نشـــریه پژوهش‌های مهنـــدســـی صنـــــایع در سیستم‌های تولیـــــد

نشـــریه پـــژوهـــش‌های مهنـــدســـی صنـــــایع در سیستـم‌هـــای تولیـــد

IERPS

ISSN: 2345-2269

سال هفتم، شماره پانزدهم، پاییز و زمستان ۱۳۹۸، صفحـــــه ۳۰۵-۳۲۱

www.ier.basu.ac.ir

DOI: 10.22084/ier.2020.19867.1883

مدل موجودی و قیمت‌گذاری با توابع خطی تقاضا وابسته به قیمت، هزینه نگهداری وابسته به زمان و مقدار تخفیف (هزینه خرید)

علی صدری اصفهانی[1*]، مهدی نخعی‌نژاد[2]، سعید نبی‌زاده مرزبانی[3]

۱. استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه علم و هنر یزد، یزد، ایران

۲. استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

۳. کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکده فنی، دانشگاه علم و هنر یزد، یزد، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۸/۵/۲۴

پذیرش ۱۳۹۸/۱۰/۱۹

کلمات کلیدی:

مدل موجودی و قیمت‌گذاری

توابع خطی تقاضا-قیمت

هزینه نگهداری

هزینه خرید و تخفیف کلی

خلاصه

در مدل‌های موجودی مبتنی بر مدل اقتصادی سفارش، نرخ تقاضا و هزینه نگهداری مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شوند و هزینه خرید هم صرف‌نظر از اندازه سفارش ثابت فرض می‌شود. در دنیای واقعی، نرخ تقاضا می‌تواند تحت تأثیر متغیرهای زیادی مانند تغییرات فصلی و قیمت فروش و در دسترس بودن قرار گیرد. همچنین هزینه نگهداری نیز در مدت‌زمان ذخیره‌سازی در انبار افزایش‌یافته و هزینه خرید واحد هم در اندازه سفارش‌های بالاتر، با توجه به مقدار تخفیف کاهش می‌یابد. هدف این مقاله، توسعه مدل موجودی و قیمت‌گذاری یک محصول در یک زنجیره تأمین شامل چند تأمین‌کننده، چند تولیدکننده و چند مشتری که دارای توابع خطی تقاضا وابسته به قیمت فروش، هزینه نگهداری وابسته به زمان ذخیره‌سازی در انبار و هزینه خرید وابسته به اندازه سفارش می‌باشد به‌نحوی‌که سه مورد همزمان در مدل در نظرگرفته می‌شود. بر اساس این فرضیات، یک مدل ریاضی فرمول‌بندی شده و یک الگوریتم حل دستیابی به جواب بهینه با توجه به حداکثر رساندن سود کل، توسعه داده می‌شود، یک مطالعه موردی از مسئله در یک کارخانه تولیدی انجام گرفته و با استفاده از داده‌های مسئله، تجزیه‌وتحلیل حساسیت روی اثر پارامترهای مختلف بر جواب بهینه انجام شده است. یافته‌های ما نشان‌دهنده آن است که ابتدا، پارامترهای تابع تقاضا و سپس پارامترهای هزینه خرید و سفارش دهی؛ تأثیرگذارترین عوامل روی تابع سود خواهند بود. همچنین با بررسی دقیق و کاربردی نشان خواهیم داد که در کارخانجات تولیدی، سود بالاتر همیشه از قیمت فروش بالاتر به دست نخواهد آمد بلکه با در نظر گرفتن سیاست‌های تخفیف از سوی تأمین‌کنندگان مواد اولیه، ضمن کاهش هزینه خرید و سفارش‌دهی و اعمال مدیریت در کاهش هزینه نگهداری به‌طور همزمان نیز می‌توان با کاهش قیمت تمام شده محصول و بالا بردن تقاضای ثابت، سود بیشتر را نیز انتظار داشت.

۱- مقدمه

به عقیده اقتصاددانان، قیمت هر کالا مهم‌ترین علامتی است که خلاصه اطلاعات هر بازار را در بردارد یعنی قیمت ازیک‌طرف بیانگر هزینه‌های تمام شده کالا، عوامل تولید و تمایلات مبتنی بر بخش عرضه اقتصاد است و از طرف دیگر در آن تحلیل عملی رفتار مصرف‌کنندگان نهفته است؛ زیرا در تعیین قیمت، تمامی عوامل

* نویسنده مسئول: علی صدری اصفهانی

تلفن: ۰۳۵-۳۸۲۶۴۰۸۹؛ پست الکترونیکی: ali.sadri@gmail.com

مبتنی بر سلایق، تمایلات، محدودیت درآمدی و حتی ترجیحات لحاظ شده است. قیمت از یک نقش محوری در فعالیت‌های اقتصادی برخوردار می‌باشد زیرا یک کمیت عددی است که ارزش مبادله کالایی را در مقابل کالای دیگر مشخص می‌کند. در واقع قیمت‌ها، بیانگر ارزش نسبی کالا یا خدمات هستند و از این طریق امکان مبادله آن‌ها میسر می‌شود [۱].

امروزه شرکت‌ها و سازمان‌ها بنا به تناسب فعالیت و مأموریت خود جهت قیمت‌گذاری محصولات، ناچار به در نظر گرفتن هزینه مواد و موجودی‌ها می‌باشند. با توجه به اینکه نگهداری موجودی، امری اجتناب‌ناپذیر است؛ لذا مدیریت مواد و موجودی‌ها به‌عنوان یکی از ابزارهای مدیریت عملیات و برنامه‌ریزی تولید در زنجیره تأمین، تأثیر مستقیمی بر حوزه‌های مالی، تولیدی و بازاریابی شرکت‌ها دارد به‌طوری‌که مدیریت کارآمد مواد و موجودی‌ها موجب افزایش سودهی شرکت‌ها می‌گردد [۲]. حال این موجودی، هزینه‌هایی را به سیستم تحمیل می‌کند که اولین و مهم‌ترین آن‌ها، هزینه نگهداری موجودی است و در کل یکی از اجتناب‌ناپذیرترین الزامات سیستم‌های موجودی به شمار می‌آید؛ چراکه در دسترس نبودن موجودی در سیستم‌های تولیدی ممکن است هزینه‌هایی برای سیستم در پی داشته باشد که از نگهداری آن به‌مراتب بیشتر است. دومین هزینه، هزینه تدارک مواد است که شامل کلیه هزینه‌هایی است که از زمان سفارش دادن کالا تا رسیدن به درب منزل و تأیید و پذیرش در انبار به سیستم شارژ می‌شود و از دو بخش هزینه‌های خرید و سفارش‌دهی تشکیل می‌شود. سومین هزینه که در حین نگهداری موجودی ممکن است رخ دهد؛ هزینه‌های مواجهه با کمبود موجودی است.

پس می‌توان ادعا کرد که اصلی‌ترین دلیل نگهداری موجودی‌ها در کلیه سیستم‌های تولیدی و خدماتی، تأثیر مستقیم آن بر کاهش هزینه‌های کل سیستم است به‌طوری‌که لازمه تعیین سیاست‌های سیستم موجودی، مدل‌سازی دقیق و صحیح این هزینه‌ها است. مدل سفارش اقتصادی یا مدل ویلسون یکی از مدل‌های اولیه در بحث برنامه‌ریزی و کنترل موجودی‌ها می‌باشد که در آن نرخ تقاضا و هزینه نگهداری مقداری ثابت است و هزینه خرید واحد و سفارش‌دهی نیز هم صرف‌نظر از اندازه سفارش؛ مقداری ثابت می‌باشد.

درحالی‌که در دنیای واقعی، میزان تقاضا با توجه قیمت متغیر می‌باشد و تولیدکنندگان در قیمت فروش پایین‌تر، با افزایش تقاضا مواجه شده و تمایل به افزایش فروش بیشتر و به‌تبع آن سود بالاتری دارند [۳].

همچنین هزینه نگهداری با توجه به میزان زمان ذخیره‌سازی در انبار متفاوت می‌باشد و هزینه خرید نیز در دنیای واقعی تحت شرایط مختلف محیطی متغیر می‌باشد و نسبت به مقدار سفارش شامل تخفیف می‌شود. هدف این تحقیق، توسعه یک مدل موجودی و قیمت‌گذاری که در آن هزینه نگهداری نسبت به زمان ذخیره‌سازی در انبار و تقاضا نسبت به قیمت فروش و هزینه خرید نسبت به اندازه سفارش همگی دارای تابع خطی باشند به‌نحوی‌که هزینه خرید با توجه به مقدار تخفیف کاهش می‌یابد. در ادامه ادبیات مرتبط بررسی می‌شود. در این بخش پژوهش‌های اخیر در زمینه EOQ در ۵ گروه طبق جدول شماره ۱ دسته‌بندی می‌شود:

گروه اول: مدل‌های موجودی با تقاضای متغیر:
در این مدل‌ها تقاضا را به‌صورت تابعی از قیمت با وابستگی خطی در نظر گرفته می‌شود.

گروه دوم: مدل‌های موجودی با هزینه نگهداری متغیر:
در این مدل‌ها هزینه نگهداری موجودی‌ها در انبار به‌صورت تابعی خطی از زمان ذخیره‌سازی در انبار در نظر گرفته شده است.

گروه سوم: مدل‌های موجودی با تقاضای و هزینه نگهداری متغیر:
در این مدل‌ها که به‌نوعی تجمیع گروه‌های اول و دوم می‌باشد تقاضای متغیر و هزینه نگهداری متغیر به‌طور همزمان در نظرگرفته شده است.

گروه چهارم: مدل‌های با مقدار تخفیف: در این مدل‌ها هزینه خرید با توجه به مقدار خرید متغیر می‌باشد.

گروه پنجم: مدل‌های با هزینه سفارش‌دهی متغیر: در این مدل‌ها هزینه سفارش‌دهی با توجه به مقدار اندازه سفارش متغیر می‌باشد.

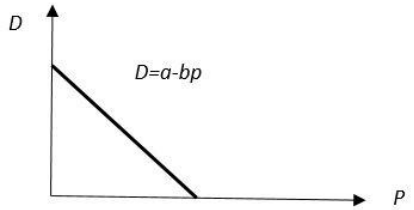
در گروه‌های اول تا پنجم هر سه پارامتر تقاضا، هزینه نگهداری و هزینه خرید به‌صورت مجزا در نظر گرفته شده است. درحالی‌که در این پژوهش هر سه پارامتر تقاضا، هزینه نگهداری و هزینه خرید به‌صورت همزمان با توابع خطی در نظر گرفته شده است که آخرین پژوهش صورت گرفته در این موضوع می‌باشد. حال در ادامه هر یک از مقالات مطرح شده در گروه‌های فوق به‌تفصیل بیان می‌شود.

۱-۱- مدل‌های موجودی با تقاضای متغیر

در این مدل‌ها با توجه به شکل ۱، تقاضا به‌صورت یک تابع وابسته به قیمت، سطح موجودی و یا هر دو در نظر گرفته می‌شود. سانا و چادوری[1] [۴] در سال ۲۰۰۴ یک مدل EOQ که در آن سطح تقاضا وابسته به هر دو آیتم میزان موجودی و هزینه‌های تبلیغاتی بود را با تابع هدف تأمین بودجه و محدودیت ظرفیت انبار به وجود آوردند. به عبارتی تقاضا در این مدل تابعی از قیمت و تبلیغات است. توسعه حجم تجارت و پیچیدگی روزافزون خرده‌فروشی، تغییر رویکرد در تبلیغات را می‌طلبد. همکاری در تبلیغات یک توافق است که در آن تولیدکننده با پرداخت یک بخش یا کل هزینه‌های تبلیغات انجام شده توسط یک خرده‌فروش موافقت می‌کند. مین و ژو[2] [۵] در سال ۲۰۰۹ یک مدل موجودی با تقاضای وابسته به سطح موجودی و تأمین تقاضای پس افت را پیشنهاد دادند. در سال ۲۰۱۰ یانگ و همکاران[3] [۶] یک مدل موجودی با تقاضا وابسته به موجودی با در نظر گرفتن اثر تورم و تأمین

1. Sana and Chaudhuri
2. Min and Zhou
3. Yang

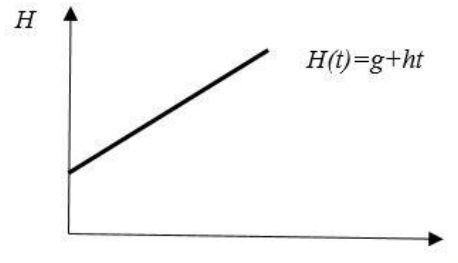
تقاضای پس افت را توسعه دادند. لی و دای[1] [۷] در سال۲۰۱۲ مدل موجودی با تقاضا وابسته به موجودی، تأمین تقاضای پس افت و نرخ زوال قابل‌کنترل را توسعه نمودند. در بسیاری از مدل‌های موجودی فرض می‌شود که تقاضای بالاتر باقیمت‌های پایین‌تر انجام پذیرد. موندال و همکاران[2] [۸] در سال۲۰۰۳ یک مدل موجودی برای کالا در نظر گرفتند که نرخ تقاضا دارای یک تابع خطی نسبت به قیمت فروش باشد، به عبارتی نرخ تقاضا دارای یک تابع خطی کاهشی نسبت به مدت‌زمان ذخیره‌سازی در انبار باشد. موخوپایای و همکاران[3] [۹] در سال ۲۰۰۵ نیز همین مدل را با محدودیت ظرفیت انبار توسعه دادند. تنگ و همکاران[4] [۱۰] نیز در این سال برای تعیین قیمت و اندازه سفارش برای یک خرده‌فروش که تأمین‌کننده اجازه پرداخت با تأخیر را لحاظ نموده بود بررسی کردند. ترانسچر و ماینر[5] [۱۱] در سال ۲۰۰۸ الگوریتم تعیین راه‌حل بهینه را برای یک مدل EOQ با در نظر گرفتن تخفیفات مقداری و تابع تقاضای خطی وابسته به قیمت توسعه دادند. استراتژی‌های مختلفی با و بدون در نظر گرفتن تمرکز (به قیمت فروش و اندازه سفارش به‌طور همزمان) و قیمت‌گذاری پویا در نظر گرفته شده است. ژانگ پینگ[6] [۱۲] در سال۲۰۱۰ روی یک مدل موجودی با تقاضای وابسته به قیمت با یک خرده‌فروش و یک تأمین‌کننده در یک زنجیره تأمین مطالعه نمود. چندین مدل با فرض تقاضای وابسته به هر دو آیتم سطح موجودی و قیمت فروش موردبررسی قرار گرفت. یو[7] [۱۳] در سال ۲۰۰۴ یک مدل موجودی برای تعیین مقدار سفارش بهینه و قیمت فروش، با فرض زمان و قیمت وابسته به نرخ تقاضا توسعه دادند. هو و لین[8] [۱۴] در سال ۲۰۰۶ یک مدل موجودی برای تقاضای وابسته به هر دو آیتم قیمت فروش و سطح موجودی مشخص نمودند. یو و سیه[9] [۱۵] در سال ۲۰۰۷ یک سیستم موجودی که در آن نرخ تقاضا تابعی از هر دو آیتم قیمت فروش و در دسترس بودن است را مورد مطالعه قرار دادند. پاندا و همکاران[10] [۱۶] در سال ۲۰۱۰ یک مدل EOQ را برای مورد یک تأمین‌کننده و چند خرده‌فروش در حالتی که نرخ تقاضا دارای تابع خطی نسبت به سطح موجودی و قیمت فروش باشد را مورد تجزیه‌وتحلیل قرار دادند. در سال ۱۳۹۶ سعیدی مهرآباد و اعظمی [۱۷] یک مدل موجودی چند محصولی و چند دوره‌ای دو سطحی (رهبر و پیرو) برای یک زنجیره تأمین شامل چند تأمین‌کننده، چند تولیدکننده و چند مشتری که تقاضا دارای تابع خطی وابسته به قیمت باشد را بررسی نمودند و نتیجه گرفتند که اگر رقابت نیز وارد این چرخه شود با وجود رقابت، شرکت رهبر قیمت کمتری را ارائه می‌دهد؛ لذا میزان فروش بیشتری خواهد داشت؛ بنابراین در بازار رقابتی امروز با جهانی‌شدن اقتصاد، تحولات سریع تکنولوژی و رفتار مشتریان طالب محصولات مناسب‌تر و ارزان‌تر، ماهیت رقابت بازار در حال تغییرات اساسی است به‌گونه‌ای که شرکت‌های بزرگ تولیدی سعی دارند با اعمال راهکارهای جدید، سهم بیشتری از بازار را کسب کنند؛ بنابراین رقابت در مدل‌های برنامه‌ریزی تولید همراه با قیمت‌گذاری و مدل‌سازی بسیار با اهمیت می‌باشد. به عبارتی رقابت روی قیمت و مقدار فروش برای کسب سهم بیشتری از بازار می‌باشد و مدل‌سازی رقابت موجود و حل مسئله قیمت‌گذاری به‌منظور پاسخگویی به تقاضای متغیر بسیار با اهمیت می‌باشد.



شکل (۱): مدل موجودی در حالتی که تابع تقاضا خطی باشد

۱-۲- مدل‌های موجودی با هزینه نگهداری متغیر:

در این مدل‌ها با توجه به شکل ۲، هزینه نگهداری موجودی‌ها در انبار به‌صورت تابعی خطی نسبت به زمان ذخیره‌سازی در انبار در نظر گرفته شده است. فرگوسن و همکاران[11] [۱۸] در سال ۲۰۰۷ یک مدل موجودی را که در آن هزینه نگهداری دارای وابستگی غیرخطی نسبت به زمان ذخیره‌سازی بود را توسعه دادند. قاسمی و افشار نجفی [۱۹] در سال ۲۰۱۳ دو مدل EOQ با هزینه‌های نگهداری متغیر را در حالت با و بدون تأمین تقاضای پس افت توسعه و مورد تحلیل قرار دادند. سان خوزه و همکاران[12] [۲۰] در سال ۲۰۱۵ نیز یک مدل EOQ با تأمین تقاضای پس افت جزئی در حالتی که تابع هزینه نگهداری دارای دو جزء هزینه‌های ثابت و هزینه‌های متغیر که با زمان نگهداری افزایش می‌یابد را مورد تجزیه‌وتحلیل قرار دادند.



شکل (۲): مدل موجودی با تابع هزینه نگهداری خطی

۱-۳- مدل‌های موجودی با تقاضای متغیر و هزینه نگهداری متغیر

در این مدل‌ها که به‌نوعی تجمیع ردیف ۱ و ۲ می‌باشد، تقاضای متغیر و هزینه نگهداری متغیر به‌طور همزمان در نظر گرفته شده است.

1. Lee and Dye
2. Mondal
3. Mokhupadhyay
4. Teng
5. Transchel and Minner
6. Zhengping
7. You
8. Hou and Lin
9. You and Hsieh
10. Panda
11. Ferguson
12. San-jose

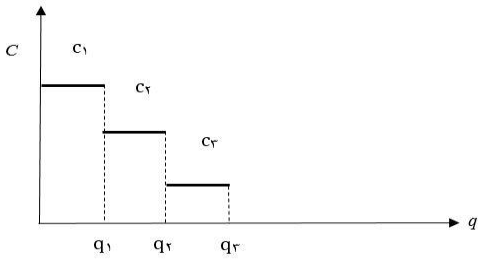
آلفارس[1] [۲۱] در سال ۲۰۰۷ یک مدل EOQ را با نرخ تقاضای وابسته به سطح موجودی که هزینه نگهداری نسبت به زمان افزایش پیدا می‌کند توسعه داد. همچنین آلفارس [۲۲] در سال ۲۰۱۴ نیز یک مدل EPQ را با نرخ تولید محدود و دارای مقدار موجودی اولیه با هدف ماکزیمم کردن سود تجزیه‌وتحلیل نمود. ژائو و ژونگ[2] [۲۳] در سال ۲۰۰۸، مدل آلفارس را با فرض اینکه هزینه نگهداری دارای تابع کاهشی نسبت به زمان ذخیره‌سازی باشد مطالعه نمودند. پاندو[3] همکاران [۲۴] در سال۲۰۱۲ مدل EOQ را در حالت نرخ تقاضا و هزینه نگهداری وابسته به سطح موجودی مورد تجزیه‌وتحلیل قرار دادند. سپس آن‌ها [۲۵] در سال ۲۰۱۳ ماکزیمم سود کل را برای آن در حالتی که هزینه نگهداری دارای تابع خطی نسبت به زمان ذخیره‌سازی باشد محاسبه نمودند. مدل‌های موجودی متعددی نیز تقاضا را زمانی که به فاکتورهای دیگری از قبیل قیمت فروش و کیفیت کالا بستگی داشته باشد را در نظر گرفتند. داتا[4] [۲۶] در سال۲۰۱۳ یک مدل موجودی با فرض اینکه تقاضا وابسته به هر دو فاکتور کیفیت و قیمت فروش محصولات باشد مورد تجزیه‌وتحلیل قرار داد. کومار[5] و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۱۳ یک مدل EOQ با فرض تقاضا وابسته به قیمت و تابع هزینه نگهداری وابسته به زمان را مطالعه نمودند. داتا و پل[6] [۲۸] در سال ۲۰۰۱ به‌طور مشابه یک مدل EOQ با فرض نرخ تقاضا وابسته به هر دو آیتم موجودی انبار و قیمت فروش و همزمان هزینه نگهداری متغیر با زمان ذخیره‌سازی را مورد تجزیه‌وتحلیل قرار دادند.

۱-۴- مدل‌های موجودی با مقدار تخفیف

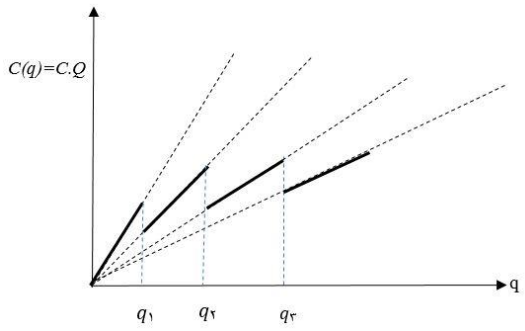
در مدل‌های تخفیف دار با توجه به شکل‌های ۳ و۴، هزینه خرید با توجه به مقدار خرید متغیر می‌باشد. مدل‌های موجودی که در آن هزینه خرید بستگی به اندازه سفارش دارد اساس کار همه تخفیف‌های کلی و مقدار تخفیف افزایشی می‌باشد. در تخفیف‌های کلی یک کاهش قیمت شامل تمام زیرمجموعه‌ها می‌شود درحالی‌که در تخفیف‌های افزایشی، در بازه‌های بالاتر کاهش قیمت بیشتری وجود دارد. ونگ[7] [۲۹] در سال ۱۹۹۵ یک مدل موجودی با هدف تعیین سیاست مقدار تخفیف بهینه توسعه داد با این فرض که نرخ تقاضا وابسته به قیمت فروش باشد. مدل مورداستفاده با هدف ماکزیمم کردن سود، هر دو آیتم تخفیف‌های کلی و افزایشی را در نظر گرفت؛ در حالتی که کمبود مجاز نیست و هزینه نگهداری ثابت است. بورول[8] و همکاران [۳۰] در سال ۱۹۹۷ یک مدل موجودی به‌منظور تعیین بهینه اندازه سفارش و قیمت فروش را توسعه دادند، با فرض اینکه تقاضا وابسته به قیمت باشد و هزینه نگهداری یک تابعی از هزینه کل، هزینه حمل و مقدار تخفیف کلی باشد. چانگ[9] [۳۱] در سال ۲۰۱۳ مدل بورول و همکاران (۱۹۹۷) را توسعه نمود و الگوریتم آن‌ها را به‌منظور حداکثر کردن سود و تعیین مقادیر دقیق بهینه سفارش و قیمت فروش مورد مطالعه قرار داد. وی[10] [۳۲] در سال ۱۹۹۹ مدل موجودی با هدف تعیین بهینه اندازه سفارش و قیمت فروش را برای آیتم‌های فاسدشدنی بررسی نمود که در آن نرخ تقاضا دارای یک تابع کاهشی نسبت به قیمت فروش باشد. هدف در این مدل ماکزیمم کردن سود در یک محیط رقابتی در شرایط کمبود با تأمین تقاضای پس افت است. گو و شرفعلی[11] [۳۳] در سال۲۰۰۲ یک سیستم EOQ را مورد مطالعه قرار دادند که یک تأمین‌کننده تخفیف‌هایی را به یک خرده‌فروش پیشنهاد می‌دهد با این فرض که تقاضا وابسته به قیمت باشد. سان خوزه و گارسیا لاگونا[12] [۳۴] در سال۲۰۰۳ مدلی با تخفیف‌های کلی و تأمین تقاضای پس افت مطالعه کردند که هزینه نگهداری تابعی از سطح موجودی باشد. سپس آن‌ها [۳۵] در سال ۲۰۰۹ این مدل را در حالت عدم تأمین تقاضای پس افت به‌صورت کلی توسعه دادند. پاپاکریستوس و اسکوری[13][۳۶] در سال۲۰۰۳، مدل وی در سال۱۹۹۹ را در حالتی که نرخ تقاضا یک تابع محدب نسبت به قیمت فروش باشد و نرخ تقاضای پس افت هم یک تابعی وابسته به زمان باشد توسعه دادند. یانگ [۳۷] در سال۲۰۰۴ یک سیاست قیمت‌گذاری و سفارش بهینه را برای زمانی که تقاضا دارای وابستگی خطی به قیمت فروش باشد و تأمین‌کننده هم یک تخفیف مقداری پیشنهاد دهد، توسعه داد. هدف در این مدل مینیمم کردن هزینه کل موجودی است با این فرض که کمبود مجاز نباشد و هزینه نگهداری هم مقداری ثابت باشد. ترانکل و ماینر[14] [۳۸] در سال ۲۰۰۸ یک مدل موجودی با نرخ تقاضای وابسته به قیمت و تخفیف کلی ارائه کردند. اویانگ[15] و همکاران [۳۹] در سال ۲۰۰۸ یک سیستم موجودی برای آیتم‌های فاسدشدنی دارای وضعیت غیرآنی در شرایطی که تقاضا به سطح موجودی وابسته باشد و تأمین‌کننده تخفیفات کلی نسبت به تمام واحدها پیشنهاد دهد بهینه‌سازی کردند در حالتیکه کمبود مجاز، تقاضای پس افت هم یک متغیر تصادفی و هزینه نگهداری هم یک تابعی نسبت به هزینه خرید باشند. شای[16] و همکاران [۴۰] در سال۲۰۱۲ روی یک مدل موجودی EOQ مطالعه کردند که تأمین‌کننده یک تخفیف کلی برای یک خرده‌فروش پیشنهاد دهد. یک مدل قیمت‌گذاری و سفارش‌دهی فرموله شد با این فرض که تقاضا دارای وابستگی خطی نسبت به قیمت فروش و هزینه نگهداری مقداری ثابت باشند و کمبود هم مجاز

1. Alfares
2. Zhao and Zhong
3. Pando
4. Datta
5. Kumar
6. Datta and Paul
7. Weng
8. Burwell
9. Chang
10. Wee
11. Goh and Sharafali
12. San-Jose and Garcia-Laguna
13. Papachristos and Skouri
14. Tanschel and Minner
15. Ouyang
16. Shi

نباشد. شه[1] [۴۱] در سال۲۰۱۲ یک مدل موجودی با تقاضای وابسته به قیمت و تخفیف موقتی تبلیغاتی فرموله کرد. همچنین اثر این تخفیف‌های پیشنهادی تأمین‌کننده را روی سیاست سفارش‌دهی خرده‌فروش تجزیه‌وتحلیل نمود. تراپاتی و تومار[2] [۴۲] در سال ۲۰۱۵ یک مدل موجودی با تخفیف‌های کلی برای محصولات فاسدشدنی توسعه دادند که تقاضا و هزینه نگهداری هر دو دارای تابع خطی نسبت به زمان نگهداری هستند. آلفارس [۴۳] در سال ۲۰۱۵ یک مدل موجودی که در آن تقاضا وابسته به سطح موجودی باشد و هزینه نگهداری هم نسبت به زمان تغییر نماید را همراه با در نظر گرفتن تخفیفات کلی توسعه دادند. در تحقیقات اخیر در موجودی، برنامه‌ریزی فازی با محدودیت‌های نرم بیشتر مطرح است. براین اساس، سیف برقی و همکاران [۴۴] یک مدل موجودی تک دوره‌ای چند محصولی که اقلام تقاضا به‌صورت خطی پیوسته و احتمالی باشد را مدل‌سازی نمودند که محدودیت‌های هزینه و کمبود به‌صورت فازی نشان داده شده است. جبل عاملی و همکاران [۴۵] یک مدل برنامه‌ریزی خطی مختلط به‌منظور طراحی زنجیره تأمین سبز ارائه می‌دهند که تأمین مواد اولیه بر اساس طرح تخفیف پیشنهادی تأمین‌کننده صورت می‌گیرد و مدل‌سازی ریاضی به‌گونه‌ای انجام می‌شود که تأمین‌کنندگان با تخفیف مناسب‌تر انتخاب شوند. از طرف دیگر با افزایش تخفیف در طرح پیشنهادی یک تأمین‌کننده، میزان ریسک تأمین مواد اولیه نیز افزایش می‌یابد. خاکزار بفروئی و همکاران [۴۶] یک مدل قیمت‌گذاری برای کالای فاسدشدنی دارای تابع تقاضای وابسته به قیمت و زمان ارائه می‌دهند که در شرایط بازارهای رقابتی برای تشویق مشتری به خرید، سیاست‌های مختلفی ازجمله تخفیف یا کاهش قیمت فروش پیشنهاد می‌شود.



شکل (۳): مدل موجودی با هزینه خرید واحد به‌صورت خطی پله‌ای



شکل (۴): مدل موجودی با تابع هزینه خرید خطی

1. Shah

۱-۵- مدل‌های موجودی با هزینه سفارش‌دهی متغیر و وابسته به اندازه سفارش

متغیر بودن هزینه سفارش‌دهی محصول و وابستگی آن به اندازه سفارش یکی از فرضیات کاربردی و کمتر موردبررسی قرار گرفته در ادبیات مربوط به مدل اقتصادی سفارش می‌باشد. ژانگ و همکاران [۴۷] یک مدل زنجیره تأمین با یک تولیدکننده و یک خرده‌فروش را برای اقلام فاسدشدنی با نرخ زمان و تقاضای وابسته به قیمت همراه با هزینه سفارش وابسته به اندازه سفارش را در نظر گرفتند. آن‌ها الگوریتمی برای به دست آوردن قیمت و استراتژی‌های سرمایه‌گذاری فن‌آوری حفاظت طراحی کرده‌اند. شریفی و همکاران [۴۸] در سال ۱۳۹۸ مدل کنترل موجودی مقدار سفارش اقتصادی محصولات فسادپذیر (دارای نرخ زوال)، در حالت متغیر بودن هزینه سفارش‌دهی (وابستگی به اندازه سفارش)، وابستگی هزینه نگهداری محصول به سطح موجودی و غیرقطعی بودن تقاضای محصول (وابسته به قیمت و زمان) را مورد مطالعه قرار دادند و نتیجه گرفتند که خط‌مشی پر کردن مدل موجودی پیشنهادی می‌تواند در تصمیم‌گیری‌های لازم برای مدیریت و کنترل موجودی محصولات فسادپذیر مفید واقع شود.

پژوهش‌هایی که تاکنون در این زمینه انجام شده است نوع وابستگی هر از پارامترهای تقاضا، هزینه نگهداری و هزینه خرید را به‌صورت خطی و مجزا برای محاسبه مقدار بهینه تولید و قیمت فروش در نظرگرفته اند. درحالی‌که در این مقاله هر سه پارامتر تقاضا، هزینه نگهداری و هزینه خرید به‌صورت همزمان با توابع خطی در نظر گرفته شده است که آخرین پژوهش صورت گرفته در این موضوع می‌باشد. جدول (۱) خلاصه مطالب گفته شده را به‌طور کامل همراه با شکاف تحقیقاتی موردنظر مقاله نشان می‌دهد.

مدل سفارش اقتصادی یا مدل ویلسون یکی از مدل‌های اولیه در بحث برنامه‌ریزی و کنترل موجودی‌ها می‌باشد که مفروضات اولیه‌ای که این مدل براساس آن بنا شده است عبارتند از:

- فقط یک کالا در آن کنترل می‌شود و مقدار تقاضای آن ثابت و پیوسته است.
- کمبود کالا مجاز نمی‌باشد. (تقاضای تمام مشتری‌ها بدون تأخیر برآورده شود)
- دریافت به‌صورت یکجا و در زمان صفر شدن خالص موجودی اتفاق می‌افتد.
- هزینه نگهداری دارای مقدار ثابتی نسبت به زمان ذخیره‌سازی در انبار است.
- تخفیف در قیمت و سایر پارامترهای هزینه وجود ندارد. به عبارتی هزینه خرید ثابت باشد.
- مدت‌زمان تحویل قطعی و ثابت است.

در این مقاله قیمت‌گذاری کالا بخصوص کالای فاسدشدنی در شرایط تخفیف مدنظر قرار می‌گیرد و با توجه به اهمیت فروش محصولات به‌خصوص فاسدشدنی در دوره عمر آن‌ها از نظر مشتری،

2. Tripathi and Tomar

پیگیری سیاستی ضروری است تا ضمن تشویق مشتریان به خرید بیشتر؛ تولیدکننده نیز سود بالاتری را حاصل نماید. همچنین سیاست تخفیف همراه با هماهنگ سازی تابع نرخ تقاضا در دوره تخفیف مطرح می‌شود؛ یعنی در بازه‌ای که تخفیف وجود ندارد نرخ تقاضا ثابت است و در دوره تخفیف نرخ تقاضا، تابعی کاهشی از قیمت می‌شود. در ادبیات بررسی شده، تخفیف قیمتی برای مشتری نهایی و تابع تقاضای متغیر همراه به هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی به‌طور همزمان بررسی نشده است درحالی‌که در دنیای واقعی با اعلام تخفیف، تابع نرخ تقاضا تغییر می‌کند و کلیه هزینه‌های نگهداری و سفارش‌دهی را تحت تأثیر قرار می‌دهد که در هیچ‌کدام از پژوهش‌های قبلی به آن اشاره نشده است. لازم به ذکر است ازآنجاکه ایده مسئله موردبحث در این مقاله، از یک کارخانه تولید ... در اصفهان اقتباس‌شده که مدیریت این شرکت تولیدکننده قصد دارد در یک بازار رقابتی، جهت یکی از محصولات خود (به‌عنوان نمونه) که مواد اولیه آن را تأمین‌کننده‌های مختلفی فراهم می‌نمایند با توجه به‌تمامی هزینه‌ها، یک بازه قیمت به دست آورده تا بتواند محصول خود را با کمترین قیمت و بالاترین سود به مشتری نهایی برساند. مدل و الگوریتم نیز در این کارخانه تست و استفاده گردید؛ اما مدیریت کارخانه، اجازه نداده‌اند که اسم شرکت نوشته شود. لکن در حالت کلی تمامی کارخانجات، بخصوص کارخانه‌های تولیدی با محصول فسادپذیر؛ به‌صورت ضمنی سعی مدیریت بر آن است که با اعمال سیاست‌های تخفیف در خرید مواد اولیه، ضمن پایین آوردن قیمت تمام شده محصول؛ با بالا بردن تولید ضمن جذب بیشتر مشتری (تقاضا) سود خود را ماکزیمم نماید. لازم به ذکر است در این مدل تأمین‌کننده و تولیدکننده می‌توانند تحت یک مدیریت واحد باشند یا تولیدکننده اقلام موردنیاز خود را با حفظ کیفیت، با کمترین قیمت از یکی از تأمین‌کنندگان تهیه نماید؛ اما در نهایت کمترین هزینه خرید برای تولیدکننده مهم می‌باشد.

پس به‌طور خلاصه می‌توان گفت که در مدل سفارش اقتصادی، نرخ تقاضا و هزینه نگهداری مقداری ثابت است و هزینه خرید واحد هم صرف‌نظر از اندازه سفارش؛ مقداری ثابت می‌باشد. درحالی‌که در دنیای واقعی، میزان تقاضا با توجه قیمت متغیر می‌باشد و تولیدکنندگان در قیمت فروش پایین‌تر، با افزایش تقاضا مواجه شده و تمایل به افزایش فروش بیشتر و به‌تبع آن سود بالاتری دارند [۴۹]. همچنین هزینه نگهداری با توجه به میزان زمان ذخیره‌سازی در انبار متفاوت می‌باشد و هزینه خرید نیز در دنیای واقعی تحت شرایط مختلف محیطی متغیر می‌باشد و نسبت به مقدار سفارش شامل تخفیف می‌شود؛ بنابراین بنا به‌ضرورت نیاز است پارامترهای ذکر شده در بالا را به چالش کشید و ضمن به‌دست آوردن توابع وابستگی‌شان، میزان تأثیر آن‌ها در سود شرکت را هم موردبررسی قرار داد.

۲- شرح مسئله و مدل‌سازی

هدف این مقاله، به‌دست آوردن حداکثر مقدار تابع سود کل مدل موجودی و قیمت‌گذاری یک محصول در یک زنجیره تأمین شامل چند تأمین‌کننده، چند تولیدکننده و چند مشتری که دارای توابع خطی تقاضا وابسته به قیمت فروش، هزینه نگهداری وابسته به زمان ذخیره‌سازی در انبار و هزینه خرید وابسته به اندازه سفارش می‌باشند به‌نحوی‌که این سه مورد همزمان در مدل در نظر گرفته می‌شود، در حالتی که مفروضات زیر برقرار باشد:

۱) فقط یک کالا در آن کنترل می‌شود و نرخ تقاضای آن دارای تابع خطی کاهشی نسبت به قیمت فروش باشد. به‌دلیل پیچیدگی محاسبات، یک تولیدکننده در نظر گرفته می‌شود که در یک محیط رقابتی، قابل‌تعمیم برای چند تولیدکننده می‌باشد.

۲) کمبود کالا مجاز نمی‌باشد. (تقاضای تمام مشتری‌ها بدون تأخیر برآورده شود.)

۳) دریافت به‌صورت یکجا و در زمان صفر شدن خالص موجودی اتفاق می‌افتد.

۴) هزینه نگهداری دارای یک تابع خطی افزایشی نسبت به زمان ذخیره‌سازی در انبار است.

۵) هزینه خرید دارای یک تابع پله‌ای خطی کاهشی نسبت به مقدار سفارش است.

۶) مدت‌زمان تحویل قطعی و ثابت است

۷) هزینه سفارش‌دهی در هر بار سفارش ثابت باشد.

۲-۱- نمادها

متغیرها و نمادهای مورداستفاده به شرح زیر می‌باشد:

مقدار موجودی در واحد زمان	q(t):
هزینه سفارش‌دهی در هر بار سفارش	k:
اندازه سفارش	Q:
ماکزیمم مقدار سفارش برای هزینه خرید در بازه j j=1, ……,J	q_j:
تابع هزینه خرید روی اندازه سفارش	C(Q):
هزینه واحد خرید زمانی که سفارش در بازه j باشد j=1, ……,J	c_j:
نرخ هزینه نگهداری در واحد زمان	H(t):
هزینه ثابت نگهداری در تابع هزینه	g:
هزینه متغیر نگهداری در واحد زمان	h:
دوره سفارش	T:
قیمت واحد فروش	p:
تابع تقاضا وابسته به قیمت فروش	D(p):
نرخ ثابت تقاضا, $a>0$	a:
نرخ متغیر تقاضا وابسته به قیمت	b:
تابع هزینه کل در واحد زمان	TC_j (Q,p):
تابع سود کل در واحد زمان	TP_j (Q,p):

۲-۲- مفروضات و محدودیت‌ها

۱- هزینه نگهداری دارای یک تابع خطی درجه اول نسبت به زمان ذخیره‌سازی با یک قسمت ثابت g و یک قسمت متغیر h می‌باشد که این رابطه یک رابطه خطی افزایشی نسبت به زمان ذخیره‌سازی است.

۲- هزینه واحد نگهـــداری وابسته به هزینه واحـد خرید می‌باشد که تابع آن به‌صورت رابطه (۱) به‌دست می‌آید:

$$H(t)=(g+ht)\ c_j \qquad (۱)$$

۳- هزینه خرید شـامل تخفیف‌های کلـی است، به عبارتی هـزینه خـرید دارای تابع پله‌ای کاهشی نسبت به مقدار سفارش مطابق رابطه (۲) می‌باشد.

$$C(Q) = c_j \quad q_{j-1} < Q < q_j;\ \ c_1 > c_2 > \cdots > c_j \qquad (۲)$$

۴- نرخ تقاضا دارای تابع خطی کاهشی نسبت به قیمت فروش به‌صورت رابطه (۳) می‌باشد:

$$D(p)=a- bp \qquad (۳)$$

۵- با توجه به اینکه به‌طور منطقی قیمت فروش از قیمت خرید بزرگ‌تر و تقاضا همیشه مثبت است، یک بازه برای قیمت فروش به‌صورت رابطه (۴) به دست می‌آید:

$$c_j<p<\frac{a}{b} \qquad (۴)$$

۶- کمبود مجاز نمی‌باشد.

۷- فقط یک کالا کنترل می‌گردد.

۲-۳- مدل ریاضی

نرخ کاهش در سطح موجودی q(t) با نرخ تقاضا برابر است؛ بنابراین ارتباط به‌صورت رابطه (۵) بیان می‌شود:

$$q'(t) = -(a - bp) \qquad (۵)$$

حال با توجه به اینکه مقـــدار موجـــودی در لحظه t=0 برابر Q و در پایان دوره سفارشT، این مقدار به صفر می‌رسد لذا مقادیر $q(0)=Q \quad q(T)= 0$ می‌باشد.

پس رابطه (۵) را می‌توان به‌صورت رابطه (۶) بازنویسی کرد:

$$q(t)=(a-bp)(T-t) \qquad (۶)$$

لذا داریم:

$$Q= (a -bp)T \qquad (۷)$$

و از رابطه (۷)، رابطه (۸) به‌دست می‌آید:

$$T=\frac{Q}{a-bp} \qquad (۸)$$

با توجه به اینکه تابع هدف در این مدل ماکزیمم کردن سود در واحد زمان است و اینکه تابع هزینه کل سالیانه از سه بخش هزینه سفارش‌دهی در دوره زمانی T $(\frac{k}{T})$، هزینه نگهداری (H(t). I) و هزینه خرید ((C.D (t) تشکیل‌شده است؛ لذا تابع هزینه به شرح رابطه (۹) به‌دست می‌آید:

$$TC_j(Q,P)= \qquad (۹)$$

$$\frac{k}{T}+c_j(a-bp)+\frac{c_j}{T}\int_0^T(g+ht)q(t)dt$$

که با قرار دادن رابطه (۶) در تابع هزینه (۹)، تابع هزینه کل به‌صورت رابطه (۱۰) به دست می‌آید:

$$TC_j(Q,P)= \frac{k}{T}+c_j(a-bp)+\frac{c_i(a-bp)}{T}\int_0^T(g+ht)(T-t)dt$$

$$TC_j(Q,P)= \frac{k}{T}+c_j(a-bp)+\frac{c_i(a-bp)}{T}\int_0^T[gT+(hT-g)t-ht^2]\,dt \qquad (۱۰)$$

$$TC_j(Q,P)=\frac{k}{T}+c_j(a-bp)+\frac{c_i(a-bp)}{T}\left(gT^2+\frac{(ht-g)T^2}{2}-\frac{hT^3}{3}\right)$$

$$TC_j(Q,P)=\frac{k}{T}+c_j(a-bp)\ +\frac{c_i(a-bp)}{6}(3gT+hT^2)$$

حالا با جایگذاری رابطه (۸) در تابع هزینه نهایی (۱۰) تابع هزینه کل به‌صورت رابطه (۱۱) به‌دست می‌آید:

$$TC_j(Q,P)=\frac{k(a-bp)}{Q}+c_j(a-bp)+ + \frac{gc_jQ}{2}+\frac{hc_jQ^2}{6(a-bp)} \qquad (۱۱)$$

برای به‌دست آوردن سود کل در دوره زمانی T، باید هزینه کل آن دوره از درآمد همان دوره کم شود. درآمد کل در هر دوره از ضرب مقدار تقاضا در قیمت فروش (p) به‌دست می‌آید؛ بنابراین با کسر رابطه (۱۱) از درآمد کل، رابطه (۱۲) به دست می‌آید.

$$TP_j(Q,P)=p(a-hp)-\frac{k(a-bp)}{Q}-c_j(a-bp)-\frac{gc_jQ}{2}-\frac{hc_jQ^2}{6(a-bp)} \qquad (۱۲)$$

برای ماکزیمم کردن تابع سود (۱۲)، باید مشتق اول این تابع را نسبت به p و Q محاسبه کرده و برابر صفر قرار داده و معادلات را حل نمود.

$$\frac{\partial TP_j(Q.P)}{\partial Q}=\frac{K(a-bp)}{Q^2}-\frac{hc_jQ}{3(a-bp)}-\frac{gc_j}{2}=0 \quad \rightarrow \qquad (۱۳)$$

$$\frac{K(a-bp)}{Q^2}-\frac{hc_jQ}{3(a-bp)}=\frac{gc_j}{2}$$

$$\frac{\partial TP_j(Q.P)}{\partial P}=a-2bp+\frac{kb}{Q}+bc_j-\frac{bhc_jQ^2}{6(a-bp)^2}=0 \rightarrow \qquad (۱۴)$$

$$2bp+\frac{bhc_jQ^2}{6(a-bp)^2}-\frac{kb}{Q}=a+bc_j$$

۲-۴- تقعر تابع سود

برای بررسی اینکه آیا تابع سـود شماره (12) مقعر است یا نه (یعنی تقعر آن رو به بالا است یا نه) از ماتریس هسیـان استفـاده می‌شود:

$$H(Q.P)=\begin{bmatrix}\frac{-2k(a-bp)}{Q^3}-\frac{hc_j}{3(a-bp)} & -\frac{kb}{Q^2}-\frac{bhc_jQ}{3(a-bp)^2}\\ \frac{-kb}{Q^2}-\frac{bhc_jQ}{3(a-bp)^2} & -2b-\frac{b^2hc_jQ^2}{3(a-bp)^3}\end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

در مراحل فوق، دترمینان عبارت $\frac{-2k(a-bp)}{Q^3}-\frac{hc_j}{3(a-bp)}$را برابر با $H_1=|H_{11}|$قرار داده که کاملاً مشخص است که منفی است . همچنین دترمینان $H(Q.P)$را نیز محاسبه و برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$H_2=\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$$

در پیوست شماره "الف" این دترمینان محاسبه شده و به‌تفصیل نشان داده شده است که به ازای مقادیر $P>\frac{1}{2}(\frac{a}{b})$ مثبت است و تقعر تابع سود $TP_j(Q,P)$ رو به بالاست.

۳- الگوریتم حل

مراحل این راه‌حل بهینه در زیر توضیح داده شده است. لازم به ذکر است که جواب به‌دست‌آمده توسط معادلات نیاز به گرد کردن دارد، به این صورت که مقدار Q به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد می‌شود و مقادیر P, $TC_j(Q,P)$ و $TP_j(Q,P)$ با ۲ رقم اعشار بیان می‌گردد.

مرحله ۰- $j=J$ و $TP_{\max}=0$.

مرحله ۱- با توجه به کوچک‌ترین c_j و مقادیر K,a,b,g,h، فرموله‌ای شماره ۱۳ و ۱۴ را حل نموده و *مقادیر Q,P* محاسبه می‌شود.

اگر مقدار Q در بازه $q_{j-1}<Q\le q_j$ قرار دارد، پس جواب قابل‌قبول می‌باشد. در این حالت مقادیر Q,P را در فرمول شماره ۱۲ قرار داده و $TP_j(Q,P)$ محاسبه می‌گردد.

حال اگر $TP_j(Q,P)>TP_{\max}$، $TP_{\max}=TP_j(Q.P)$ و به مرحله ۴ برو. در غیر این صورت به مرحله ۲ برو.

اگر مقدار Q در بازه $q_{j-1}<Q\le q_j$ قرار ندارد، پس جواب قابل‌قبول نمی‌باشد، لذا به مرحله ۲ برو.

مرحله ۲- مقدار $Q=q_{j-1}$ قرار داده، با توجه به کوچک‌ترین c_j و مقادیر K,a,b,g,h ، فرمول شماره ۱۴ را حل نموده و مقدار P را به‌دست می‌آوریم. با قرار دادن P و $Q=q_{j-1}$ در فرمول شماره ۱۲، $TP_j(Q,P)$ را محاسبه می‌کنیم.

حال اگر $TP_j(Q,P)>TP_{\max}$، $TP_{\max}=TP_j(Q.P)$ و به مرحله ۳ می‌رویم.

مرحله ۳- اگر $j\ge 2$ آنگاه $j=j-1$ قرار بده و به مرحله ۱ برو.

اگر $j=1$ آنگاه به مرحله ۴ برو.

مرحله ۴- جواب نهایی با توجه به $TP_{\max}$ قابل‌قبول می‌باشد.

مقادیر بهینه $TC_j(Q,P),T,P,Q$ و $TP_j(Q,P)$ را به‌دست آورده و متوقف می‌شویم.

۳-۱- حل یک مثال عددی با توجه به الگوریتم حل

مقادیر زیر را به پارامترها تخصیص دهید:

$K=520$	$a=100$	$b=1.5$
$g=0.2$	$h=0.05$	
$c_1=5$	$c_2=4.75$	$c_3=4.5$
$q_1=0$	$q_2=100$	$q_3=200$

مرحله ۰- $j=3$. $TP_{max}=0$ قرار می‌دهیم.

قدم ۱- $j=3$

مرحله ۱- ابتدا $c_3=4.5$ و $Q\ge 200$ قرار می‌دهیم.

سپس مقادیر $TP_3(Q,P)$ Q,P را محاسبه می‌کنیم.

P=36.76, Q=177, $TP_3(Q,P)$=1209.55

چون $Q<200$ ، پس این جواب قابل‌قبول نمی‌باشد لذا به مرحله ۲ می‌رویم.

مرحله ۲- حال $c_3=4.5$ و $Q=200$ قرار می‌دهیم.

سپس مقادیر $TP_3(Q,P)$ Q,P را محاسبه می‌کنیم.

P=36.52, Q=200, $TP_3(Q,P)$= 1207.20

چون $TP_{max}>0$ ، پس $TP_{\max}=1207.20$ قرار داده و به مرحله ۳ می‌رویم.

مرحله ۳- چون $j=3\ge 2$ آنگاه $j=2$ قرار بده و به مرحله ۱ برو.

قدم ۲- $j=2$

مرحله ۱- ابتدا $c_2=4.75$ و $100\le Q<200$ قرار می‌دهیم.

در این حالت مقادیر $TP_2(Q,P)$ Q,P را محاسبه می‌کنیم.

P=36.92, Q=172, $TP_2(Q,P)$= 1192.58

چون مقدار Q در بازه قرار دارد پس این جواب قابل‌قبول می‌باشد لذا به مرحله ۴ می‌رویم.

مرحله ۴- چون $TP_3(Q,P)>TP_2(Q,P)$ پس جواب به‌دست‌آمده در مرحله دوم از قدم ۱ جواب بهینه می‌باشد. پس سایر مقادیر محاسبه می‌شود:

P=36.52
Q=200
T=4.423
T C_3(P, Q) =444.23
T P_3(P, Q) =1207.20

۴- تجزیه‌وتحلیل حساسیت

به‌منظور ارزیابی اثرات نسبی پارامترهای ورودی بر کیفیت جواب، تجزیه‌وتحلیل حساسیت سیستماتیک بر روی مثال بالا (مثال بخش ۴-۱) انجام گرفت. ارزش هر یک از پارامترها (c_j,l,h,g,b,a,k)، در بازه ۴۰٪+، ۲۰٪+، ۲۰٪-، ۴۰٪- مورد تحلیل قرار گرفت و اثر آن بر روی جواب بهینه بررسی گردید.

جدول (۲) اثر تغییر در پارامترهای ورودی را روی متغیرهای تصمیم‌گیری Q، P، TC_j ، TP_j نشان می‌دهد.

برای مقایسه بهتر نتایج، کلیه اعداد به‌دست‌آمده از جدول فوق در قالب شکل‌های شماره ۵ تا ۱۰ آمده است و بیانگر این است که:

۱- مقدار سفارش Q با افزایش k,a افزایش پیدا می‌کند و با افزایش c_j کاهش می‌یابد. تغییرات در بقیه موارد (g,h) تأثیری در مقدار Q ندارند.

۲-مقدار قیمت فروش p با افزایش k,a,c_j افزایش پیدا می‌کند و با افزایش h,b کاهش می‌یابد. تغییرات در g نیز تأثیری در مقدار p ندارد.

۳-مقدار چرخه سفارش T با افزایش k,b, c_j افزایش پیدا می‌کند و با افزایش h,a کاهش می‌یابد. تغییرات در g نیز تأثیری در مقدار T ندارد.

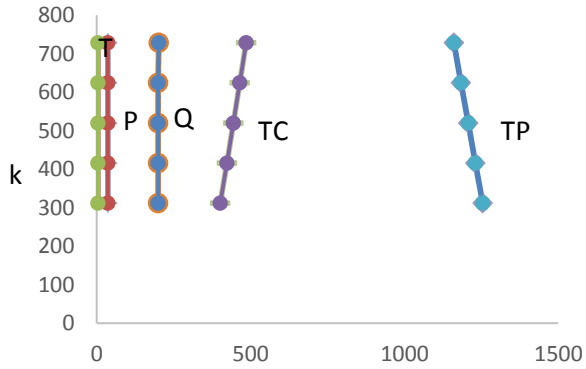
۴-مقدار هزینه کل TC_j با افزایش k,a,g,h, c_j افزایش پیدا می‌کند و با افزایش b کاهش می‌یابد.

۵- مقدار سود کل TP_j با افزایش k,b,g,h, c_j کاهش پیدا می‌کند و

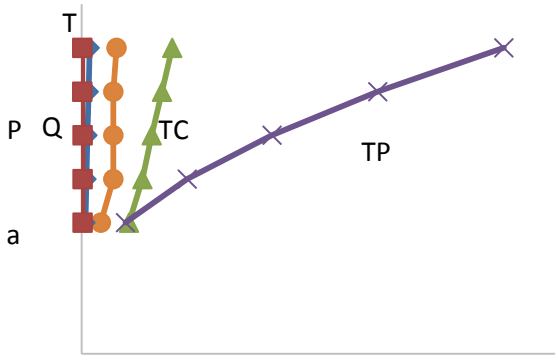
با افزایش a افزایش می‌یابد.

به‌وضوح مشخص است که پارامترهای تقاضا (از درجه اول a و سپس b) تأثیرگذارترین عوامل روی تابع سود TP_j و ارزش مقادیر p, T, TC_j می‌باشد به این معنی که شرکت‌ها باید با افزایش درآمد و کاهش هزینه‌ها، سود خود را ماکزیمم کنند.

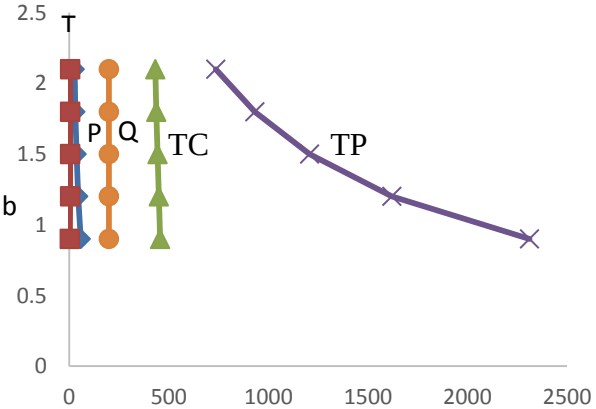
در میان پارامترهای هزینه c_j k,g,h, نیز، پارامتر هزینه خرید c_j و سپس پارامتر هزینه سفارش‌دهی k بیشتری را روی تابع سود دارند. جالب‌توجه است که سود بالاتر همیشه از قیمت فروش بالاتر به دست نمی‌آید. به عبارتی با کاهش هزینه خرید یا سفارش‌دهی نیز می‌توان با کاهش قیمت فروش؛ سود بالاتری را به دست آورد.



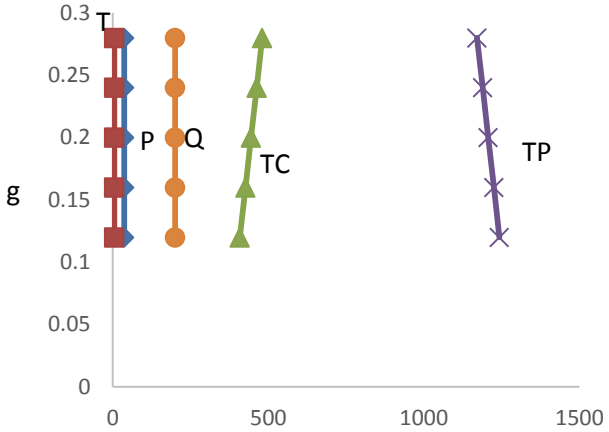
شکل (۵): نمودار تأثیر تغییرات پارامتر k روی سایر پارامترها



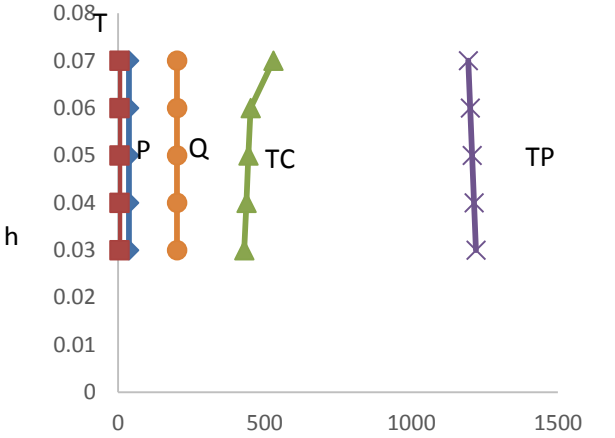
شکل (۶): نمودار تأثیر تغییرات پارامتر a روی سایر پارامترها



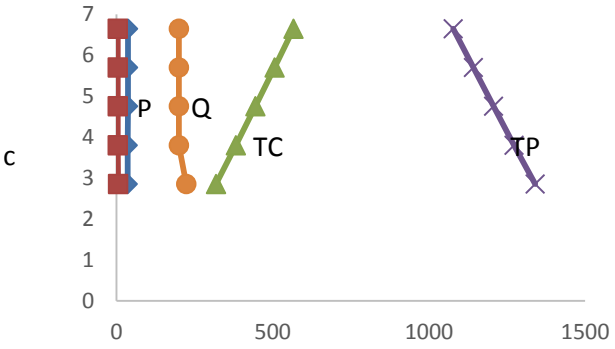
شکل (۷): نمودار تأثیر تغییرات پارامتر b روی سایر پارامترها



شکل (۸): نمودار تأثیر تغییرات پارامتر g روی سایر پارامترها



شکل (۹): نمودار تأثیر تغییرات پارامتر h روی سایر پارامترها



شکل (۱۰): نمودار تأثیر تغییرات پارامتر c_j روی سایر پارامترها

۵- نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات جهت تحقیقات آتی

در این مقاله، یک مدل موجودی با نرخ تقاضای متغیر، هزینه نگهداری متغیر و هزینه خرید متغیر براساس مفروضات واقعی موردبررسی قرار گرفته شده است. یک مدل ریاضی فرموله شده، یک الگوریتم حل نیز برای تعیین اندازه سفارش و قیمت فروش توسعه داده شده است. سپس با استفاده از یک مثال عددی، تجزیه‌وتحلیل حساسیت روی پارامترهای مدل نیز انجام گرفته شده است. برای حل مدل ریاضی و تجزیه‌وتحلیل داده‌ها، این مدل در نرم‌افزار *MATLAB 2016* کدنویسی و حل شده است.

نتایج حاصل از تجزیه‌وتحلیل حساسیت نشان می‌دهد که متغیرهای تصمیم‌گیری و سود کل، عمدتاً تحت تأثیر دو پارامتر تقاضا یعنی a, b قرار دارند. این به معنی این است شرکت‌ها برای افزایش درآمد خود باید به ترتیب مراحل زیر را انجام دهند:

۱- در گام اول شرکت‌ها باید با مطالعه روند تقاضا و قیمت فروش در بازه‌های مختلف ضمن به دست آوردن روند، با در نظر گرفتن بازه $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right) < p < \frac{a}{b}$ به‌طور مستقیم روی افزایش تعداد مشتریان ثابت(ثابت) م بردارند و با انجام استراتژی‌های بازاریابی در محیط رقابتی، با اعمال سیاست‌های مشتری مداری ضمن جذب مشتریان جدید(جدید (b) در کوتاه‌ترین زمان آن‌ها را به مشتریان ثابت تبدیل نمایند. باید توجه داشت که بازه فوق یک بازه بسیار عالی برای مدیریت می‌باشد.

۲- در گام دوم نیز باید برای افزایش درآمد از طریق مذاکره با تأمین‌کنندگان با در نظر گرفتن سیاست‌های تخفیف آن‌ها، به سمت کاهش هزینه‌ها بخصوص هزینه‌های خرید (c_j) و سفارش دهی پیش بروند.

۳- در گام سوم نیز می‌توان با کاهش هزینه‌های نگهداری به‌خصوص هزینه‌های متغیر وابسته به زمان (h)، ضمن کاهش قیمت فروش؛ سود را افزایش داد اما این راهکار بعد از اعمال گام اول و دوم مناسب می‌باشد.

مدل ارائه شده در این مقاله توانایی مدل‌سازی و حل انواع محصولات با متغیرهای تقاضا-قیمت، هزینه نگهداری وابسته به زمان و هزینه خرید همگی دارای توابع خطی را دارد. برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود به بررسی مدل در حالت چند محصولی در زنجیره تأمین پرداخته شود. در نظر گرفتن پژوهش حاضر با توابع غیرخطی نیز می‌تواند به کاربردی‌تر شدن مسئله و مرتبط بودن بحث قیمت‌گذاری با کنترل موجودی کمک کند. در نظر گرفتن هزینه سفارش‌دهی محصول وابسته به اندازه سفارش نیز می‌تواند به مدل اضافه شود. مجاز بودن کمبود، تقاضای عقب‌افتاده یا اینکه دریافت کالا به‌صورت یکجا نباشد یا مدت‌زمان تحویل نیز ثابت در نظر گرفته نشود هم می‌توانند پیشنهادات جالبی برای توسعه مدل باشند. همچنین می‌توان رقابت را که برگرفته از فاکتورهایی مانند قیمت (به‌طور صریح)، کیفیت، مشهوریت، محبوبیت، سطح خدمت و تبلیغات و ..... می‌باشد را نیز وارد مدل نمود.

مراجع

[۱] بلوریان تهرانی، محمد. (۱۳۷۶). بازاریابی و مدیریت بازار، چاپ اول، انتشارات چاپ و نشر بازرگانی، ایران.

[۲] حاج شیرمحمدی، علی. (۱۳۸۵). اصول برنامه‌ریزی و کنترل تولید و موجودی‌ها، چاپ دوم، انتشارات ارکان.

[۳] محمدهادی نیکوفکر، وحید عبدالله زاده، برنامه‌ریزی و کنترل تولید و موجودی‌ها، چاپ هفتم، انتشارات نگاه دانش، ۱۳۹۵.

[4] Sana, S. and Chaudhuri, K.S. (2004). "A Stock-Review EOQ Model with Stock-Dependent Demand, Quadratic Deterioration Rate.", *Advanced Modeling and Optimization*, Vol. 6, No. 2: 25-32.

[5] Min, J. and Zhou, Y.W. (2009) "A Perishable Inventory Model under Stock-Dependent Selling Rate and Shortage-Dependent Partial Backlogging with Capacity Constraint. ", *International Journal of Systems Science*, Vol. 4, No. 1: 33-44.

[6] Yang, H.L., Teng, J.T. and Chern, M.S. (2010). "An Inventory Model under Inflation for Deteriorating Items with Stock-Dependent Consumption Rate and Partial Backlogging Shortages", *International Journal of Production Economics*, Vol. 123, No. 1: 8-19.

[7] Lee, Y.P. and Dye, C.Y. (2012). "An Inventory Model for Deteriorating Items under Stock-Dependent Demand and Controllable Deterioration Rate.", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 63, No. 2: 74-82.

[8] Mondal, B., Bhunia, A.K. and Maiti, M. (2003). "An Inventory System of Ameliorating Items for Price Dependent Demand Rate.", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 45, No. 3: 43-56.

[9] Mukhopadhyay, S., Mukherjee, R.N. and Chaudhuri, K. S. (2005). "An EOQ Model with Two-Parameter Weibull Distribution Deterioration and Price-Dependent Demand.", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 36, No. 1: 25-33.

[10] Teng, J.T., Chang, C.T. and Goyal, S.K. (2005). "Optimal Pricing and Ordering Policy under Permissible Delay in Payments.", *International Journal of Production Economics*, Vol. 97, No. 2: 2-12.

[11] Transchel, S. and Minner, S. (2008). "Coordinated lot-sizing and dynamic pricing under a supplier all-units quantity discount.", *BuR-Business Research*, Vol. 1, No. 1: 125-141.

[12] Zhengping, D. (2010). "An Inventory Coordination Scheme of Single-Period Products under Price-Dependent Demand.", *International Conference on E-Product E-Service and Entertainment (ICEEE)*, pp. 1–4.

[13] You, P.S. (2004). "Inventory Policy for Products with Price and Time-Dependent Demands.", *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 56, No. 7: 73-87.

[14] Hou, K.L. and Lin, L.C. (2006). "An EOQ Model for Deteriorating Items with Price-and Stock-Dependent Selling Rates under Inflation and Time Value of Money.", *International Journal of Systems Science*, Vol. 37, No. 15: 31-39.

[15] You, P.S. and Hsieh, Y.C. (2007). "An EOQ Model with Stock and Price Sensitive Demand.",

Mathematical and Computer Modelling, Vol. 45, No. 7: 42-93.

[16] Panda, D., Maiti, M.K. and Maiti, M. (2010). "Two Warehouse Inventory Models for Single Vendor Multiple Retailers with Price and Stock Dependent Demand.", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, No. 11: 71-85.

[۱۷] سعیدی مهرآباد، محمد، اعظمی، عادل. (۱۳۹۶). «ارائه مدل بهینه‌سازی استوار دوسطحی در برنامه‌ریزی تولید با در نظرگیری تصمیمات قیمت‌گذاری به‌منظور پاسخگویی به تقاضا در فضای رقابتی»، *پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید*، ۵(۱۱): ۱۸۹-۱۷۳.

[18] Ferguson, M., Jayaraman, V. and Souza, G.C. (2007). "Note: An Application of the EOQ Model with Nonlinear Holding Cost to Inventory Management of Perishables.", *European Journal of Operational Research*, Vol. 180, No. 1: 85-90.

[19] Ghasemi, N. and Afshar Nadjafi, B. (2013). "EOQ Models with Varying Holding Cost.", *Journal of Industrial Mathematics*.

[20] San-José, L.A., Sicilia, J. and García-Laguna, J. (2015). "Analysis of an EOQ Inventory Model with Partial Backordering and Non-Linear Unit Holding Cost.", *Omega*, Vol. 54: 47-57.

[21] Alfares, H.K. (2007). "Inventory Model with Stock-Level Dependent Demand Rate and Variable Holding Cost. ", *International Journal of Production Economics*, Vol. 108, No. 1: 59-65.

[22] Alfares, H.K. (2014). "Production-Inventory System with Finite Production Rate, Stockdependent Demand, and Variable Holding Cost.", *RAIRO–Operations Research*, Vol. 48, No. 1: 35-150.

[23] Zhao, M. and Zhong, B. (2008). "Inventory Model with Stock-Level Dependent Demand Rate and Variable Holding Cost.", *Journal of Chongqing Institute of Technology (Natural Science)*, pp. 10–23.

[24] Pando, V., García-Laguna, J., San-José, L.A. and Sicilia, J. (2012). "Maximizing Profits in an Inventory Model with Both Demand Rate and Holding Cost per Unit Time Dependent on the Stock Level.", *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 62, No. 2: 599-608.

[25] Pando, V., San-José, L.A., García-Laguna, J. and Sicilia, J. (2013). "An Economic Lot-Size Model with Non-Linear Holding Cost Hinging on Time and Quantity.", *International Journal of Production Economics*, Vol. 145, No. 1: 294-303.

[26] Datta, T.K. (2013). "An Inventory Model with Price and Quality Dependent Demand Where Some Items Produced Are Defective.", Advances in Operations Research.

[27] Kumar, M., Chauhan, A. and Kumar, R. (2013). "A Deterministic Inventory Model for Deteriorating Items with Price Dependent Demand and Time Varying Holding Cost under Trade Credit.", *International Journal of Soft Computing and Engineering*, pp. 21-23.

[28] Datta, T.K. and Paul, K. (2001). "An Inventory System with Stock-Dependent, Price-Sensitive Demand Rate.", *Production Planning & Control*, Vol. 12, No. 1: 13-20.

[29] Weng, Z.K. (1995). "Modeling Quantity Discounts under General Price-Sensitive Demand Functions: Optimal Policies and Relationships.", *European Journal of Operational Research*, Vol. 86, No. 2: 300-314.

[30] Burwell, T.H., Dave, D.S., Fitzpatrick, K.E. and Roy, M.R. (1997). "Economic lot size model for price-dependent demand under quantity and freight discounts.", *International Journal of Production Economics*, Vol. 48, No. 2: 141-155.

[31] Chang, H.C. (2013). "A Note on an Economic Lot Size Model for Price-Dependent Demand under Quantity and Freight Discounts.", *International Journal of Production Economics*, Vol. 144, No. 1: 75-79.

[32] Wee, H.M. (1999). "Deteriorating inventory model with quantity discount, pricing and partial backordering.", *International Journal of Production Economics*, Vol. 59, No. 1: 511-518.

[33] Goh, M. and Sharafali, M. (2002). "Price-Dependent Inventory Models with Discount Offers at Random Times.", *Production and Operations Management*, Vol. 11, No. 2: 39-56.

[34] San José, L.A. and García-Laguna, J. (2003). "An EOQ Model with Backorders and All-Units Discounts.", *TOP*, Vol. 11, No. 2: 53-74.

[35] San José, L.A. and García-Laguna, J. (2009). "Optimal Policy for an Inventory System with Backlogging and All-Units Discounts: Application to the Composite Lot Size Model.", *European Journal of Operational Research*, Vol. 192, No. 3: 23-80.

[36] Papachristos, S. and Skouri, K. (2003). "An inventory model with deteriorating items, quantity discount, pricing and time-dependent partial backlogging.", *International Journal of Production Economics*, Vol. 83, No. 3: 247-256.

[37] Yang, P.C. (2004). "Pricing Strategy for Deteriorating Items Using Quantity Discount When Demand Is Price Sensitive.", *European Journal of Operational Research*, Vol. 157, No. 2: 389-397.

[38] Transchel, S. and Minner, S. (2008). "Coordinated lot-sizing and dynamic pricing under a supplier all-units quantity discount.", *BuR-Business Research*, Vol. 1, No. 1: 125-141.

[39] Ouyang, L.Y., Wu, K.S. and Yang, C.T. (2008). "Retailer's ordering policy for noninstantaneous deteriorating items with quantity discount, stock-dependent demand and stochastic backorder rate.", *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, Vol. 25, No. 1: 62-72.

[40] Shi, J., Zhang, G., and Lai, K.K. (2012). "Optimal Ordering and Pricing Policy with Supplier Quantity Discounts and Price-Dependent Stochastic Demand.", *Optimization*, Vol. 61, No. 2: 15-62.

[41] Shah, N.H. (2012). "Ordering policy for inventory management when demand is stockdependent and a

temporary price discount is linked to order quantity.", *Revista Investigación Operacional*, Vol. 33, No. 3: 233-244.

[42] Tripathi, R.P. and Tomar, S.S. (2015). "Optimal order policy for deteriorating items with timedependent demand in response to temporary price discount linked to order quantiy. ", *International Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 9, No. 23: 1095-1109.

[43] Alfares, H.K. (2015). "Maximum-Profit Inventory Model with Stock-Dependent Demand, Time-Dependent Holding Cost,and All-Units Quantity Discounts.", *Mathematical Modelling and Analysis*, Vol. 20, No. 6: 15-36.

[۴۴] سیف برقی، مهدی؛ توکلیان، فرناز، سرمست حسن کیاده، زهرا، (۱۳۹۷). «یک مدل موجودی تک دوره یی با ظرفیت تولید محدود در شرایط عدم قطعیت بودجه و هزینه کمبود»، *نشریه مهندسی صنایع و مدیریت شریف*، دوره ۱-۳۴، شماره ۲/۲، ۹-۱۹.

[۴۵] جبل عاملی، محمدسعید؛ محمدی، عمران؛ نوری، مجتبی. (۱۳۹۸). «طراحی زنجیره تأمین پایدار با در نظر گرفتن عدم قطعیت در ریسک مربوط به تأمین‌کنندگان»، *پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید*، ۷(۱۴): ۱۰۷-۱۲۵.

[۴۶] خاکزار بفروئی، مرتضی؛ ذبیحی، فاطمه. (۱۳۹۷). «قیمت‌گذاری و تعیین زمان بهینه کاهش قیمت فروش کالای فاسدشدنی برای افزایش نرخ تقاضا»، *مدیریت تولید و عملیات*، دوره ۹(پیاپی ۱۷)، شماره۲، ۱۹۳-۷۹ .

[47] Zhang, J.; Liu, G.; Zhang, Q., Bai, Z., (2015). "Coordinating A Supply Chain For Deteriorating Item With A Revenue Sharing And Cooperative Investment Contract". *Omega*, 56: 37-49

[۴۸] شریفی، عبداله، آقایی، عبداله، رحمانی، دنیا. (۱۳۹۸). «شبیه‌سازی مسئله کنترل موجودی محصولات فسادپذیر با هزینه سفارش‌دهی متغیر به کمک پویایی سیستم»، *پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید*، ۷(۱۴): ۴۵-۲۹.

[۴۹] فاطمی قمی، محمدتقی. (۱۳۹۳). *برنامه‌ریزی و کنترل تولید و موجودی‌ها*، چاپ نهم، انتشارات امیرکبیر.

پیوست

جدول (۱): خلاصه مقالات مرتبط با مدل اقتصادی سفارش *E.O.Q*

گروه	نوع تابع وابستگی متغیرها	هزینه سفارش‌دهی متغیر	تخفیف	کمبود مجاز	هزینه نگهداری متغیر	تقاضای وابسته به زمان	تقاضای وابسته به سطح موجودی	تقاضای وابسته به قیمت	مدل EPQ	سال	منبع
1	خطی							*	*	2003	Mondal et al. [8]
1	خطی						*			2004	Sana and Chaudhuri [4]
1	خطی					*		*		2004	You [13]
1	خطی						*	*		2005	Teng et al. [10]
1	خطی			*			*	*		2006	Hou and Lin [14]
1	خطی						*	*		2007	You and Hsieh [15]
1	خطی			*			*			2009	Min and Zhou [5]
1	خطی						*			2010	Panda et al. [16]
1	خطی			*		*	*			2010	Yang et al. [6]
1	خطی							*		2010	Zhengping [12]
1	خطی							*		2017	سعیدی مهرآباد و اعظمی [17]
2	خطی				*					2007	Ferguson et al. [18]
2	خطی				*					2013	قاسمی و نجفی [19]
2	خطی			*	*					2015	San-Jose et al. [20]
3	خطی	*			*		*	*		2001	Datta and Paul [28]
3	خطی				*			*		2005	Mukhopadhyay et al. [9]
3	خطی				*		*			2007	Alfares [21]
3	خطی				*		*			2008	Zhao and zhong [23]
3	خطی			*	*		*			2012	Lee and Dye [7]
3	خطی				*		*			2012	Panda et al. [24]
3	خطی				*			*		2013	Datta [26]
3	خطی			*	*			*		2013	Kumar et al. [27]
3	خطی				*		*			2013	Panda et al. [25]
3	خطی				*		*		*	2014	Alfares [22]
4	خطی		*					*		1995	Weng [29]
4	خطی		*					*		1997	Burwell et al. [30]
4	خطی		*	*				*		1999	Wee [32]
4	خطی		*					*		2002	Gol and sharafali [33]

منبع	سال	مدلEPQ	تقاضای وابسته به قیمت	تقاضای وابسته به سطح موجودی	تقاضای وابسته به زمان	هزینه نگهداری متغیر	کمبود مجاز	تخفیف	هزینه سفارش‌دهی متغیر	نوع تابع وابستگی متغیرها	گروه
Papachristos and Skouri [12]	2003		*			*	*	*		خطی	4
San-Jose and garcia-Laguna [34]	2003					*	*	*		خطی	4
Yang [37]	2004		*					*		خطی	4
Ouyang et al. [39]	2008			*		*	*	*		خطی	4
Transchel and Minner [38]	2008		*					*		خطی	4
San-Joseand garcia-Laguna [35]	2009					*	*	*		خطی	4
Shah [40]	2012			*		*		*		خطی	4
Shi et al. [41]	2012		*					*		خطی	4
Chang [32]	2013		*					*		خطی	4
Alfares [43]	2015	*		*		*		*		خطی	4
Tripathi and Tomar [42]	2015				*	*		*		خطی	4
[44] سیف برقی و همکاران	۲۰۱۸	*			*	*	*			خطی	4
[45] جبل عاملی و همکاران	۲۰۱۹					*	*	*		خطی	4
[46] خاکزار بفروئی و همکاران	۲۰۱۸	*	*		*			*		خطی	4
Zhang, Jianxiong et al[47]	2017		*		*				*	خطی	5
[48] شریفی، آقایی و رحمانی	2019	*	*		*				*	خطی	5
پژوهش حاضر	2019	*	*			*		*		خطی	-

جدول (۲): تجزیه‌وتحلیل حساسیت مثال حل شده

پارامتر	New value	Q	p	درصد تغییرات p	T	درصد تغییراتT	TCj(Q,p)	درصد تغییراتTCj	TPj(Q,p)	درصد تغییراتTPj
K	312	200	36.01	-1.4%	4.34	-1.8%	401.3	-9.7%	1254.63	3.9%
	416	200	36.26	-0.7%	4.38	-0.9%	422.98	-4.8%	1230.82	2.0%
	520	200	36.52	-	4.42	-	444.23	-	1207.2	-
	624	200	36.77	0.7%	4.46	0.9%	465.16	4.7%	1183.81	-1.9%
	728	202	36.99	1.3%	4.54	2.7%	485.98	9.4%	1160.6	-3.9%
a	60	120	24.06	-34.1%	5.01	13.3%	298.07	-32.9%	277.26	-77.0%
	80	200	29.62	-18.9%	5.62	27.1%	384.69	-13.4%	668.87	-44.6%
	100	200	36.52	-	4.42	-	444.23	-	1207.2	-
	120	200	43.3	18.6%	3.63	-17.9%	508.08	14.4%	1875.62	55.4%
	140	220	49.89	36.6%	3.37	-23.8%	574.14	29.2%	2677.03	121.8%
b	0.9	200	58.77	60.9%	4.24	-4.1%	456.32	2.7%	2312.22	91.5%
	1.2	200	44.86	22.8%	4.33	-2.0%	450.25	1.4%	1620.81	34.3%
	1.5	200	36.52	-	4.42	-	444.23	-	1207.2	-
	1.8	200	30.96	-15.2%	4.51	2.0%	438.38	-1.3%	932.45	-22.8%
	2.1	200	26.96	-26.2%	4.61	4.3%	432.59	-2.6%	737.03	-38.9%
g	0.12	200	36.52	0.0%	4.42	0.0%	408.27	-8.1%	1243.2	3.0%
	0.16	200	36.52	0.0%	4.42	0.0%	426.27	-4.0%	1225.21	1.5%
	0.2	200	36.52	-	4.42	-	444.23	-	1207.2	-
	0.24	200	36.52	0.0%	4.42	0.0%	462.27	4.1%	1189.22	-1.5%
	0.28	200	36.52	0.0%	4.42	0.0%	480.28	8.1%	1171.23	-3.0%
h	0.03	200	36.66	0.4%	4.44	0.5%	429.56	-3.3%	1220.5	1.1%
	0.04	200	36.59	0.2%	4.43	0.2%	436.93	-1.6%	1213.84	0.6%
	0.05	200	36.52	-	4.42	-	444.23	-	1207.2	-
	0.06	200	36.44	-0.2%	4.41	-0.2%	451.56	1.7%	1200.61	-0.5%
	0.07	200	36.37	-0.4%	4.4	-0.5%	528.83	19.0%	1194.02	-1.1%
c	3.0, 2.85, 2.7	223	35.59	-2.5%	4.79	8.4%	318.78	-28.2%	1340.32	11.0%
	4.0, 3.8, 3.6	200	36.15	-1.0%	4.36	-1.4%	382.04	-14.0%	1272.75	5.4%
	5, 4.75, 4.5	200	36.52	-	4.42	-	444.23	-	1207.2	-
	6.0, 5.7, 5.4	200	36.88	1.0%	4.47	1.1%	505.7	13.8%	1142.12	-5.4%
	7.0, 6.65, 6.3	200	37.24	2.0%	4.53	2.5%	566.37	27.5%	1077.43	-10.7%

پیوست الف: اثبات تقعر رو به بالا بودن تابع سود رابطه (۱۵):

هدف اصلی این مقاله، محاسبه مقادیر بهینه P,Q به نحوی است که سود حاصل حداکثر شود. از تابع سود (۱۵) نسبت به P,Q مشتق گرفته و برابر صفر قرار داده تا متغیرهای تصمیم محاسبه شوند. برای یافتن مقدار بهینه همزمان باید دستگاه معادلات (۱۳) و (۱۴) حل شود.

قضیه: جواب به‌دست‌آمده از دستگاه معادلات فوق دارای شرایط درجه دوم برای حداکثر سازی تابع هدف سود می‌باشد.

اثبات: برای آنکه نشان داده شود که مقدار بهینه به‌دست‌آمده برای تابع سود حداکثر می‌باشد، باید ابتدا ماتریس هسیان (هشین) تابع سود نسبت بهP,Q محاسبه شود. در صورتی که عنصر اول این ماتریس منفی و دترمینان آن بزرگ‌تر از صفر باشد اثبات کامل می‌شود. بنا براین نشان داده می‌شود که این شرایط برقرار است.

از رابطه (۱۵) داریم:

$$H_1 = |H_{11}| = \frac{-2k(a-bp)}{Q^3} - \frac{hc_j}{3(a-bp)} < 0 \qquad (A1)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$$

برای اثبات مثبت بودن $Det(H2)$ به‌صورت زیر عمل می‌شود:

ابتدا $Det(H2)$ از نسبت به هریک از متغیرهای مسئله یعنی P,Q مشتق دوم گرفته می‌شود. منفی بودن مشتق دوم مشان دهنده این است که تابع$Det(H2)$ در هر برش از P نسبت به Q و در هر برش از Q نسبت به P مقعر است. سپس نشان داده می‌شود این تابع دو جواب برای هریک از متغیرها دارد؛ بنابراین مقدار دترمینان در بازه بین دو جواب که بازه مطلوب است مثبت و اثبات کامل است.

مقدار مشتق دوم $Det(H2)$ نسبت به P,Q به‌صورت زیر است:

$$H_2 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix}$$

$$H(Q.P) = \begin{bmatrix} \frac{-2k(a-bp)}{Q^3} - \frac{hc_j}{3(a-bp)} & -\frac{kb}{Q^2} - \frac{bhc_jQ}{3(a-bp)^2} \\ \frac{-kb}{Q^2} - \frac{bhc_jQ}{3(a-bp)^2} & -2b - \frac{b^2hc_jQ^2}{3(a-bp)^3} \end{bmatrix}$$

با کمی دقت متوجه می شویم که تک تک عبارات منفی است و در نهایت جمع آن‌ها نیز منفی است.

$$\frac{\partial^2 TP_j(Q.P)}{\partial p^2} = \frac{-2k(a-bp)}{Q^3} - \frac{hc_j}{3(a-bp)} < 0 \qquad (A2)$$

$$\frac{\partial^2 TP_j(Q.P)}{\partial Q^2} = -2b - \frac{b^2hc_jQ^2}{3(a-bp)^3} < 0 \qquad (A3)$$

با حل $(A2)$ تنها دو مقدار برای P به‌دست می‌آید و با توجه به اکیداً منفی بودن مشتق دوم آن، واضح است که تابع $Det(H2)$ بین دو ریشه به‌دست‌آمده در بالای محور عمودی قرار دارد و مثبت است.(به‌دلیل حجم بالای محاسبات، خلاصه عبارات آورده شده است).

به همین ترتیب برای $(A3)$ تنها دو مقدار برای Q به‌دست می‌آید و با توجه به اکیداً منفی بودن مشتق دوم آن، واضح است که تابع $Det(H2)$ بین دو ریشه به‌دست‌آمده در بالای محور عمودی قرار دارد و مثبت است.

حال با توجه به اثبات مثبت بودن دترمینان ماتریس هسیان در نقطه بهینه، جواب به‌دست‌آمده حداکثر می‌باشد.

در اینجا بقیه محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$H_2 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} = \left[\frac{-2K(a-bp)}{Q^3} - \frac{hc_j}{3(a-bp)}\right]\left[-2b - \frac{b^2h\,c_jQ^2}{3(a-bp)^3}\right] - \left[-\frac{kb}{Q^2} - \frac{bh\,c_jQ}{3(a-bp)^2}\right]\left[-\frac{kb}{Q^2} - \frac{bhc_jQ}{3(a-bp)^2}\right]$$
$$= \left(\frac{6k(a-bp)^2 + hc_jQ^3}{3Q^3(a-bp)}\right)\left(\frac{6b(a-bp)^3 + b^2hcjQ^2}{3(a-bp)^3}\right) - \left(\frac{3kb(a-bp)^2 + bhc_jQ^3}{3Q^2(a-bp)^2}\right)\left(\frac{3kb(a-bp)^2 + bhc_jQ^3}{3Q^2(0-bp)^2}\right) \qquad (A4)$$

$$H_2 = \frac{1}{9Q^4(a-bp)^4}[[(18kQ(a-bp)^5 + 3hc_jQ^4(a-bp)^3)(18Q^4\,b(a-bp)^4 + 3b^2hc_jQ^6(a-bp)] - [(9kbQ^2(a-bp)^4 + 3bhc_jQ^5(a-bp)^2)(9kbQ^2(a-bp)^4 + 3bhc_jQ^5(a-bp)^2)]]$$

با توجه به اثبات مقعربودن تابع $H(P,Q)$، باید دترمینان آن یعنی $(A4)$ مثبت باشد، با توجه به اینکه مخرج $(A4)$؛ همواره مثبت است لذا باید صورت کسر مثبت باشد.

$$[(18kQ(a-bp)^5 + 3hc_jQ^4(a-bp)^3)(18Q^4\,b(a-bp)^4 + 3b^2hc_jQ^6(a-bp))] > [(9kbQ^2(a-bp)^4 + 3bhc_jQ^5(a-bp)^2)(9kbQ^2(a-bp)^4 + 3bhc_jQ^5(a-bp)^2)] \quad \rightarrow$$
$$[324kbQ^5(a-bp)^9 + 54kb^2hc_jQ^7(a-bp)^6 + 54hbc_jQ^8(a-bp)^7 + 9h^2b^2c_j^2Q^{10}(a-bp)^4] > [324k^2b^2Q^4(a-bp)^8 + 27kb^2hc_jQ^7(a-bp)^6 + 27kb^2hc_jQ^7(a-bp)^6 + 9h^2b^2c_j^2Q^{10}(a-bp)^4] \quad \rightarrow$$

پس با مقایسه دوبه دو طرفین نامساوی داریم:

$$\begin{cases} 324kbQ^5(a-bp)^9 > 324k^2b^2Q^4(a-bp)^8 & \rightarrow\ 4Q(a-bp) > kb \\ 54hbc_jQ^8(a-bp)^7 > 27kb^2hc_jQ^7(a-bp)^6 & \rightarrow\ 2Q(a-bp) > kb \\ 54kb^2hc_jQ^7(a-bp)^6 > 27kb^2hc_jQ^7(a-bp)^6 & \\ 9h^2b^2c_j^2Q^{10}(a-bp)^4 > 9h^2b^2c_j^2Q^{10}(a-bp)^4 & \end{cases} \qquad (A5)$$

پس داریم:

$$2Q(a-bp) > kb \quad \rightarrow \quad Q > \frac{Kb}{2(a-bp)} \qquad (A6)$$

از تابع سود، رابطه ۳-۱۲ داریم:

$$P(a-bp) > \frac{K(a-bp)}{Q} \quad \rightarrow \quad p > \frac{K}{Q} \qquad (A7)$$

از ترکیب رابطه ۳-۴ ($p < \frac{a}{b}$) و $(A7)$ داریم:

$$\frac{a}{b} > \frac{K}{Q} \quad \rightarrow \quad Q > \frac{Kb}{a} \qquad (A8)$$

با مقایسه نامعادلات شماره $(A6)$ و $(A8)$، در می یابیم که شرط $P > \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)$ باید تأمین شود. ب؛ براین، دترمینان تابع $H(P,Q)$ تحت شرط زیر همواره مثبت خواهد شد.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right) < p < \frac{a}{b}$$

IERPS Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

ISSN: 2345-2269

Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

Autumn and Winter 2020, Volume 7., No. 15., pp. 305-321
www.ier.basu.ac.ir

DOI: 10.22084/ier.2020.19867.1883

Inventory Model and Pricing With Linear Functions Price-Dependent Demand, Time-Dependent Holding Cost and Discount Amount (Purchase Cost)

A. Sadri Esfahani[1,*], M. Nakhaeinejad[2], S. Nabizadeh Marziani[3]

[1, 3] Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Science and Arts University, Yazd, Iran
[2] Department Faculty Engineering Yazd University, Yazd, Iran

ARTICLE INFO

***Article history*:**

Received 15 August 2019
Accepted 9 January 2020

***Keywords*:**

Inventory model
pricing-demand linear functions
holding cost
purchase cost
All-unit discount

ABSTRACT

In inventory models based on the Economic Order Quantity, Demand rate and holding cost are assumed have constant value and the purchase cost is assumed constant regardless of the order size. In actual applications, the demand rate can be affected by many variables such as seasonality, selling price, and availability. Moreover, the holding cost tends to be higher for extended storage periods. Additionally, the unit purchase cost is generally lower for larger order sizes due to quantity discounts. The purpose of this paper is to develop an inventory and pricing model of a product in a supply chain consisting of multiple suppliers, multiple producers and multiple customers that have linear functions price-dependent demand, time-dependent holding cost, and cost of purchase depends on the size, so that three cases are considered simultaneously in the model. Based on these assumptions, a formulated mathematical model and an optimal solution solution algorithm are developed to maximize total profits, a case study of the problem in a manufacturing plant was carried out using real data Modified, a numerical example is given, and sensitivity analysis is performed on the effect of different parameters on the optimal solution. Our findings indicate that, first, demand function parameters and then cost and purchase parameters are the most influential factors on the profit function. We will also show with careful and practical scrutiny that in the factories, higher profits will not always come from higher sales prices, but with discount policies from raw material suppliers, while reducing the cost of purchasing and ordering and reducing management. Simultaneous maintenance costs can also be expected by lowering the finished product price and increasing fixed demand.

[*] Corresponding author. A. Sadri Esfahani
Tel.: 035-38218169; E-mail address:ali.sadri@gmail.com