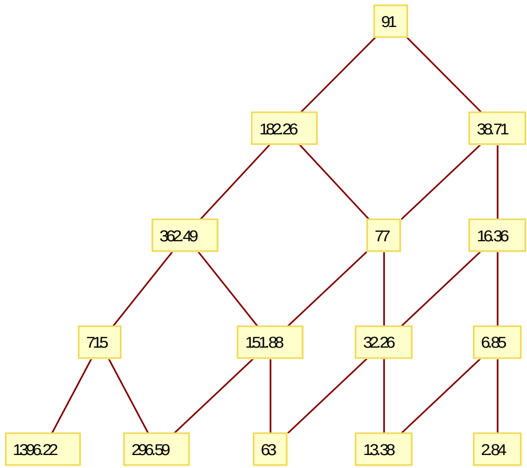
$R^*_{(v^*)}=$۱۸۷۵۰

$\upsilon^*=$۲۲۷/۲۷

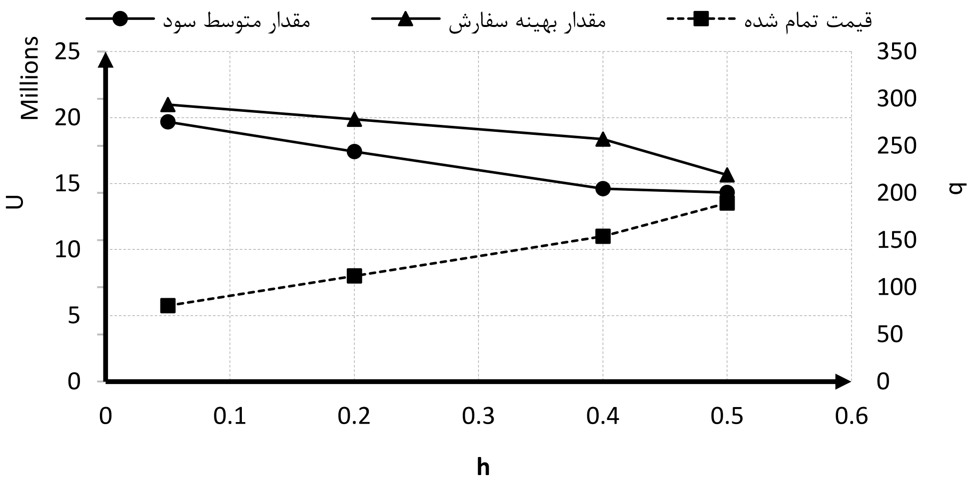
قیمت تمام شده محصول برای چهار دوره از رابطه (۱۸) که با توجه به قیمت خرید که از رابطه (۱۹) به‌دست می‌آید به‌صورت زیر به‌دست‌آمده است:

جدول (۲): تحلیل حساسیت مدل براساس مثال بیان شده

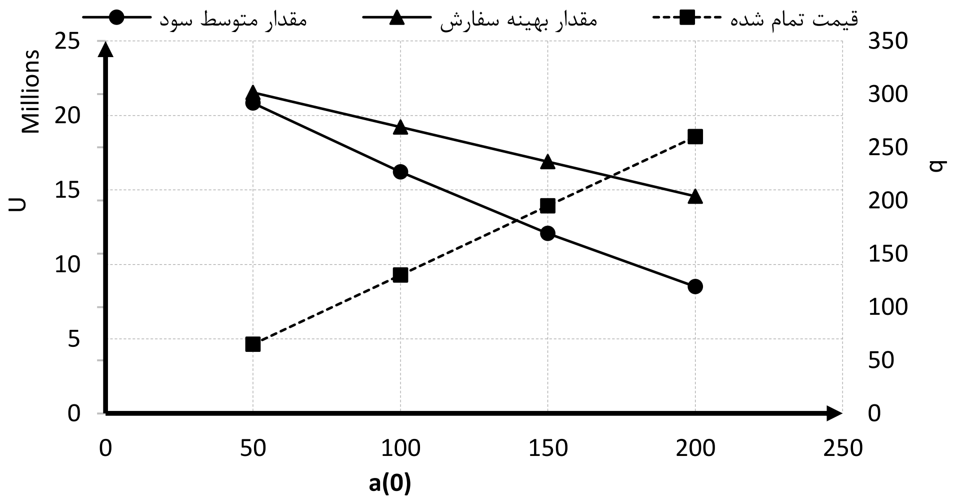
متغیرهای تصمیم			پارامترهای مدل							#
مقدار متوسط سود	سفارش بهینه	قیمت بهینه تمام شده	حساسیت تقاضا نسبت به قیمت	پتانسیل بازار	متوسط نرخ رشد قیمت خرید	انحراف معیار نرخ رشد قیمت خرید	قیمت خرید اولیه هر واحد از محصول	نرخ هزینه نگهداری هر واحد محصول	ردیف	
۱۹۶۸۲۰۰۰	۲۹۳/۸۱	۸۰/۵۰	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۱	۷۰	۰/۰۵	۱	تغییرات هزینه نگهداری
۱۷۴۳۰۰۰۰	۲۷۸/۰۹	۱۱۲	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۱	۷۰	۰/۲	۲	
۱۴۶۲۱۰۰۰	۲۵۷/۰۹	۱۵۴	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۱	۷۰	۰/۴	۳	
۱۴۳۱۲۰۰۰	۲۱۹/۱۶	۱۸۹/۴۵	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۱	۷۰	۰/۵	۴	
۲۰۸۳۶۰۰۰	۳۰۱/۵۹	۶۵	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۱	۵۰	۰/۱	۵	تغییرات قیمت خرید اولیه
۱۶۱۹۹۰۰۰	۲۶۹/۰۹	۱۳۰	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۱	۱۰۰	۰/۱	۶	
۱۲۰۹۰۰۰۰	۲۳۶/۵۹	۱۹۵	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۱	۱۵۰	۰/۱	۷	
۸۵۰۹۸۰۰	۲۰۴/۰۹	۲۶۰	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۱	۲۰۰	۰/۱	۸	
۱۸۹۱۸۰۰۰	۲۸۸/۵۹	۹۱	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۱/۴	۷۰	۰/۱	۹	تغییرات انحراف معیار
۱۸۹۱۸۰۰۰	۲۸۸/۵۹	۹۱	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۲	۷۰	۰/۱	۱۰	
۲۳۲۰۶۰۰۰	۲۹۵/۸۱	۴۶/۳۰	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۳	۷۰	۰/۱	۱۱	
۲۴۴۵۲۰۰۰	۳۱۴/۸۶	۳۱/۵۳	۰/۳۳	۱۵۰	۱	۳/۴	۷۰	۰/۱	۱۲	
۲۱۹۷۰۰۰۰	۳۰۴/۴۳	۵۷/۳۵	۰/۳۳	۱۵۰	۰/۰۵	۱	۷۰	۰/۱	۱۳	تغییرات میانگین
۲۱۵۴۸۰۰۰	۳۰۰/۵۹	۶۳/۹۰	۰/۳۳	۱۵۰	۰/۱	۱	۷۰	۰/۱	۱۴	
۱۸۹۱۸۰۰۰	۲۸۸/۵۹	۹۱	۰/۳۳	۱۵۰	۱/۳	۱	۷۰	۰/۱	۱۵	
۱۸۹۱۸۰۰۰	۲۸۸/۵۹	۹۱	۰/۳۳	۱۵۰	۱/۵	۱	۷۰	۰/۱	۱۶	
۱۶۲۹۷۰۰۰	۲۶۱/۹۲	۹۱	۰/۳۳	۷۰	۱	۱	۷۰	۰/۱	۱۷	تغییرات پتانسیل بازار
۱۷۰۴۷۰۰۰	۲۶۹/۶۵	۹۱	۰/۳۳	۱۰۰	۱	۱	۷۰	۰/۱	۱۸	
۱۸۰۷۲۰۰۰	۲۸۰/۱۱	۹۱	۰/۳۳	۱۳۰	۱	۱	۷۰	۰/۱	۱۹	
۱۹۳۹۳۰۰۰	۲۹۳/۲۹	۹۱	۰/۳۳	۱۶۰	۱	۱	۷۰	۰/۱	۲۰	
۱۸۶۱۶۰۰۰	۲۸۵/۷۵	۹۱	۰/۳۶	۱۵۰	۱	۱	۷۰	۰/۱	۲۱	تغییرات حساسیت تقاضا نسبت به قیمت
۱۸۳۶۵۰۰۰	۲۸۳/۳۵	۹۱	۰/۳۹	۱۵۰	۱	۱	۷۰	۰/۱	۲۲	
۱۸۱۵۱۰۰۰	۲۸۱/۲۹	۹۱	۰/۴۲	۱۵۰	۱	۱	۷۰	۰/۱	۲۳	
۱۷۹۶۸۰۰۰	۲۷۹/۵۰	۹۱	۰/۴۵	۱۵۰	۱	۱	۷۰	۰/۱	۲۴	



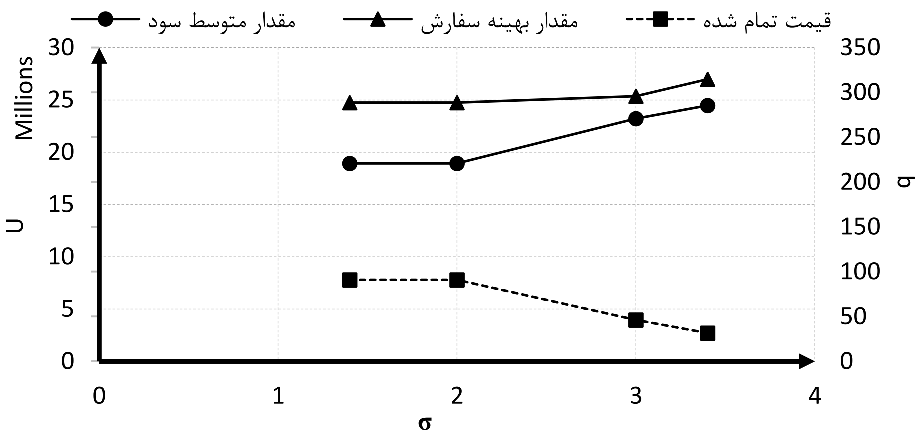
نمودار (۱): قیمت خرید برای هر واحد از محصول در t ($a(t)$)



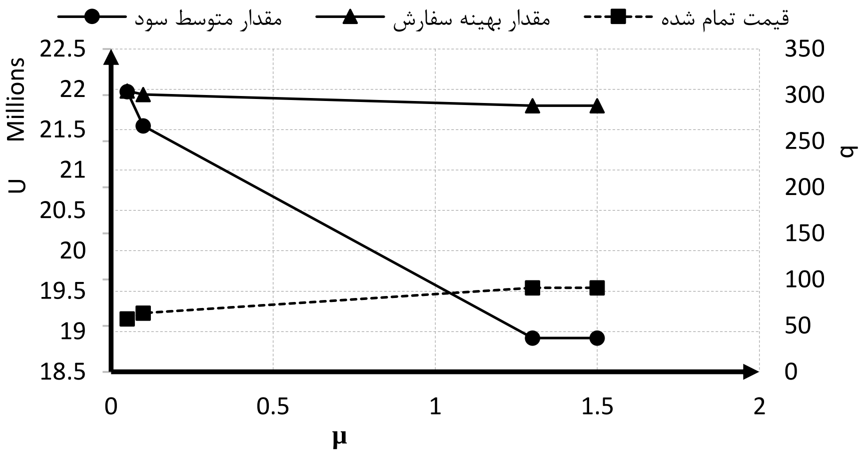
شکل (۳): نمودار تحلیل حساسیت تغییرات هزینه نگهداری



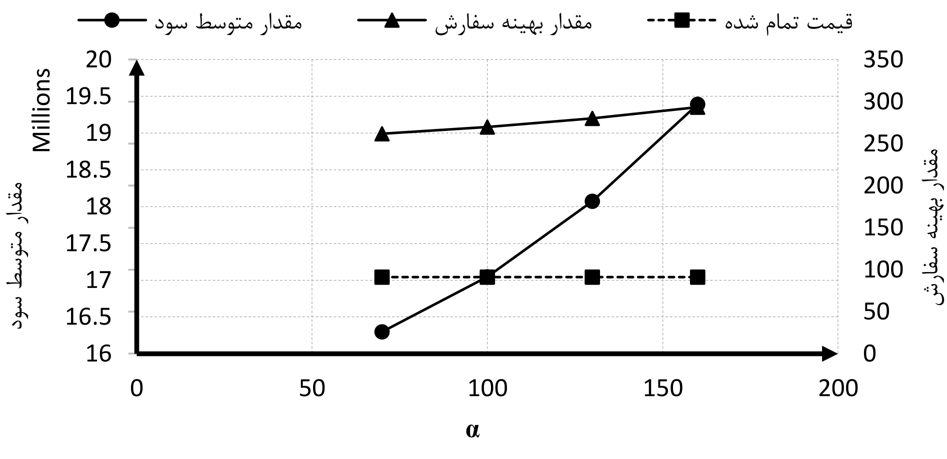
شکل (۴): نمودار تحلیل حساسیت تغییرات قیمت خرید اولیه



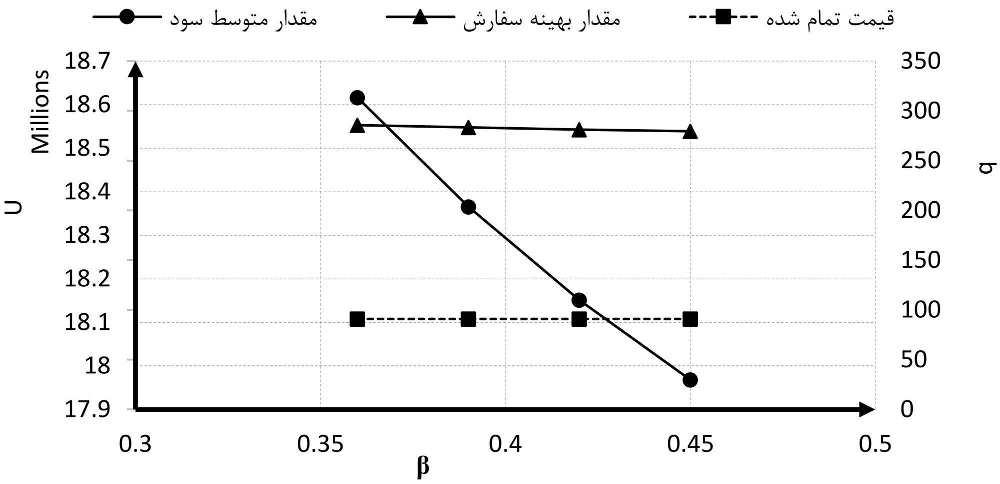
شکل (۵): نمودار تحلیل حساسیت تغییرات انحراف معیار



شکل (۶): نمودار تحلیل حساسیت تغییرات میانگین



شکل (۷): نمودار تحلیل حساسیت تغییرات پتانسیل بازار



شکل (۸): نمودار تحلیل حساسیت تغییرات حساسیت تقاضا نسبت به قیمت

مقادیر بهینه سفارش، قیمت تمام شده محصول و مقدار متوسط سود و قیمت خرید به‌صورت زیر است:

q^* =۲۸۸/۵۹ c^* =۹۱

U =۱۸۹۱۸۰۰۰ a =۷۰

در ادامه برای تحلیل حساسیت مدل، تغییرات هزینه نگهداری، قیمت اولیه و تغییرات انحراف معیار و میانگین را بر جواب بهینه مسئله موردبررسی قرار گرفت و نتایج حاصل در جدول (۲) نشان داده شده است.

همان‌طور که در جدول(۲) و شکل (۳) مشخص است با افزایش هزینه نگهداری، قیمت تمام شده محصول افزایش می‌یابد و علت آن این است که محصول خریداری شده تا زمان شروع سیکل نگهداری می‌شود بنابراین هزینه نگهداری به قیمت خرید اولیه اضافه می‌شود و این امر باعث افزایش قیمت تمام شده محصول می شود و با افزایش قیمت محصول و هزینه نگهداری میزان سفارش کاهش می‌یابد بنابراین سود کل کاهش می یابد. در این حالت زمانی که هزینه نگهداری کم است، مدیریت تصمیم می‌گیرد که خرید اولیه خود را در ابتدای دوره انجام دهد و با افزایش هزینه نگهداری تمایل پیدا می‌کند که در دوره‌های آخر خرید خود را انجام دهد.

شکل (۴) تغییرات مقدار متوسط سود، مقدار بهینه سفارش و قیمت تمام شده را با توجه به تغییرات قیمت خرید اولیه را نشان می‌دهد همان‌طور که مشخص است با افزایش قیمت خرید اولیه، قیمت تمام شده محصول افزایش می‌یابد و این امر باعث کاهش سفارش و درنهایت کاهش میزان سود کل می شود. همان‌طور که از شکل (۴) مشخص است رابطه بین تغییرات قیمت خرید اولیه و مقدار سفارش یک رابطه خطی با ضریب همبستگی منفی است و براساس تحلیل رگرسیون خطی می‌توان نشان داد شیب خط معادله رگرسیون خطی برابر (۰/۶۵-) است پس با افزایش هر واحد قیمت خرید به اندازه ۰/۶۵ از مقدار سفارش کم می‌شود.

بنابراین در این حالت مدیریت هزینه بیشتری برای خرید هر واحد مواد اولیه پرداخت می‌کند ولی این افزایش قیمت خرید تأثیری در زمان خرید مواد اولیه ندارد پس مدیریت مواد اولیه موردنیاز خود را در همان زمان قبلی ولی با قیمت متفاوت خریداری می‌کند. ولی نکته مهمی که در این قسمت وجود دارد حجم خرید مواد اولیه با افزایش قیمت آن کاهش می‌یابد و بر این اساس مقدار سفارش کاهش می‌یابد و چون رابطه بین قیمت خرید و میزان سفارش تقریباً خطی است بنابراین با افزایش هر واحد هزینه خرید مدیریت می‌تواند به اندازه ۰/۶۵ از مقدار سفارش کم کند.

همان‌طور که در جدول (۲) و شکل (۵) مشخص است با افزایش انحراف معیار، قیمت تمام شده محصول روند غیر افزایشی خواهد داشت و بر این اساس میزان سفارش روند غیرکاهشی دارد و این امر باعث افزایش سود کل می‌شود. براساس جدول (۱) و شکل (۶) با افزایش میانگین، قیمت تمام شده محصول روند افزایش دارد و میزان سفارش روند کاهشی دارد و این امر باعث کاهش سود کل می شود. با توجه به اینکه مقدار انحراف معیار و متوسط نرخ رشد قیمت خرید یک فرآیند تصادفی است بنابراین نمی‌توان روند مشخصی برای مقدار سفارش براساس تغییرات آن‌ها بیان کرد

مطابق با جدول(۲) و شکل (۷) مشخص است با افزایش پتانسیل بازار، قیمت تمام شده محصول ثابت می‌ماند و میزان سفارش افزایش می‌یابد و این امر باعث افزایش سود کل می‌شود.

براساس تخمین رگرسیون خطی، می‌توان یک معادله خطی با ضریب تعیین ۹۸ در صد برآورد کرد که شیب آن تقریباً برابر ۰/۳۴۹ خواهد شد. بنابراین در صورت با تغییر یک واحد پتانسیل بازار، مدیریت می‌تواند مقدار سفارش خود را به اندازه ۰/۳۴۹ تغییر دهد و بر این اساس میزان سفارش خود را تعیین کند.

در شکل (۸) تغییرات مقدار متوسط سود، مقدار بهینه سفارش و قیمت تمام شده را براساس تغییرات پتانسیل بازار را نشان می‌دهد. در این حالت با افزایش مقدار حساسیت تقاضا نسبت به قیمت، میزان سفارش محصول روند کاهشی پیدا می‌کند و براساس تخمین

رگرسیون خطی، می‌توان یک معادله خطی با ضریب تعیین ۹۹,۵۷ درصد برآورد کرد که شیب این معادله تقریباً برابر با ۶۹/۳۶۷- خواهد شد بر این اساس مدیریت در صورت تغییر این پارامتر و با استفاده از شیب معادله رگرسیون خطی می‌تواند به‌راحتی میزان سفارش را تعیین کند بنابراین در صورت با تغییر یک واحد مقدار حساسیت تقاضا نسبت به قیمت ، مدیریت می‌تواند مقدار سفارش خود را به اندازه ۶۹/۳۶۷- تغییر دهد و بر این اساس میزان سفارش خود را تعیین کند.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله روزنامه‌فروش دو دوره‌ای موردبررسی قرار گرفت. نحوه سفارش‌دهی در هر بار برنامه‌ریزی فقط در ابتدای دوره امکان‌پذیر است. در ابتدای دوره برنامه‌ریزی، خریدار برای خرید میزان محصول موردنیاز برای طول دوره برنامه‌ریزی، یک فاصله زمانی مشخصی فرصت دارد، قیمت خرید محصول از یک فرآیند تصادفی مطابق با مدل بلک - شولز پیروی می‌کند. در این مقاله ابتدا مسئله موردنظر مدل‌سازی شد و سپس با استفاده از برنامه‌ریزی پویا احتمالی برگشتی، مقادیر بهینه تعیین شده است. هدف مسئله تعیین مقدار بهینه قیمت فروش پایان دوره، تعیین مقدار بهینه سفارش‌دهی و قیمت خرید محصولات است به‌گونه‌ای که درآمد با توجه به قیمت فروش پایان دوره و همچنین سود سیستم حداکثر گردد. در نهایت یک مثال عددی بیان شده و براساس آن به تحلیل حساسیت مدل پرداخته شد نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که افزایش هزینه نگهداری و افزایش قیمت خرید محصول، باعث کاهش میزان سفارش برای دوره برنامه‌ریزی شده دارد و همچنین باعث کاهش سود نهایی می‌شود.

مراجع

[1] Khouja, M. (1999). “The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research”, *omega*, 27(5): 537-553.

[2] Mitra, S. (2018). “Newsvendor problem with clearance pricing”, E*uropean Journal of Operational Research*, 268(1): 193-202.

[3] Hu, X., Su, P. (2018). “The newsvendor's joint procurement and pricing problem under price-sensitive stochastic demand and purchase price uncertainty”, *Omega*, 79: 81-90.

[4] Taleizadeh, A.A., Niaki, S.T.A., Hosseini, V. (2008). “The multi-product multi-constraint newsboy problem with incremental discount and batch order”, *Asian Journal of Applied Sciences*, 1: 110-122.

[5] Taleizadeh, A.A., Akhavan Niaki, S.T. (2010). “A hybrid meta-heuristic method to optimize bi-objective single period newsboy problem with fuzzy cost and incremental discount”, *Journal of Optimization in Industrial Engineering*, (3): 1-13.

[6] Zhang, B., Hua, Z. (2010). “A portfolio approach to multi-product newsboy problem with budget constraint”, *Computers & Industrial Engineering*, 58(4): 759-765.

[7] Bashiri, M., Badri, H., Talebi, J. (2012). “A new approach to tactical and strategic planning in production–distribution networks”, *Applied Mathematical Modelling*, 36(4): 1703-1717.

[8] Sajadi, S., Arianezhad, M.G., Sadeghi, H.A. (2009). *An Improved WAGNER-WHITIN Algorithm*.

[9] Sadeghi, H. (2020). “Building to forecast system by considering product reliability, POQ policy, and periodic demand”, *Journal of Quality Engineering and Production Optimization*, Articles in Press, Accepted Manuscript, Available Online.

[10] Pal, B., Sana, S.S., Chaudhuri, K. A. (2015). “distribution-free newsvendor problem with nonlinear holding cost”, In*ternational Journal of Systems Science*, 46(7): 1269-1277.

[11] Pasandideh, S.H.R., Niaki, S.T.A., Keshavarzi, A. (2017). “A two-echelon single-period inventory control problem with market strategies and customer satisfaction”, *Journal of Uncertain Systems*, 11(1): 18-34.

[12] Keramatpour, M., Niaki, S.T.A., Pasandideh, S.H.R. (2018). “A bi-objective two-level newsvendor problem with discount policies and budget constraint”, C*omputers & Industrial Engineering*, 120: 192-205.

[۱۳] ابراهیمی نسب، حمیدرضا، حیدری، جعفر، طالعی‌زاده، عطاالله. (۱۳۹۵). "هماهنگ‌سازی سیاست‌های سفارش دهی و تولید در مدل روزنامه‌فروش دوسطحی تحت قرارداد انعطاف مقداری"، *نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید*، ۴(۸): ۱۱۹-۱۳۱.

[14] Mitra, S., Chatterjee, A. K. (2018). “Single-period newsvendor problem under random end-of-season demand”, *Journal of the Operational Research Society*, 69(7): 1046-1060.

[15] Petruzzi, N. C., Dada, M. (1999). “Pricing and the newsvendor problem: A review with extensions”, *Operations research*, 147(2): 183-194.

[16] Petruzzi, N.C., Dada, M. (2001). “Information and inventory recourse for a two-market, price-setting retailer”, *Manufacturing & Service Operations Management*, 3(3): 242-263.

[17] Tang, O., Musa, S.N., Li, J. (2012). “Dynamic pricing in the newsvendor problem with yield risks”, *International Journal of Production Economics*, 139(1): 127-134.

[18] Hua, G., Wang, S., Cheng, T. (2012). “Optimal pricing and order quantity for the newsvendor problem with free shipping”, In*ternational Journal of Production Economics*, 135(1): 162-169.

[19] Monahan, G.E., Petruzzi, N.C., Zhao, W. (2004). “The dynamic pricing problem from a newsvendor's perspective”, *Manufacturing & Service Operations Management*, 6(1): 73-91.

[20] Soon, W. (2011). “A review of multi-product pricing models”, *Applied mathematics and computation*, 217(21): 8149-8165.

[21] Murray, C.C., Gosavi, A., Talukdar, D. (2012). “The multi-product price-setting newsvendor with resource capacity constraints”, *International Journal of Production Economics*, 138(1): 148-158.

[22] Shi, J., Zhang, G., Sha, J. (2011). “Jointly pricing

and ordering for a multi-product multi-constraint newsvendor problem with supplier quantity discounts", *Applied Mathematical Modelling*, 35(6): 3001-3011.

[23] Ma, S. et al. (2017). A*nalysis of the Newsboy Problem subject to price dependent demand and multiple discounts*.

[24] Arrow, K.J., Harris, T., Marschak, J. (1951). "Optimal inventory policy. Econometrica", *Journal of the Econometric Society*, 19(3): 250–272.

[25] Alfares, H.K., Elmorra, H.H. (2005). "The distribution-free newsboy problem: Extensions to the shortage penalty case", I*nternational Journal of Production Economics*, 93: 465-477.

[26] Kim, G., Wu, K., Huang, E. (2015). "Optimal inventory control in a multi-period newsvendor problem with non-stationary demand", A*dvanced Engineering Informatics*, 29(1): 139-145.

[27] Azad Gholami, R., Sandal, L.K., Uboe, J. (2016). "Channel Coordination in a Multi-period Newsvendor Model with Dynamic, Price-dependent Stochastic Demand", N*HH Dept. of Business and Management Science Discussion Paper*, (2016/6).

[28] Zhang, Y. et al. (2019). "A two-product, multi-period nonstationary newsvendor problem with budget constraint", *Soft Computing*, 23(12): 4277-4287.

[29] Ullah, M., Khan, I., Sarkar, B. (2019). "Dynamic Pricing in a Multi-Period Newsvendor Under Stochastic Price-Dependent Demand", *Mathematics*, 7(6): 1-15.

[۳۰] نخعی، عیسی، رسولی، نادیا، محمدی‌پور، هیرش. (۲۰۱۳). "قیمت‌گذاری و کنترل موجودی توأم برای کالاهای فصلی و جایگزین"، *نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید*، ۱(۲): ۸۵-۹۵.

[31] Mun, J. (2002). "Real options analysis: Tools and techniques for valuing strategic investments and decisions", *John Wiley & Sons*, Vol. 137.

[32] Black, F. and Scholes, M. (1973). "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of political economy*, 81(3): 637-654.

[33] Cox, J. C., Ross, S. A., Rubinstein, M. (1979). "Option pricing: A simplified approach", *Journal of financial Economics*, 7(3): 229-263.

Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

ISSN: 2345-2269

Spring and Summer 2020, Volume 8., No. 16., pp. 95-111

www.ier.basu.ac.ir

DOI: 10.22084/ier.2020.20328.1909

Determining the Optimal Ordering Policy in A Multi-Period Stochastic Model with the Uncertainty Purchase Price

Z. Rajabi[1], H. Sadeghi[2*], A. Mahmoodi[3]

[1, 2, 3] Department of Industrial of Engineering, Faculty of engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

A R T I C L E   I N F O

***Article history*:**

Received 26 October 2019
Accepted 22 July 2020

***Keywords*:**

Multi period news vendor
Pricing, Random process
Probabilistic dynamic programming

A B S T R A C T

This paper deals with a two-period inventory planning and control problem with stochastic demand. In this system, a distributor can order the products in a preseason period and sell them in two subsequent selling periods. Demand during the first period is a random variable with a known probability distribution, while the demand for the remaining products at the end of the first period depends on their selling price during the second period. Therefore, the selling price of end-of-period products is very important so that a low price will achieve more sales. It is also assumed that the purchase price of the products in the preseason period is a time-dependent and follows a random process. For the considered problem, a mathematical model is suggested and then using the probabilistic dynamic planning approach, the optimal selling price at the second period, the optimal ordering quantity, and the purchase price of the products are determined to maximize the system profit. Finally, a numerical example is presented to investigate the performance of the model, and the sensitivity analysis of the main parameters.

[*] Corresponding author. H. Sadeghi
Tel.: 087-33660073; E-mail address: h.sadeghi@uok.ac.ir