

## بهینه‌سازی توأم سیاست زمانبندی تولید و نگهداری و تعمیرات با در نظر گرفتن کمبود از نوع پس‌افت و تقاضا به صورت احتمالی

سمانه بابایی مراد<sup>۱</sup>، پرویز فتاحی<sup>۲\*</sup>، حسن باقری<sup>۳</sup>

۱. دانشجوی دکتری گروه مهندسی صنایع دانشگاه الزهرا

۲. استاد گروه مهندسی صنایع، دانشگاه الزهرا

۳. دانشجوی دکتری گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

### خلاصه

بهینه‌سازی توأم سیاست زمانبندی تولید و نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه، موضوع موردعلاقه بسیاری از محققین است که تأثیر بالقوه‌ای روی عملکرد سیستم‌های تولیدی دارد. علاوه بر این، با توجه به عدم قطعیت در تقاضا، نگهداری تعمیرات و کمبود موجودی تقریباً اجتناب‌ناپذیر است؛ بنابراین، تعیین مقدار مطلوب سطح موجودی احتیاطی، زمان ایجاد موجودی اضافی برای ذخیره‌سازی جهت مواجهه با کمترین کمبود و زمان عملیات نگهداری و تعمیرات، دغدغه بسیاری از تولیدکنندگان است. در این مقاله، یک مدل بهینه‌سازی توسعه داده شده است. برای نزدیکی به واقعیت، تقاضا به‌عنوان پارامتری احتمالی در نظر گرفته شده و سیستم در صورت مواجهه با کمبود آن را جبران می‌کند. تمرکز اصلی این مقاله روی یک واحد تولیدی تک ماشینه با نرخ خرابی افزایشی است. سیستم با موجودی به اندازه  $h$  که در دوره  $A$  ذخیره شده، کار خود را شروع کرده و به محض رسیدن به دوره  $m$  یا خرابی، هر کدام که زودتر رخ دهد، متوقف شده و تحت عملیات نگهداری و تعمیرات قرار می‌گیرد. در این دوره از موجودی احتیاطی استفاده می‌کند. یک مدل ریاضی و یک رویکرد عددی برای به‌دست آوردن هم‌زمان مقادیر بهینه متغیرها استفاده شده است که به‌طور متوسط هزینه کل را به حداقل برساند و محدودیت دسترسی را برآورده کند. نتایج نشان می‌دهد که در مدل ارائه شده هزینه کل و متغیرهای تصمیم نسبت به هزینه موجودی حساس بوده ولی سناریوی محتمل نسبت به آن حساسیت کمی دارد.

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۷/۱۱/۱۵

پذیرش ۱۳۹۸/۶/۱۲

کلمات کلیدی:

نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه

کمبود جبران‌پذیر

بهینه‌سازی توأم

کنترل موجودی

زمانبندی تولید

### ۱- مقدمه

خرابی دستگاه‌ها جلوگیری شود [۱-۳]. خرابی دستگاه‌ها و تجهیزات عامل مهمی در اختلال و از دست دادن بهره‌وری تولید می‌باشند. باید از سطوح دسترسی و در دسترس بودن دستگاه‌ها و تجهیزات اطمینان حاصل شود تا واحد بتواند با حداکثر ظرفیت موردنیاز تولید نماید. یکی از مهم‌ترین روش‌های دستیابی به این هدف، اجرای سیاست‌های نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه است. البته، ایجاد و اجرای عملیات نگهداری و تعمیرات ممکن است منجر به توقف کامل واحدهای تولید در زمان‌های کمتری شود. به‌منظور به حداقل رساندن اثر توقف‌های

امروزه سیستم‌های تولیدی مدرن پیچیده‌تر شده‌اند و اگرچه این سیستم‌ها قابل‌اعتمادتر هستند، ولی عملکرد آن‌ها هنوز هم تحت تأثیر خرابی‌های اجتناب‌ناپذیر دستگاه‌ها قرار دارد که باعث کاهش تولید می‌شود. تجهیزات و دستگاه‌ها ممکن است طی فرایندهای تولید واقعی دچار خرابی شوند و لازم است شرایط تعمیر آن‌ها فراهم شود. اقدامات نگهداری منظم و پیشگیرانه (PM) باید بر روی تجهیزات تولید انجام شود تا از وقفه‌های تولید ناشی از وقفه‌های غیرمنتظره و

\* نویسنده مسئول: پرویز فتاحی

تلفن ۰۲۱۸۵۶۹۲۱۹۱؛ پست الکترونیکی: p.fattahi@alzahra.ac.ir

است. پلاسکی<sup>۶</sup> و همکاران [۱۲]، یک سیستم بهینه‌سازی توأم تولید و بازاریابی را در نظر گرفته‌اند که از یک ماشین قابل انعطاف تشکیل شده است و قادر است زمان تولید خود را بین حالت تولید که در آن از مواد اولیه در فرآیند تولید استفاده می‌شود و حالت بازاریابی که در آن از مواد برگشتی استفاده می‌شود، به اشتراک بگذارد. لافاتا<sup>۷</sup> [۱۳] و همکاران، یک مدل توأم و یک رویکرد براساس شبیه‌سازی تبرید برای تسهیل کردن فرآیند ادغام و بهینه‌سازی ارائه کرده‌اند. در این رویکرد، سه استراتژی از جمله انعطاف‌پذیری پردازش، انعطاف‌پذیری توالی عملیات و انعطاف‌پذیری زمانبندی، برای کاهش فضای جستجو برای پشتیبانی مؤثر از فرآیند بهینه‌سازی استفاده شده است.

به‌طور کلی، مدل‌های تعمیر و نگهداری به دو دسته مبتنی بر زمان که شامل بلوک‌های مبتنی بر سن و جایگزینی [۱۴]؛ و مبتنی بر شرایط [۱۵، ۱۶] که شامل مدل‌هایی با بازرسی دوره‌ای تقسیم‌بندی می‌شوند. خلاصه‌ای از مرور ادبیات در جدول ۱ ارائه شده است. در این مقاله بهینه‌سازی توأم سیستم‌های نگهداری و تعمیرات و کنترل موجودی توسعه یافته است. هنگامی که سیستم تحت عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه قرار می‌گیرد به‌طور کامل متوقف شده و مدت‌زمان انجام این عملیات قابل پیش‌بینی نیست؛ بنابراین، استفاده از یک سطح بافر برای زمانی که نگهداری و تعمیرات موردنیاز است، اجتناب‌ناپذیر است. در این دوره سیستم به‌طور کامل متوقف شده و از بافر برای تأمین تقاضای غیرقطعی استفاده می‌کند و سیستم دچار کمبود شده که علاوه بر هزینه‌های دیگر، هزینه کمبود در مورد سیستم در نظر گرفته می‌شود.

مقاله حاضر توسعه مقاله رزگ و همکاران [۱۷] که یک مدل بهینه‌سازی توأم را ارائه و کمبود موجودی را به‌عنوان فروش از دست رفته در نظر گرفته‌اند است. نوآوری اصلی این مقاله در نظر گرفتن نوع کمبود به‌صورت پس‌افت است. در بسیاری از تحقیقات گذشته کمبود را درحالی‌که از نوع فروش از دست رفته بوده است در نظر گرفته‌اند بسیاری از تولیدکنندگان کمبود به وجود آمده را پس از راه‌اندازی ماشین به‌عبارت‌دیگر پس از اتمام عملیات نگهداری و تعمیرات جبران می‌کنند که از نظر اقتصادی به صرفه‌تر است و به نفع تولیدکنندگان برای حفظ تقاضا و مشتری است. لذا در این مقاله این شکاف تحقیقاتی موردبررسی قرار گرفته شده است. در جدول ۱ نیز ستونی با این عنوان آورده شده است و این در حالی است که تعداد اندکی به این موضوع پرداخته و یا حتی نپرداخته‌اند. در این تحقیق، حالت غیرقطعی تقاضا که از توزیع یکنواخت برای نشان دادن آن استفاده شده و لحاظ کمبود به‌صورت پس‌افت یا جبرانی موردبررسی قرار گرفته که دارای نوآوری نسبت به تحقیقات پیشین است. همچنین الگوریتمی برای حل مدل بهینه‌سازی ارائه شده است.

تولید بر عملکرد کلی سیستم تولید، سیاست‌های نگهداری و تعمیرات تجهیزات و کنترل موجودی باید هم‌زمان موردتوجه قرار گیرد. به همین دلیل، بررسی اخیر سیاست‌های نگهداری و تعمیرات و برنامه‌ریزی و کنترل موجودی تبدیل به یک موضوع مهم تحقیقاتی شده است. مطالعات در این زمینه به سه دسته تقسیم می‌شوند: (۱) محیط‌زیست؛ (۲) موجودی؛ و (۳) کنترل کیفیت.

رقابت در دنیای امروز باعث شده است که شرکت‌ها برای مشتریان خود محصولات با کیفیت تولید کنند و از طرف دیگر هزینه‌ها و انتشار گازهای گلخانه‌ای خود را برای مقابله با مقررات بین‌المللی کاهش دهند. برای دستیابی به این هدف، شرکت‌ها باید یک سیستم تولید قابل‌اعتماد داشته باشند و سیاست‌های مدیریتی را برای رسیدگی به تأثیرات زیست‌محیطی اتخاذ کنند [۴]. باین‌حال، ترکیب سیاست نگهداری و تعمیرات و کنترل موجودی می‌تواند مؤثر باشد [۵]. جین و همکاران [۶] سیاستی ارائه دادند که به‌طور توأم ظرفیت موجودی و نگهداری و تعمیرات تحت چارچوب نظریه بازی را بهینه کردند.

در سال‌های اخیر، بهینه‌سازی توأم سیاست‌های نگهداری و تعمیرات و کنترل موجودی، یکی از موضوعات مهم تحقیق بوده و بیشتر این مطالعات به‌منظور بهینه‌سازی کنترل موجودی و تولید محصولات با هدف به حداقل رساندن کل هزینه مورد انتظار در واحد زمان، تمرکز داشته است. در طول دهه گذشته، بسیاری از مطالعات نگهداری و تعمیرات و کنترل موجودی به‌طور هم‌زمان موردتوجه قرار گرفته‌اند و به بهبود کلی عملکرد سیستم‌های تولید با بهینه‌سازی توأم سیاست‌های کنترل موجودی و نگهداری اشاره کرده‌اند. در سال ۱۹۶۸، فالکنر<sup>۱</sup> [۷] بهینه‌سازی هم‌زمان سیاست‌های نگهداری و تعمیرات را در یک سیستم چندمنظوره برای یک افق برنامه‌ریزی بلندمدت انجام داده است. کیو و اوساکی<sup>۲</sup> [۸] همچنین یک سیاست بهینه‌سازی به‌طور هم‌زمان ارائه دادند که هزینه‌های موجودی را بررسی کرده است. اگر هزینه‌های نگهداری و تعمیرات و هزینه‌های موجودی از طریق تجارت جبران نشوند، نتیجه مطلوب نخواهد بود، اما زمانی که هر دو هزینه‌ها در نظر گرفته شوند، تولید بهبود خواهد یافت. ون هورن‌بیک و همکاران<sup>۳</sup> [۹] ترکیبی از سیاست‌های تعمیر و نگهداری (بر اساس بلوک مبتنی بر سن و مبتنی بر شرایط) و سیاست‌های کنترل موجودی (مرور دوره‌ای و بررسی مرور دائم) را دسته‌بندی کرده‌اند.

ذویب<sup>۴</sup> و همکاران [۱۰] یک مدل ریاضی پیشنهاد کرده‌اند که هدف اصلی آن، تعیین سیاست بهینه مشترک شامل هزینه راه‌اندازی، نگهداری، نگهداری موجودی و کمبود و نیز هزینه ایجاد شده با تولید اقلام معیوب است. پن<sup>۵</sup> و همکاران [۱۱] یک مدل بهینه‌سازی توأم زمانبندی و سیاست نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه برای حل مسئله تک ماشین ارائه کردند که نتایج آن نشان‌دهنده عملکرد خوب مدل

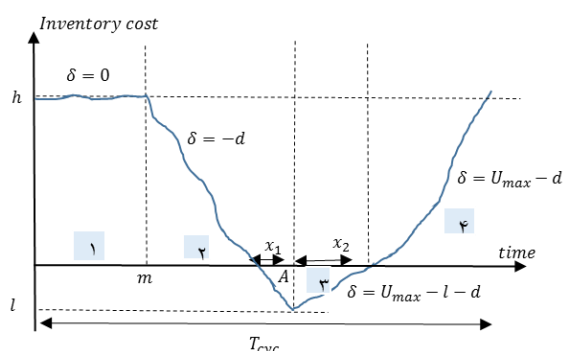
5. pan  
6. Polotski  
7. La Fata

1. Falkner  
2. Kaioand Osaki  
3. Van Horenbeek  
4. Dhoub

## ۲- مدل‌سازی ریاضی

## ۱-۲- بیان مسئله

از جبران کمبود، سیستم شروع به تولید کند، به اندازه  $h$ ، بافر ذخیره کند و دچار خرابی تصادفی نشود. سناریوی دوم، سیستم شروع به تولید می‌کند، کمبود را جبران کرده ولی دچار خرابی تصادفی شده و نمی‌تواند به اندازه  $h$  ذخیره‌سازی کند. سناریوی سوم، سیستم حین جبران کمبود دچار خرابی تصادفی می‌شود. دوره تولید به سه دسته تقسیم می‌شود: ۱- هنگامی که با نرخ  $d$  تولید می‌کند،  $T_1$  نامیده می‌شود، ۲- هنگام تولید با نرخ  $U_{max}$ ،  $T_2$  نامیده می‌شود. ۳- در زمان عملیات نگهداری و تعمیرات که ماشین به‌طور کامل متوقف می‌شود و دقیقاً مشخص نیست که این عملیات چقدر طول می‌کشد. مدت زمان توقف ماشین برای عملیات تعمیرات و نگهداری که تولیدی انجام نمی‌شود و تقاضا از طریق بافر تأمین می‌شود، (زمان عملیات نگهداری و تعمیرات)،  $TTR$  نامیده می‌شود. هدف از این مدل، تعیین سه متغیر به‌گونه‌ای است که هزینه در واحد زمان در طی سیکل تولید به حداقل برسد. این سه متغیر عبارتند از:  $h$ ،  $A$ ،  $m$ .



شکل (۱): سطح موجودی در حالت جبران کمبود و رسیدن مقدار موجودی اضافی به سطح  $h$  (سناریو ۱)

یک سیستم تولیدی شامل یک ماشین با نرخ خرابی تصادفی را در نظر بگیرید. مقدار تقاضا احتمالی  $d$  دارای توزیع یکنواخت است. این سیستم تولیدی دارای ماکزیمم نرخ تولید به اندازه  $U_{max}$  است که در مواقعی که کمبودی وجود ندارد و یا ذخیره‌سازی انجام نمی‌شود به اندازه  $d$  تولید می‌نماید و در سایر مواقع به اندازه  $U_{max}$  که  $U_{max} > d$  است، تولید می‌نماید. هنگام ذخیره‌سازی موجودی احتیاطی، با نرخ  $U_{max}$  تولید می‌کند و مقدار اضافی آن ذخیره شده تا در دوره نگهداری و تعمیرات که سیستم به‌طور کامل متوقف می‌شود از آن استفاده نماید. سیاست نگهداری و تعمیرات شامل ارسال ماشین برای نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه به محض رسیدن به یک‌زمان خاص یا خرابی سیستم هر کدام که زودتر رخ دهد، است. فرض این است که پس از عملیات نگهداری و تعمیرات سیستم به حالت اولیه باز می‌گردد. نرخ ذخیره‌سازی تفاوت بین ورودی و خروجی تعریف شده است. فرض بر این است که زمان عملیات نگهداری و تعمیرات بیشتر از مدت پیش‌بینی شده باشد و سیستم حین عملیات نگهداری و تعمیر، با کمبود مواجه شود. شکل (۱) تغییر در سطوح موجودی را نشان می‌دهد. در فاز اول، مقداری موجودی اضافی به اندازه  $h$  وجود دارد، بنابراین دستگاه با نرخ  $d$  تقاضای احتمالی را پاسخ می‌دهد. در فاز ۲، دستگاه برای نگهداری و تعمیرات ارسال شده و هیچ تولیدی صورت نمی‌گیرد و از موجودی احتیاطی برای پاسخگویی به تقاضا استفاده شده، و نیز ممکن است با کمبود مواجه شود. در فاز ۳، ممکن است ۳ سناریو اتفاق بیفتد، سناریوی اول، پس

جدول (۱): خلاصه‌ای از مرور ادبیات

پژوهشگران	سیستم تک ماشینی یا چند ماشینی	هزینه کمبود		سیاست نگهداری و تعمیرات	در نظر گرفتن بافر
		از دست رفته	پس‌افت		
رزگ و همکاران [۱۷]	تک ماشینی	✓		مبتنی بر سن	✓
وانگ و همکاران [۱۸]	چند ماشینی	✓		مبتنی بر شرایط	
گایان و باگاجوی [۱۹]	چند ماشینی			مبتنی بر سن	
شویان گان و همکاران [۲۰]	چند ماشینی			مبتنی بر شرایط	✓
انیس جیراد و همکاران [۲۱]	چند ماشینی			مبتنی بر شرایط	
ایوهونگ ژانگ و جیانچاو زنگ [۲۲]	چند ماشینی			مبتنی بر شرایط	
[۲۳] لیلا جعفری و همکاران	چند ماشینی			مبتنی بر شرایط	
نابیل ناهاس و مصطفی نورلفاس [۲۴]	چند ماشینی			مبتنی بر شرایط	✓
کایکن کانگ و ولوسمی سابرامانیام [۲۵]	تک ماشینی			مبتنی بر شرایط	
پژوهش حاضر	تک ماشینی	✓	✓	مبتنی بر سن	✓

نمادهای مدل در ذیل ارائه شده است. در ادامه سناریوهای محتمل با توجه به حالات مختلف احتمالی مسئله ارائه شده است.

## ۲-۲- مدل هزینه کنترل موجودی

برای به‌دست آوردن مدل هزینه کنترل موجودی، همه سناریوهایی که ممکن است طی دوره تولید رخ دهند باید مورد بررسی قرار گیرند.

نمادها

هزینه موجودی یک واحد تولیدی در طول یک دوره زمانی	$C_s$
هزینه کمبود یک واحد محصول به علت تقاضای برآورده نشده در طول یک دوره زمانی	$C_l$
هزینه کمبود جبرانی	$\tilde{C}_l$
هزینه عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه	$C_{pm}$
هزینه عملیات نگهداری و تعمیرات اصلاحی	$C_{cm}$
تابع چگالی احتمال مربوط به زمان تا خرابی ماشین	$f(t)$
تابع توزیع تجمعی احتمال مربوط به زمان تا خرابی ماشین	$F(t)$
قابلیت اطمینان مربوط به دستگاه، $F(t) = 1 - R(t)$	$R(t)$
تابع نرخ خرابی لحظه‌ای ماشین	$r(t)$
متوسط زمان برای نگهداری و تعمیرات	$\mu$
انحراف معیار	$\delta$
لحظه خرابی ماشین	$\varepsilon$
مقدار تقاضا که به صورت احتمالی آورده شده است	$d$
مدت زمانی که ماشین تحت عملیات نگهداری و تعمیرات قرار می‌گیرد	TTR
مدت زمانی که ماشین به اندازه تقاضا تولید می‌کند	$T_1$
مدت زمانی که ماشین با نرخ $U_{max}$ تولید می‌کند	$T_2$
تابع چگالی احتمال مربوط به مدت زمان عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه	$g_p(t)$
تابع چگالی احتمال مربوط به مدت زمان عملیات نگهداری و تعمیرات اصلاحی	$g_c(t)$
تابع چگالی مربوط به جبران کمبود	$z(t)$
هزینه موجودی مورد انتظار	$\partial(A, h, m)$
هزینه نگهداری و تعمیرات	$\varphi(m)$
هزینه متوسط کل در واحد زمان که به صورت تابعی از سه متغیر تصمیم است.	$CT(A, H, m):$

۱-۲-۲- سناریوی ۱

موجودی و منطقه زیر نمودار محور زمان نشان‌دهنده هزینه کمبود. تقاضا دارای توزیع یکنواخت  $d \sim U[a, b]$  است.

سناریوی اول شامل وجود بافر به اندازه  $h$  در ابتدای دوره، سپس مواجه با کمبود و جبران آن و مجدداً ذخیره‌سازی بافر به اندازه  $h$  است. با توجه به شرح سناریو،  $TTR > \frac{h}{d}$  که نشان‌دهنده مواجه با کمبود و  $T_2 > X_1$  به معنای جبران کمبود و  $T_2 - X_1 = \frac{h}{(U_{max}-d)}$  است. شکل ۲، نشان‌دهنده سناریوی ۱ است.

$$LS_1(A, h) = C_s(h.T_1) + C_s\left(\frac{h^2}{2d}\right) + \tilde{C}_l(TTR.d - h) - h)^2 \cdot \frac{(U_{max} - l)}{2d(U_{max} - d - l)} + C_l(TTR.d - h) + C_s\left(\frac{h^2}{2(U_{max} - d)}\right) \quad (1)$$

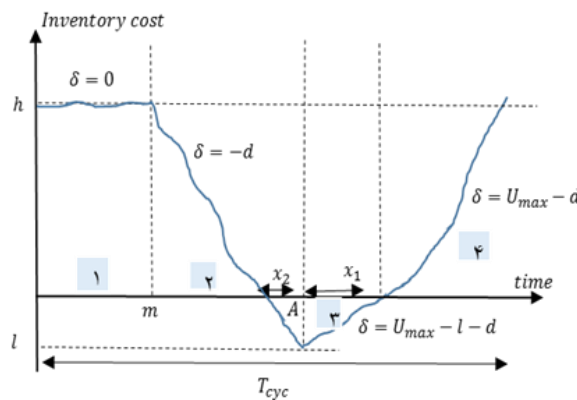
که در آن

$$x_1 = \frac{TTR.d - h}{U_{max} - d - l} \quad (2)$$

$$x_2 = \frac{TTR.d - h}{d} \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{TTR.d - h}{U_{max} - d - l} + \frac{TTR.d - h}{d} = (TTR.d - h) \left[ \frac{U_{max} - l}{d(U_{max} - d - l)} \right] \quad (4)$$

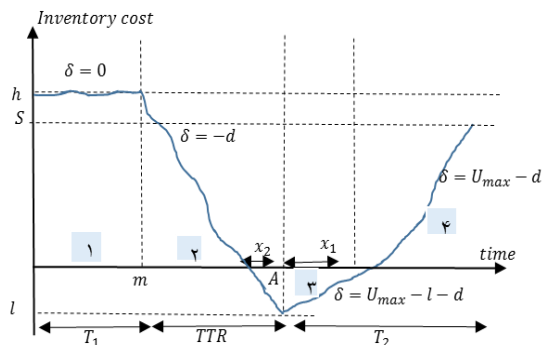
با جایگذاری معادله (۴)، در معادله (۱)، معادله (۵) به دست می‌آید.



شکل (۲): سناریوی ۱

به منظور محاسبه هزینه‌های موجودی برای سناریو ۱، باید مساحت ۱، ۲، ۳، ۴ محاسبه شود. منطقه بالای محور زمان نشان‌دهنده هزینه

با کمبود و جبران آن و خرابی ماشین قبل از ذخیره‌سازی بافر به اندازه  $h$  است. در این سناریو به اندازه  $S < h$  بافر ایجاد می‌شود. با توجه به شرح سناریو،  $TTR > \frac{h}{d}$  که نشان‌دهنده مواجهه با کمبود و  $T_2 > X_1$  به معنای جبران کمبود و  $T_2 - x_1 = \frac{h}{(U_{max}-d)}$  است. شکل ۳، نشان‌دهنده سناریوی ۲ است.



شکل (۳): سناریو ۲

$$LS_2(A, h) = C_s(h \cdot T_1) + C_s\left(\frac{h^2}{2d}\right) + \tilde{C}_l(TTR \cdot d - h)^2 \cdot \frac{(U_{max} - l)}{2d(U_{max} - d - l)} + C_l(TTR \cdot d - h) + C_s\left(\frac{S^2}{2(U_{max} - d)}\right) \quad (15)$$

$$LS_2(A, h) = C_s(h * T_1) + C_s\left(\frac{h^2}{2d}\right) + \tilde{C}_l(TTR^2 \cdot d^2 + h^2 - 2TTR \cdot h \cdot d) \cdot \frac{(U_{max} - l)}{2d(U_{max} - d - l)} + C_l(TTR \cdot d - h) + C_s\left(\frac{S^2}{2(U_{max} - d)}\right) \quad (16)$$

هزینه مورد انتظار برای سناریو ۲ از معادله (۱۷) به دست می‌آید:

$$E(LS_2(A, h)) = C_s(h \cdot E(T_1)) + C_s \int_a^b \frac{1}{b-a} \left(\frac{h^2}{2d}\right) d(d) + \tilde{C}_l \left( E(TTR^2) \cdot \int_a^b \frac{1}{b-a} d^2 d(d) + h^2 - 2E(TTR) \cdot h \cdot E(d) \right) \cdot \int_a^b \frac{1}{b-a} \frac{(U_{max} - l)}{2d(U_{max} - d - l)} d(d) + C_l(E(TTR) \cdot E(d) - h) + C_s \int_a^b \frac{1}{b-a} \left(\frac{S^2}{2(U_{max} - d)}\right) d(d) \quad (17)$$

برای محاسبه احتمال سناریو ۲، توابع زیر را تعریف شده‌اند:

$$ind(A > TTR + m) = \begin{cases} 1 & +m \\ 0 & \text{if } A < TTR \end{cases}$$

$$ind\left(TTR > \frac{h}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \frac{h}{d} \\ 0 & \text{if } TTR > \frac{h}{d} \end{cases}$$

$$LS_1(A, h) = C_s(h \cdot T_1) + SC_s\left(\frac{h^2}{2d}\right) + \tilde{C}_l(TTR^2 \cdot d^2 + h^2 - 2TTR \cdot h \cdot d) \cdot \frac{(U_{max} - l)}{2d(U_{max} - d - l)} + C_l(TTR \cdot d - h) + C_s\left(\frac{h^2}{2(U_{max} - d)}\right) \quad (5)$$

هزینه مورد انتظار برای سناریو ۱ از معادله (۶) به دست می‌آید:

$$E(LS_1(A, h)) = C_s(h \cdot E(T_1)) + C_s \int_a^b \frac{1}{b-a} \left(\frac{h^2}{2d}\right) d(d) + \tilde{C}_l \left( E(TTR^2) \cdot \int_a^b \frac{1}{b-a} d^2 d(d) + h^2 - 2E(TTR) \cdot h \cdot E(d) \right) \cdot \int_a^b \frac{1}{b-a} \frac{(U_{max} - l)}{2d(U_{max} - d - l)} d(d) + C_l(E(TTR) \cdot E(d) - h) + C_s \int_a^b \frac{1}{b-a} \left(\frac{h^2}{2(U_{max} - d)}\right) d(d) \quad (6)$$

که در آن:

$$E(T_1) = \int_0^m R(t) dt \quad (7)$$

$$E(TTR) = \mu_a = \mu_p R(m) + \mu_c F(m) \quad (8)$$

$$E(TTR^2) = \sigma^2 + (\mu_a)^2 \quad (9)$$

$$E(d) = \frac{a+b}{2} \quad (10)$$

برای محاسبه احتمال سناریو ۱، توابع زیر تعریف شده‌اند:

$$p(s_1) = ind(A > TTR + m) \cdot p(A > TTR + m) \cdot \left(1 - G_d\left(\frac{h}{d}\right)\right) \cdot ind\left(TTR > \frac{h}{d}\right) \cdot P\left(TTR > \frac{h}{d}\right) \cdot Z(t) \quad (11)$$

$$p(s_1) = ind(A > TTR + m) \cdot R(TTR + m) \cdot \left(1 - G_d\left(\frac{h}{d}\right)\right) \cdot ind\left(TTR > \frac{h}{d}\right) \cdot R\left(TTR > \frac{h}{d}\right) \cdot Z(t) \quad (12)$$

$$G_d\left(\frac{h}{d}\right) = \int_0^{\frac{h}{d}} g_d(u) du \quad (13)$$

$$G_d(u) = g_p(u) \cdot R(m) + g_c(u) \cdot F(m) \quad (14)$$

$$ind\left(TTR > \frac{h}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \frac{h}{d} \\ 0 & \text{if } TTR > \frac{h}{d} \end{cases} \quad (15)$$

$$ind(A > TTR + m) = \begin{cases} 1 & +m \\ 0 & \text{if } A < TTR \end{cases} \quad (16)$$

### ۲-۲-۲- سناریوی ۲

سناریوی دوم شامل وجود بافر به اندازه  $h$  در ابتدای دوره، سپس مواجهه

$$S_{ACD} - S_{OED} = \frac{TTR^2 \cdot d^2 + h^2 - 2TTR \cdot d \cdot h}{2(U_{max} - d - l)} \quad (۲۲)$$

$$- \frac{(TTR \cdot d - h)^2}{2(U_{max} - d - l)}$$

$$+ T_2^2 \frac{(U_{max} - d - l)}{2}$$

$$- (TTR \cdot d - h)T_2$$

$$= T_2 \cdot TTR \cdot d - T_2 h$$

$$- T_2^2 \frac{(U_{max} - d - l)}{2}$$

هزینه موجودی مربوط به این سناریو:

$$LS_3(A, h) \quad (۲۳)$$

$$= C_S(h * T_1) + C_S \left( \frac{h^2}{2d} \right)$$

$$+ \tilde{C}_l (TTR \cdot d - h)^2 \cdot \frac{(U_{max} - l)}{2d(U_{max} - d - l)}$$

$$+ C_l (TTR \cdot d - h) + \tilde{C}_l (T_2 \cdot TTR \cdot d - T_2)$$

$$- (T_2^2 \frac{(U_{max} - d - l)}{2}) \tilde{C}_l$$

هزینه مورد انتظار برای سناریو ۳ از معادله (۲۴) به دست می‌آید:

$$E(LS_3(A, h)) = C_S(h \cdot E(T_1)) +$$

$$C_S \int_a^b \frac{1}{b-a} \left( \frac{h^2}{2d} \right) d(d)$$

$$+ \tilde{C}_l \left( E(TTR^2) \cdot \int_a^b \frac{1}{b-a} d^2 d(d) + h^2 \right.$$

$$\left. - 2E(TTR) \cdot h \cdot E(d) \right) \cdot \int_a^b \frac{1}{b-a} \frac{(U_{max} - l)}{2d(U_{max} - d - l)} d(d)$$

$$+ C_l (E(TTR) \cdot E(d) - h) + \tilde{C}_l (E(T_2 \cdot TTR) \cdot E(d)$$

$$- E(T_2)) - (E(T_2^2))$$

$$\int_a^b \frac{1}{b-a} \frac{(U_{max} - d - l)}{2} \tilde{C}_l d(d)$$

برای محاسبه احتمال سناریو ۳، توابع زیر را تعریف شده‌اند:

$$ind(A > TTR + m) = \begin{cases} 1 & + m \\ 0 & \text{if } A < TTR \end{cases}$$

$$ind\left(TTR > \frac{h}{d}\right) = \begin{cases} 1 & \frac{h}{d} \\ 0 & \text{if } TTR > \frac{h}{d} \end{cases}$$

$$p(s_2) = ind(A > TTR + m) \cdot p(A > TTR + m) \cdot \left( 1 - G_d\left(\frac{h}{d}\right) \right) \cdot ind\left(TTR > \frac{h}{d}\right) \cdot P\left(TTR > \frac{h}{d}\right) * (1 - Z(t)) \quad (۲۵)$$

۳-۲-۲ کل هزینه موجودی مورد انتظار

پس از محاسبه میانگین هزینه موجودی و احتمال وقوع هر سناریو، مجموع موجودی مورد انتظار را به دست آوریم. کل هزینه مورد انتظار موجودی در واحد زمان، براساس معادله (۲۷) به دست آمده است.

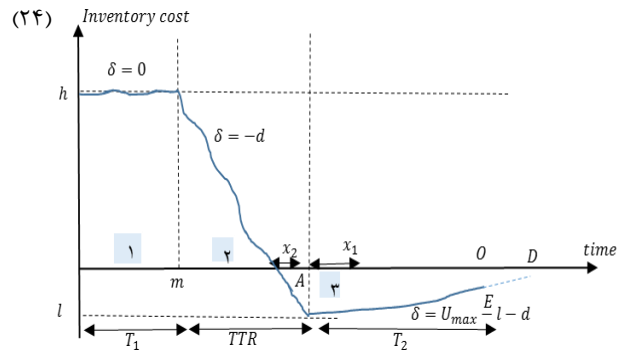
$$\partial(A, h, m) = \sum_{i=1}^3 (p(s_i) E(L(s_i))) \quad (۲۶)$$

$$p(s_2) = ind(A > TTR + m) \cdot p(A > TTR + m) \cdot \left( 1 - G_d\left(\frac{h}{d}\right) \right) \cdot ind\left(TTR > \frac{h}{d}\right) \cdot P\left(TTR > \frac{h}{d}\right) \cdot Z(t) \quad (۱۸)$$

$$p(s_2) = ind(A > TTR + m) \cdot R(TTR + m) \cdot \left( 1 - G_d\left(\frac{h}{d}\right) \right) \cdot ind\left(TTR > \frac{h}{d}\right) \cdot R\left(TTR > \frac{h}{d}\right) \cdot Z(t) \quad (۱۹)$$

۳-۲-۳ سناریوی ۳

سناریو ۳ برای مواردی است که دوره تولید قبل از شروع ذخیره‌سازی، و حتی قبل از جبران کمبود، خرابی اتفاق می‌افتد. با توجه به شرح سناریو،  $TTR > \frac{h}{d}$  که نشان دهنده مواجه با کمبود و  $x_1 > T_2$  شکل ۴، نشان دهنده سناریوی ۳ است.



اثبات ۱: برای به دست آوردن مساحت ACEO

$$S_{ACD} = \frac{(TTR \cdot d - h)^2}{2(U_{max} - d - l)} \quad (۲۰)$$

$$= \frac{TTR^2 \cdot d^2 + h^2 - 2TTR \cdot d \cdot h}{2(U_{max} - d - l)}$$

$$S_{OED} = \frac{OE(x_1 - T_2)}{2}$$

$$= \frac{(U_{max} - d - l)(x_1 - T_2)^2}{2}$$

$$= \frac{(U_{max} - d - l) \left( \frac{TTR \cdot d - h}{U_{max} - d - l} - T_2 \right)^2}{2} \quad (۲۱)$$

$$= \frac{(U_{max} - d - l)}{2} \left[ \left( \frac{TTR \cdot d - h}{U_{max} - d - l} \right)^2 + T_2^2 - 2 \left( \frac{TTR \cdot d - h}{U_{max} - d - l} \right) T \right]$$

منظور، با توجه به حداقل سطح دسترس پذیری مورد نیاز  $K$ ، حالت‌های زیر باید در نظر گرفته شوند.

حالت ۱:  $K \in [0, SA(+\infty)] \rightarrow [m_1, m_2] = [m_k, +\infty]$

حالت ۲:  $K \in [SA(+\infty), SA^*] \rightarrow [m_1, m_2] = [m_1, m_2]$

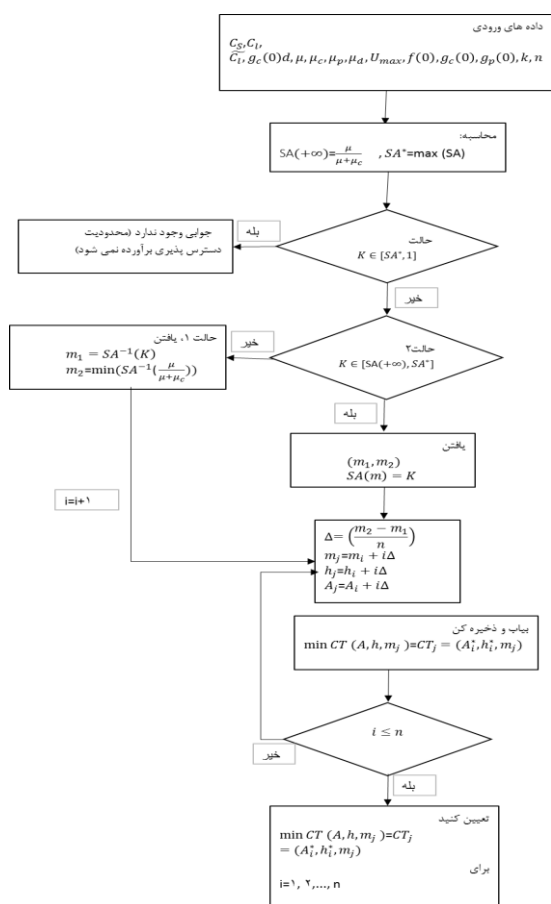
حالت ۳:  $K \in [SA^*, 1] \rightarrow [m_1, m_2]$  وجود ندارد

که در این رابطه  $SA^*$  بیشینه سطح دسترس پذیری را نشان می‌دهد و همچنین

$$SA(+\infty) = \lim_{m \rightarrow +\infty} SA(m) = \frac{\mu}{\mu + \mu_c}$$

این روش با استفاده از نرم‌افزار MATLAB اجرا شده است.

مطابق شکل ۵، ۳ متغیر تصمیم شامل زمان شروع ذخیره‌سازی، میزان ذخیره‌سازی و زمان شروع عملیات نگهداری و تعمیرات، در مدل ارائه شده به صورت یک سیاست توأم مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدای الگوریتم، ابتدا مقدار حداکثر سطح دسترس پذیری، به دست آمده و سپس برای هر سه متغیر تصمیم، سه بازه مجزا در نظر گرفته، در طی هر تکرار به صورت تصادفی عددی‌هایی از آن بازه‌ها انتخاب شده و مسئله را اجرا می‌گردد و این کار به تعداد تکرارهایی که در الگوریتم تعیین شده اجرا و در نهایت سناریوی محتمل انتخاب می‌شود.



شکل (۵): الگوریتم عددی برای پیدا کردن استراتژی بهینه

$$\bar{\partial}(A, h, m) = \frac{\partial(A, h, m)}{E(T_{cyc})} \quad (27)$$

$$E(T_{cyc}) = \int_0^m R(u)d(u) + \mu_d \quad (28)$$

$$CT(A, h, m) = \bar{\partial}(A, h, m) + \varphi(m) \quad (29)$$

$$CT(A, h, m) = \frac{\sum_{i=1}^3 (p(s_i)E(L(s_i)) + C_{cm}F(m) + C_{pm}R(m))}{\int_0^m R(u)d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m)} \quad (30)$$

### ۴-۲- متوسط هزینه کل در واحد زمان

میانگین هزینه کل واحد در واحد زمان، مجموع هزینه‌های واحد مربوط به نگهداری و تعمیرات و کنترل موجودی است. این هزینه کل مورد انتظار به صورت تابعی از سه متغیر تصمیم‌گیری  $m, h$  و  $A$  بیان می‌شود [۱۳].

### ۳- بهینه‌سازی

هدف از مدل ارائه شده، یافتن مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم به منظور کمینه‌سازی کل هزینه متوسط در واحد زمان و با توجه به محدودیت حداقل سطح دسترس پذیری ( $K$ ) است.

$$Min Z = CT(m, A, h) \quad (31)$$

$$s. t: SA(m) \geq Y \quad (32)$$

$$(m, A, h) \in (R^+, R^+, R^+) \quad (33)$$

سطح دسترس پذیری واحد تولیدی ارائه شده با توجه به سیاست نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه براساس دوره عمر متوسط، طبق رابطه (۳۴) محاسبه می‌شود.

$$SA(m) = \frac{\int_0^m R(u)d(u) + \int_A^m R(u)d(u)}{\int_0^m R(u)d(u) + \int_A^m R(u)d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m)} \quad (34)$$

برای به دست آوردن ماکزیمم سطح دسترس پذیری مطابق پیوست (۱)، عمل شده است.

$$r(m) = \frac{f(m)}{1 - F(m)} \quad (35)$$

### ۴- مثال عددی و تحلیل حساسیت

#### ۴-۱- الگوریتم حل عددی

رزگ<sup>۱</sup> و همکاران [۱۷] یک روش عددی تکرارشونده به منظور تعیین بازه زمانی  $[m_1, m_2]$  و یافتن مقادیر بهینه  $A^*$ ،  $h^*$  و  $m^*$  را کمینه می‌سازد، ارائه کرده است [۱۷]. در این مقاله، این الگوریتم توسعه داده و برای مقادیر  $A^*$  و  $h^*$  نیز بازه  $m$  در نظر گرفته شده است. شکل ۵، روش حل را به طور کامل نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن رفتار تابع سطح دسترس پذیری به ویژه تحدد توابع با نرخ خرابی افزایشی، ابتدا در صورت وجود، بازه زمانی  $[m_1, m_2]$  را که به ازای محدودیت دسترس پذیری برآورده می‌گردد، یافته می‌شود. به این

۴-۲- مثال عددی

برای حل مدل پیشنهادی با استفاده از الگوریتم پیشنهادی، مثال عددی در نظر گرفته شده است که با حل آن می‌توان بهترین استراتژی را شناسایی کرد. به این منظور، پارامترها به این گونه تعریف می‌شوند

$$C_{pm} = 300, C_{cm} = 2000, C_1 = 250, \tilde{C}_1 = 100, C_s = 2$$

هزینه‌ها:

$$d \sim U[0.5, 1.5]$$

تقاضا:

بیشینه ظرفیت تولید:  $U_{max} = 1$   
 تابع توزیع زمان تا خرابی برای واحد تولید  $F(t)$   
 توزیع ویبول با پارامتر شکلی ۲ و پارامتر مقیاس ۱۰۰ که منجر به مقدار عمر متوسط  $\mu = ۸/۸۶$  واحد زمانی می‌شود.

تابع توزیع زمان تعمیر:  $g_c(t)$  توزیع لگنرمال با میانگین  $\mu_c = ۲۰$  واحد زمانی و انحراف معیار  $\sigma_c = ۲$  واحد زمانی  
 تابع توزیع مدت زمان نگهداری و تعمیر:  $g_p(t)$  توزیع لگنرمال با میانگین  $\mu_p = ۱۰$  واحد زمانی و انحراف معیار  $\sigma_c = 1.5$  واحد زمانی  
 پیشگیرانه:

تابع توزیع مربوط به جبران کمبود  $Z(t)$  توزیع ویبول با پارامتر شکلی ۲ و پارامتر مقیاس ۱۰۰ که منجر به مقدار عمر متوسط  $\mu = ۸/۸۶$  واحد زمانی می‌شود.

حداقل سطح دسترس پذیری مورد نیاز:  $K = ۰.۷۰$

برای سطح دسترس پذیری  $K = ۰.۷۰$  محدوده  $m$  برابر با  $[۳۷, ۷۲] = [m_1, m_2]$  است.

استراتژی بهینه در جدول ۲ نشان داده شده است؛ و مقادیر بهینه به دست آمده با توجه به رخدادهای هر یک از سناریوها در جدول ۳، تحلیل شده‌اند.

جدول (۲): مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم  $C_S = ۲$

m*	A	h*	CT*
۳۸	۳۹/۴۶	۳۰	۱۲/۱۴

جدول (۳): احتمال رخداد هر سناریو به ازای سیاست بهینه

Ps1	Ps2	Ps3
۰/۳۳۳	۰/۶۶۷	۰

جدول ۳ نشان می‌دهد که با توجه به مقادیر عددی پیشنهادی سناریوی ۲ و سپس سناریوی ۱، محتمل‌ترین سناریوها هستند. سناریوی ۲، سناریویی بود که سیستم پس از جبران کمبود شروع به ذخیره‌سازی بافر می‌کرد ولی سطح بافر تا  $h$  پر نشده و سیستم دچار خرابی می‌شد و برای عملیات نگهداری و تعمیرات ارسال می‌شد؛ بنابراین استراتژی بهینه به دست آمده، دستگاه با سطح  $h$  شروع به کار می‌کند، سپس در زمان ۳۸، نگهداری و تعمیرات را انجام داده و از زمان ۳۹/۴۶ شروع به جبران کمبود و ذخیره‌سازی برای بافر می‌کند. با تغییر هزینه از  $C_S = ۲$  به  $C_S = ۱$ ، نتایج جدول ۴ و ۵ به دست می‌آید.

جدول (۴): مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم  $C_S = ۱$

m*	A	h*	CT*
۱۶	۳۳/۲۹	۲۰/۱۵	۹/۲۸

جدول (۵): احتمال رخداد هر سناریو به ازای سیاست بهینه

Ps1	Ps2	Ps3
۰،۲۷	۰،۷۲۹	۰،۰۰۱

با توجه به نتایج جدول ۵، می‌توان به این نتیجه رسید که کاهش هزینه از ۲ به ۱ مقدار هزینه کل کاهش می‌یابد ولی تأثیری روی سناریوی محتمل ندارد و در هر دو حالت سناریوی ۲، سناریوی محتمل است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل ریاضی و رویکرد عددی ارائه شده است که به طور هم‌زمان استراتژی نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه و کنترل موجودی را در سیستم تولیدی با نرخ خرابی افزایشی در نظر می‌گیرد. تصمیم‌گیرنده قادر است با استفاده از یک ابزار تصمیم‌گیری و با توجه به مقادیر دلخواه از ظرفیت تولید، تقاضا، هزینه‌های نگهداری و تعمیرات، متغیرهای تصمیم را طوری بیابد که هزینه متوسط کل در واحد زمان کمینه شده و محدودیت حداقل مقدار سطح دسترس‌پذیری مورد نیاز برآورده گردد. این متغیرهای تصمیم عبارتند از زمان شروع ایجاد بافر، اندازه ذخیره احتیاطی و زمانی که ماشین برای اجرای عملیات نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه باید متوقف شود. در نهایت یک مثال عددی برای بررسی رویکرد حل پیشنهادی مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که سیاست‌های نگهداری و تعمیرات پیشگیرانه تأثیر چشمگیری در کاهش هزینه‌ها در سیستم‌های تولیدی دارد. در واقع، نتایج نشان می‌دهد که سیاست بهینه مطلوب به‌طور کلی نسبت به هزینه حساس است؛ و سناریوی ۲ به‌عنوان سناریوی محتمل انتخاب می‌شود. همچنین بررسی حالات مختلف تابع توزیع تقاضا و همچنین اثر سایر توابع احتمالی روی نتایج مدل و همچنین بررسی اثر میزان محصولات خرابی در مدل در اثر افت عملکرد دستگاه می‌تواند زمینه‌ای برای تحقیقات آتی باشد.

مراجع

[1] Chen, YC., (2013). "An optimal production and inspection strategy with preventive maintenance error and rework", J Manuf Syst, 32(1): 99-106.  
 [2] Guo, W., Jin, J., Hu, SJ., (2013). "Allocation of maintenance resources in mixed model assembly systems", J Manuf Syst, 32(3): 473-9.  
 [3] Ghodrtnama, A., Rabbani, M., Tavakkoli-Moghaddam, R., Baboli, A., (2010). "Solving a single-machine scheduling problem with maintenance, job deterioration and learning effect by simulated annealing", J Manuf Syst, 29(1): 1-9.  
 [4] Ba, K., Dellagi, S., Rezg, N., (2014). "Green management of spare parts for an integrated optimal



- [16] Olde Keizer, MCA., Flapper, SDP., Teunter, RH., (2017). "Condition-based maintenance policies for systems with multiple dependent components: a review", *Eur J Oper Res*, 261: 405–20.
- [17] Rezg, N., Dellagi, S., & Chelbi, A., (2008). "Joint optimal inventory control and preventive maintenance policy", *International Journal of Production Research*, 46:19, 5349-5365, DOI: 10.1080/00207540802273942.
- [18] Qinminga, L., Ming, D., Chen, F.F., Wenyuana, L., Chunming, Y., (2019). "Single-machine based joint optimization of predictive maintenance planning and production scheduling", *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*, Article in press.
- [19] Nguyen, D.Q., Bagajewicz, M., (2009). "Optimization of preventive maintenance in chemical process plants", Working Paper.
- [20] Gan, Sh., Zhang, Zh., Zhou, Y., Shi, J., (2015). "Joint optimization of maintenance, buffer, and spare parts for a production system", *Applied Mathematical Modelling*.
- [21] Mjirda, A., Benmansour, R., Allaoui, H., Goncalves, G., (2016). "On the joint optimization of the periodic preventive maintenance and the spare parts inventory problem", *IFAC-PapersOnLine* 49-12 881–885.
- [22] Zhang, X., Zeng, J., (2017). "Joint optimization of condition-based opportunistic maintenance and spare parts provisioning policy in multiunit systems", *European Journal of Operational Research*, doi: 10.1016/j.ejor.2017.03.019.
- [23] Jafari, L., Naderkhani, F., & Makis V., (2017). "Joint optimization of maintenance policy and inspection interval for a multi-unit series system using proportional hazards model", *Journal of the Operational Research Society*, doi:10.1057/s41274-016-0160-9.
- [24] Nahas, N., & Nourelfath, M., (2017). "Joint optimization of maintenance, buffers and machines in manufacturing lines", *Engineering Optimization*, doi: 10.1080/0305215X.2017.1299716.
- [25] Kang, K., Subramaniam, V., (2018). "Integrated control policy of production and preventive maintenance for a deteriorating manufacturing system", *Computers & Industrial Engineering* 118: 266–277.
- [26] Dhoub, K., Gharbi, A., & Aziza, M. B. (2012). Joint optimal production control/preventive maintenance policy for imperfect process manufacturing cell. *International Journal of Production Economics*, 137(1), 126-136
- maintenance and production policy", *IEEE Int Conf Autom Sci Eng*, 359:364.
- [5] Van Jaarsveld, W., Dekker, R., (2011). "Spare parts stock control for redundant systems using reliability centered maintenance data", *Reliab Eng Syst Saf*, 96: 1576–86.
- [6] Jin, T., Tian, Z., Xie, M., (2015). "A game-theoretical approach for optimizing maintenance, spares and service capacity in performance contracting", *Int J Prod Econ*, 161: 31-43.
- [7] Falkner, C., (1968). "Jointly optimal inventory and maintenance policies for stochastically failing equipment", *Oper Res*, 16(3): 587–601.
- [8] Kaio, N., Osaki, S., (1978). "Optimum ordering policies with lead time for an operating unit in preventive maintenance", *IEEE Trans Reliab*, 27(4): 270-1.
- [9] Sheikhalishahi, M., (2014). "An integrated simulation data envelopment analysis approach for maintenance activities planning", *Int J Comput Integr Manuf* 27(9): 858-868.
- [10] Dhoub, K., Gharbi, A., & Aziza, M. B. (2012). Joint optimal production control/preventive maintenance policy for imperfect process manufacturing cell. *International Journal of Production Economics*, 137(1): 126-136.
- [11] Pan, E., Liao, W., & Xi, L. (2012). A single machine-based scheduling optimisation model integrated with preventive maintenance policy for maximising the availability. *International journal of industrial and systems engineering*, 10(4): 451-469.
- [12] Polotski, V., Kenne, J. P., & Gharbi, A. (2019). Joint production and maintenance optimization in flexible hybrid Manufacturing–Remanufacturing systems under age-dependent deterioration. *International Journal of Production Economics*, 216, 239-254.
- [13] La Fata, C. M., & Passannanti, G. (2017). A simulated annealing-based approach for the joint optimization of production/inventory and preventive maintenance policies. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 91(9-12), 3899-3909.
- [14] Panagiotidou, S., (2014). "Joint optimization of spare parts ordering and maintenance policies for multiple identical items subject to silent failures", *Eur J Oper Res*, 235(1): 300–14.
- [15] Alaswad, S., Xiang, Y., (2017). "A review on condition-based maintenance optimisation models for stochastically deteriorating system", *Reliabil Eng Syst Saf*, 157: 54–63.

پیوست ۱

اثبات رابطه (۳۴):

(۳۶)

$$\begin{aligned}
 SA'_{m=m^*} &= \frac{d(SA)}{dm} \\
 &= \frac{(R(m) + R(m)) \left[ \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m) \right]}{\left[ \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m) \right]^2} \\
 &\quad - \frac{\left[ \left( \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) \right) \right] (2R(m) + \mu_c f(m) - \mu_p f(m))}{\left[ \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m) \right]^2} \\
 &= \frac{(2R(m)) \left[ \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m) \right]}{\left[ \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m) \right]^2} \\
 &\quad - \frac{\left[ \left( \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) \right) \right] (2R(m) + f(m)(\mu_c - \mu_p))}{\left[ \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m) \right]^2} = 0 \\
 (2R(m)) &\left[ \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m) \right] \\
 &= \left[ \left( \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) \right) \right] (2R(m) + f(m)(\mu_c - \mu_p)) \\
 \text{Denominator} &= \left[ \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) + \mu_p R(m) + \mu_c F(m) \right] \\
 &= \frac{\left[ \left( \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) \right) \right] (2R(m) + f(m)(\mu_c - \mu_p))}{(2R(m))} \\
 SA(m^*) &= \frac{\left[ \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) \right]}{\frac{\left[ \left( \int_0^m R(u) d(u) + \int_A^m R(u) d(u) \right) \right] (2R(m) + f(m)(\mu_c - \mu_p))}{(2R(m))}} \\
 &= \frac{1}{\left( 1 + \frac{f(m)(\mu_c - \mu_p)}{1 - F(m)} \right)} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{r(m^*)(\mu_c - \mu_p)}{2} \right)}
 \end{aligned}$$



DOI: 10.22084/ier.2019.19543.1870

## Joint Optimization of Maintenance and Production Scheduling with Considering the Back of Order and Probabilistic Demand

S. Babaeimorad<sup>1</sup>, P. Fattahi<sup>2\*</sup>, H. Bagheri<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> Department of Industrial Engineering, Alzahra University, Tehran, Iran

<sup>3</sup> Department of Industrial Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

### ARTICLE INFO

#### *Article history:*

Received 4 February 2019

Accepted 3 September 2019

#### *Keywords:*

Maintenance  
Joint Optimization  
Back of Order  
Inventory control  
Production scheduling

### ABSTRACT

Joint optimal production scheduling and preventive maintenance are interested in many research and has a potential impact on the performance of manufacturing systems. In addition, due to the uncertainty in demand, maintenance and inventory shortages are almost inevitable. Therefore, determining the optimal amount of buffer level, the time required to create additional storage space to address the loss, and the maintenance time is a concern for many manufacturers. Paper studied a single-machine production unit with incremental failure rates. The system begins with a  $h$ -sized inventory stored in period  $A$  and stops as soon as it reaches period  $m$ , whichever occurs earlier, and is subject to maintenance. The buffer inventory during this period. A mathematical model and a numerical approach are used to obtain optimal values of variables simultaneously to minimize the average total cost and satisfy the access constraint. The results show that, in the presented model, the total cost and decision variables are highly sensitive to the inventory holding cost but not also for the occurred scenario.

\* Corresponding author. P. Fattahi

Tel.: 02185692191; E-mail address: p.fattahi@alzahra.ac.i