نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید

ISSN: 2345-2269

سال ششم، شماره سیزدهم، پاییز و زمستان ۱۳۹۷، صفحه ۱۳۹-۱۴۹

www.ier.basu.ac.ir

DOI: 10.22084/ier.2019.15262.1707

ارائه الگوریتم شاخه و برش برای حل مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی با استفاده از نامعادلات معتبر

جواد بهنامیان [۱،*]، فاطمه کمیجانی [۲]

۱. دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران.

۲. کارشناسی ارشد، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۶/۰۹/۲۹

پذیرش ۱۳۹۷/۱۱/۱۶

کلمات کلیدی:

زمان‌بندی

مسئله تولید کارگاهی

الگوریتم شاخه و برش

نامعادلات معتبر

خلاصه

در این مقاله مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی در نظر گرفته شده که در عین کاربردی بودن آن به عنوان یکی از مسائل پیچیده در مبحث بهینه‌سازی ترکیبیاتی مطرح بوده و این امر باعث توجه روز افزون محققین به این مسئله شده است. در این مسئله با فرض وجود تعدادی کارگاه، تعداد کار بایستی با مسیر تولیدی که از قبل معلوم است در این کارگاه‌ها پردازش شوند. به منظور حل این مسئله، در این مقاله، ابتدا مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی به‌صورت برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط مدل گردیده است. سپس با توجه به محدودیت حل مسئله به‌صورت دقیق با استفاده از این مدل، روش برش سطحی به منظور ایجاد نامعادلاتی که برای مسئله معتبرند در قالب الگوریتم شاخه و برش پیشنهاد گردیده است. هدف از اضافه کردن این مجموعه از نامعادلات، ایجاد کران پایینی است که در عین حال که جواب‌های شدنی توسط آن‌ها حذف نمی‌شود، باعث تسریع حل در قالب الگوریتم شاخه و برش می‌شود. برای حل مسئله به‌صورت بهینه، نتایج نشان می‌دهد که حدود پایین ایجاد شده توسط مدل مجدداً فرموله شده، قوی‌تر از حدود پایین ایجاد شده توسط مدل اصلی آزاد شده می‌باشد.

۱- مقدمه

زمان‌بندی با تخصیص کارها و فعالیت‌ها به منابع و ماشین‌آلات و تعیین توالی کارهای تخصیص یافته به هر یک از منابع و ماشین‌آلات، سر و کار دارد. تعیین توالی عملیات با تلاش‌های هنری گانت[۱] از ابتدای قرن نوزدهم به عنوان موضوعی مهم وارد صنعت شد. در فضای رقابتی امروز با توجه به افزایش روزافزون قدرت مشتریان، ارائه برنامه زمان‌بندی مناسب برای هر یک از سازمان‌های تولیدی و خدماتی امری اجتناب ناپذیر است؛ هریک از سازمان‌های تولیدی و خدماتی به منظور رسیدن به اهداف خود و کسب سهم مناسب از بازار مشتریان خود، در تلاش‌اند تا به بهترین شکل، تخصیص و توالی فعالیت‌های خود را تعیین کنند.

مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی به عنوان یکی از مهم‌ترین زیر مجموعه‌های مسائل زمان‌بندی، شامل مجموعه‌ای از کارهاست که بایستی روی مجموعه‌ای از ماشین‌ها زمان‌بندی شود به‌طوری‌که هر کار باید به ترتیبی از پیش تعین شده پردازش خاصی روی هر ماشین داشته باشد. این مسئله نه تنها Np-hard[۲] است بلکه از نظر اجرایی دارای کاربردهای واقعی زیادی بوده و نمونه کلی‌تری از مسئله زمان‌بندی جریان کارگاهی است. مشکل غیرقابل حل بودن این مسئله در زمان معقول نیز یکی از دلایلی است که این مسئله مورد توجه محققین زیادی در زمینه بهینه‌سازی قرار گرفته است. به

* نویسنده مسئول: جواد بهنامیان

تلفن: ۳۸۲۹۲۵۰۵-۰۸۱؛ پست الکترونیکی: behnamian@basu.ac.ir

1. Henry Gantt
2. Non-deterministic polynomial-time hard

عنوان یک مثال، به دلیل مشکلات محاسباتی، نمود خاصی از مسئله که شامل ۱۰ کار و ۱۰ ماشین که در کتاب موث و تامسون[1] [۱] در سال ۱۹۶۳ مدل شده بود به مدت ۲۰ سال به‌صورت غیرقابل حل باقی ماند. این نمود برای اولین بار در سال ۱۹۸۵ توسط الگوریتم کارلیر و پنسون[2] [۲] که بهینگی را تضمین نمی‌کرد حل گشت و از آن پس یک روند بهبود الگوریتم‌ها برای حل آن ایجاد شد به‌طوری‌که بهبود الگویتم حل در سال ۲۰۱۳ توسط آشور[3] و همکاران [۳] به اوج خود رسید.

هدف از این پژوهش، توسعه روشی مؤثر برای ایجاد کران پایین برای مسئله زمان‌بندی در قالب الگوریتم‌های شاخه و برش است به‌طوری‌که زمان حل آن را بهبود بخشد. به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت که این روش سعی دارد با ایجاد کران پایینی با اضافه کردن مجموعه‌ای از نامعادلات با نام نامعادلات معتبر، در عین حال که جواب‌های شدنی را حذف نمی‌کند روند حل روش شاخه و کران[4] که مشکل اساسی آن‌ها کندی است تسریع نماید. در حقیقت روش ارائه شده پس از ایجاد نامعادلات معتبر و کران‌های پایین، سعی دارد با استفاده از آنها در روش شاخه و کران زمان حل را کاهش و در نتیجه نمودهای بزرگ‌تری از مسئله را حل نماید.

ادامه مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲ ادبیات نامعادلات معتبر و ادبیات زمان‌بندی تولید کارگاهی و در بخش ۳ تعریف و مدل بندی مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی انجام می‌گیرد. در بخش ۴ دو نامعادله معتبر و چگونگی محاسبات ارائه شده است. در بخش ۵ الگوریتم شاخه و کران پایه معرفی می‌شود و در نهایت نیز نتایج عددی ارائه می‌شود. نتیجه‌گیری و مطالعات آتی نیز در بخش ۶ ارائه شده است.

۲- ادبیات موضوع

در این بخش پیشینه تحقیق در دو بخش ادبیات نامعادلات معتبر و ادبیات زمان‌بندی تولید کارگاهی ارائه گردیده است.

۲-۱- نامعادلات معتبر

کاربچ و هوری[5] [۴] مدل‌های برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط را برای مسئله زمان‌بندی جریان کارگاهی دو ماشینی با هدف حداقل سازی دیرکرد ارائه دادند. همچنین نامعادلات معتبری را با هدف تنگ کردن فضای حل پیشنهاد دادند. نتایج محاسباتی بیانگر اثربخشی مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط پیشنهادی می‌باشد. ژانگ[6] و همکاران [۵]، الگوریتم برنامه نویسی پویا با زمان‌های چند جمله‌ای را برای مسئله تعیین اندازه دسته تولید با تقاضای متوسط ارائه دادند. سپس خانواده‌ای از نامعادلات معتبر را برای مسئله پیشنهاد دادند که نشان دهنده قدرت خود می‌باشد. در نهایت جواب‌های تولیدی نشان دهنده اثربخشی الگوریتم شاخه و برش با استفاده از نامعادلات پیشنهادی می‌باشد. کیانفر[7] [۶] نامعادلات معتبری را برای سه زیرساخت مسئله کوله پشتی عدد صحیح مختلط با ضرایب غیر منفی دلخواه معرفی کرد.

دلا کروچی[8] و همکاران [۷] مسئله زمان‌بندی تک ماشینی را با زمان‌های آزادی در نظر گرفتند. آن‌ها الگوریتم جستجوی همسایگی را در مقیاس بزرگ بر اساس برنامه‌ریزی ریاضی ارائه دادند، که این الگوریتم‌های ابتکاری از فرمولاسیون زمان تکمیل وابسته به موقعیت از مسئله برای اضافه کردن نامعادلات معتبر استفاده می‌کنند. پسان و نرون[9] [۸] مسئله زمان‌بندی ماشین‌آلات موازی را بررسی کردند و چندین کران پایین را برای آن پیشنهاد دادند. نتایج محاسباتی نشان دهنده اثربخشی کران‌های پایین پیشنهادی می‌باشد. گیکوئل و مینوکس[10] [۹] مسئله زمان‌بندی و مسئله تعیین اندازه دسته تولید چند محصوله را با توالی وابسته به تغییرات هزینه را بررسی کردند. آن‌ها با هدف توسعه رویکرد جواب‌های دقیق از رویکرد شاخه و برش برای مسئله بهینه‌سازی ترکیبیاتی فوق استفاده کردند. برای دستیابی به این هدف، خانواده‌ای از نامعادلات معتبر را با در نظر گرفتن تناقض بین محصولات مختلف که به طور هم‌زمان نیازمند تولید روی منابع هستند را پیشنهاد دادند. سپس الگوریتم ابتکاری و دقیقی را بر اساس الگوریتم تولید برش سطحی را ارائه دادند. در نهایت، نتایج محاسباتی بیانگر سودمندی نامعادلات در تقویت فرمولاسیون مختلط عدد صحیح و خطی مسئله و کاهش زمان محاسباتی کل می‌باشد. بهدانی و اسمیت[11] [۱۰] مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط را برای مسئله فروشنده دوره گرد اقلیدسی یا مسئله فروشنده دوره گرد به‌اندازه کافی نزدیک فرموله کردند. پس از حل نامعادلات معتبری که موجب بهبود کران و قابلیت حل این فرمولاسیون می‌شود را پیشنهاد کردند.

لووکس[12] و همکاران [۱۱] مسئله مسیریابی وسیله نقلیه کلاسیک را که در آن ظرفیت خودرو ثابت نیست را در نظر گرفتند. ابتدا مسئله را با رویکرد انتخاب ظرفیت و بهترین مسیر برای حداقل سازی هزینه بهره برداری و مسافت طی شده حل کردند. بر اساس نتایج محاسباتی، آن‌ها چندین نامعادله معتبر را معرفی کردند که موجب داشتن یک فرمولاسیون برنامه‌ریزی مختلط خطی و عدد صحیح از مسئله مسیریابی وسیله نقلیه را با ظرفیت وسیله نقلیه ثابت می‌باشد. اسماعیل بیگی[13] و همکاران [۱۲] دو فرمولاسیون مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط را برای مسئله زمان‌بندی

1. Muth & Thompson
2. Carlier & Pinson
3. Ashour
4. Branch & Bound
5. Kharbeche & Haouri
6. Zhang
7. Kianfar
8. Della Croce
9. Pessan & Neron
10. Gicquel & Minoux
11. Behdani & Smith
12. Louveaux
13. Esmaeilbeigi

جریان کارگاهی ارائه دادند. برای سرعت بخشیدن به رویکرد حل، چندین تکنیک از قبیل پیش پردازش و نامعادلات معتبر را ارائه دادند. یک مطالعه گسترده محاسباتی با استفاده از مثال‌های مختلف نشان دهنده کارایی فرمولاسیون جدید در مقایسه با روش‌های دیگر می‌باشد. سوبرمانیم و گونریس[1] [۱۳] سه فرمولاسیون مختلط عدد صحیح و خطی را برای مسئله فروشنده دوره گرد سازگار ارائه دادند و کلاسی از نامعادلات معتبر را برای تقویت این فرمولاسیون معرفی کردند. ساندر و راتینام [2] در سال ۲۰۱۵ فرمولاسیون برنامه‌ریزی عدد صحیح را برای مسئله فروشنده دوره گرد با نامعادلات معتبری که برنامه‌ریزی خطی آزاد شده را تقویت می‌کند ارائه دادند. گیانسی[3] و همکاران [۱۴] الگوریتم شاخه و برش و شاخه و قیمت را برای مسئله مسیریابی وسیله نقلیه با متوسط دوباره پرسازی امکانات را پیشنهاد دادند. سپس با افزودن نامعادلات معتبر موجب تقویت مسئله خطی آزادسازی شده شدند.

در تحقیق جدیدی گئورگی و کیس[4] [۱۵] برای حداقل سازی حداکثر تأخیر در مسئله زمان‌بندی تک ماشینه با محدودیت مواد اولیه، روش شاخه و برش ارائه نمودند. هافمن و بوشر[5] [۱۶] برای مسئله شکل‌دهی جریان قوس در زمان‌بندی خدمه راه آهن با نرخ حضور و غیاب نامعادلات معتبری توسعه دادند. سیلوستر و همکاران[6] [۱۷] الگوریتمی جدید با استفاده از روش شاخه و برش برای حداقل سازی شاخه‌های رئوس مسئله حداقل درخت فراگیر به تازگی ارائه نمودند. دالمیجر و اسلیت [7] [۱۸] در مسئله تخصیص پنجره زمانی در مسیریابی وسایل نقلیه از روش شاخه و برش بهره جستند. برای مسئله مسیریابی-موجودی با استفاده از کشتی، تجزیه و تحلیلی برای یک روش پیشرفته برای شاخه و برش توسط لفور و همکاران[8] [۱۹] ارائه نمودند.

جمع‌بندی از کاربرد روش شاخه و برش در جدول ۱ خلاصه شده است. همچنان که ملاحظه می‌کنید تاکنون روش شاخه و برش با استفاده از نامعادلات معتبر برای مسئله زمان‌بندی تولید بکار نرفته است و بنابراین در این تحقیق بر آن شدیم تا این روش را بکار ببریم.

۲-۲- زمان‌بندی تولید کارگاهی

در سال ۲۰۰۸ فیمنس و لورنکو[9] [۲۰] یک روش جستجوی بهینه را برای مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی ارائه دادند که از ترکیب روش جستجوی ممنوع با نامعادلات معتبر به دست می‌آید. بخشی از جواب به دست آمده از جستجوی ممنوع توسط روش حریصانه تصادفی از بین می‌رود و سپس نامعادلات معتبر برای بازسازی جواب‌های کامل استفاده می‌شوند.

کرمی نسب و سیدحسینی[10] [۲۱] یک فرمولاسیون عدد صحیح مختلط را به طور هم‌زمان برای مسئله تعیین اندازه دسته تولید و زمان‌بندی در محیط تولید کارگاهی ارائه دادند. یکی از مفروضات واقعی در رابطه با ماشین‌آلات انعطاف پذیر، توانایی مدیر تولید در تغییر سرعت ماشین‌هاست که موجب تولید تعدادی نامعادله معتبر بر اساس ساختار مسئله می‌شود. که این نامعادلات موجب کاهش بخش‌های غیر بهینه فضای حل می‌شوند. بنزیانی[11] و همکاران [۲۲] مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی را با هدف حداقل سازی زمان تکمیل کل در نظر گرفتند، آن‌ها فرمولاسیون ریاضی‌ای را پیشنهاد دادند که تعدادی نامعادله معتبر را برای ایجاد کران پایین معرفی می‌کند. کریمی نسب و مدرس[12] [۲۳] به طور هم‌زمان مسئله تعیین اندازه دسته تولید و زمان‌بندی را در محیط تولید کارگاهی در طول تعداد متناهی از دوره‌ها را بررسی کردند. به دلیل انعطاف‌پذیر بودن ماشین‌آلات، مدیر تولید قادر به تغییر سرعت آن‌ها بود. مسئله به‌صورت عدد صحیح مختلط فرموله شد سپس تعدادی نامعادله معتبر بر اساس ساختار مسئله تولید شد. نامعادلات معتبر پیشنهادی به منظور سرعت بخشیدن به روند جستجو به فرمولاسیون مسئله اضافه شدند. سپس عملکرد نامعادلات با نرم افزار CPLEX بررسی شد.

هام[13] و همکاران [۲۴] مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی انعطاف‌پذیر با ماشین‌آلات پردازش موازی دسته‌ای را مورد بررسی قرار دادند. ابتدا، آن‌ها یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط پیشرفته را ارائه دادند، سپس چند نامعادله معتبر برای کاهش فضای حل به مسئله افزودند.

۳- تعریف مسئله، پیچیدگی و مدل‌سازی

مسئله شامل n کار $J_1,\dots,J_n$ و m ماشین متفاوت $M_1,\dots,M_m$ را در نظر بگیرید. هر کار J_j شامل n_i عملیات $o_{i1},\dots,o_{in_i}$ است. بعلاوه فرض می‌شود عملیات o_{ik} می‌تواند تنها توسط ماشین $u_{ik}(i=1,\dots,n; k=1,\dots,n_i)$ پردازش شود، زمان پردازش مربوطه توسط p_{ik} نشان داده می‌شود. تنها یک ماشین از هر نوع وجود دارد که می‌تواند یک عملیات را در یک زمان پردازش کند. بعلاوه یک کار نمی‌تواند به‌صورت هم‌زمان توسط دو ماشین پردازش شود. طبق این محدودیت‌ها باید ترتیبی از همه o_{ik} عملیات برای هر ماشین $u_{ik}=M_j$ پیدا کنیم به‌طوری که برای زمان‌بندی مربوطه $(C_{\max})$ حداکثر زمان اتمام همه کارها باید حداقل شود. مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی، یکی از مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی است که زیاد مورد مطالعه قرار گرفته است با این حال

1. Subramanyam & Gounaris
2. Sundar & Rathinam
3. Gianessi
4. Györgyi and Kis
5. Hoffmann and Buscher
6. Silvestri et al.
7. Dalmeijer and Spliet
8. Lefever et al.
9. Fernandes & Lourenco
10. Karimi nasab & Seyedhoseini
11. Benziani
12. Karimi nasab & Modarres
13. Ham

جدول (۱): کاربرد الگوریتم شاخه و برش

روش	سال	مسائل						
		فروشنده دوره گرد	کوله پشتی	مسیریابی وسیله نقلیه	جریان کارگاهی	تولید کارگاهی	تک ماشینی	ماشین‌های موازی
شاخه و برش	۱۹۵۴	√						
	۱۹۷۰		√					
	۱۹۹۱					√		
	۱۹۹۷			√	√			
	۲۰۰۶							√
	۲۰۰۸					√		
	۲۰۱۱	√			√		√	√
	۲۰۱۲		√		√			
	۲۰۱۳					√	√	√
	۲۰۱۴	√	√	√		√		
	۲۰۱۵	√		√	√	√		
	۲۰۱۶			√		√		
	۲۰۱۷			√				
	۲۰۱۸			√				
	۲۰۱۸						√	

هنوز مشکل حل بهینه آن به‌صورت چالش باقی مانده است. با وجود آنکه برخی از موارد خاص مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی مانند مسئله با ۲ ماشین و کمتر از ۳ عملیات برای هر کار و مسئله با ۲ ماشین و زمان پردازش واحد می‌تواند در زمان چند جمله‌ای حل شود، به‌صورت کلی مسئله زمان‌بندی کارگاهی، مسئله Np-hard است [۲۵] و به همین دلیل برای یافتن جواب بهینه تلاش محاسباتی فراوانی انجام شده که یکی از مهم‌ترین آنها استفاده از الگوریتم شاخه و کران است.

روش شاخه و کران، روشی دقیق و روش بهینه‌سازی برای پیدا کردن یک جواب بهینه است که به روش شاخه زنی و تخمین حدود بالا و پایین بستگی دارد. اگر حد پایین برای برخی از گره‌های درخت (مجموعه‌ای نامزدها) بیشتر از حد بالا برای برخی گره‌های دیگر باشد، گره درخت از جستجو حذف می‌شود. این روش تا زمانی که یک زمان‌بندی کامل برای ماشین به دست بیاید انجام می‌شود.

برای حل این مسئله ابتدا مجموعه محدود J از کارها و مجموعه محدود M از ماشین‌ها را به عنوان ورودی‌ها در نظر گرفته شده که در آن برای هر کار $j \in J$ ترتیب $(\sigma_1^J, \dots, \sigma_m^J)$ از ماشین‌ها را $(m = |M|)$ که ترتیب پردازش j بر روی ماشین‌ها مفروض است. با این مقدمه می‌توان گفت که کار j بایستی ابتدا بر روی σ_1^J و سپس روی σ_2^J و ... پردازش شود. همچنین برای هر کار j و ماشین α باید زمان پردازش، عدد صحیح غیر منفی $P_{J\alpha}$ را از j روی α داشته باشیم. هدف، پیدا کردن زمان‌بندی J روی M، حداقل کردن حداکثر زمان تکمیل کارهای J است. برای هر کار j و ماشین α، $x_{j\alpha}$ را زمان شروع کار j روی ماشین α قرار می‌دهیم. محدودیت‌ها روی بردار $(x_{J\alpha}: j \in J, \alpha \in M)$ برای ارائه زمان به‌صورت روابط ۱ تا ۳ هستند. برای شرکت دادن تابع هدف، یک متغیر اضافی Z که به‌صورت رابطه ۴ استفاده می‌شود. رابطه ۵ مدل بندی را به‌صورت کلی نشان می‌دهد.

$$x_{J\alpha} \geq 0 \quad \forall j \in J, \alpha \in M \tag{۱}$$

$$x_{J\sigma_t^J} \geq x_{J\sigma_{t-1}^J} + P_{j\sigma_{t-1}^J} \quad \forall j \in J, t = 2, \dots, m \tag{۲}$$

$$x_{I\alpha} \geq x_{j\alpha} + P_{J\alpha} \;\; or \;\; x_{J\alpha} \geq x_{i\alpha} + P_{I\alpha} \quad \forall i, j \in J, \alpha \in M \tag{۳}$$

$$Z \geq x_{J\sigma_m^J} + P_{j\sigma_m^J} \quad for\ all\ j \in J \tag{۴}$$

$$minimize\{Z: s.to\ (1), (2), (3) and\ (4)\} \tag{۵}$$

این فرمولاسیون مسئله با نام برنامه‌ریزی گسسته معروف بوده [۲۸-۲۶]، که در آن از محدودیت این یا آن[1] در محدودیت شماره (۳) استفاده شده است. با تبدیل مستقیم، می‌توان مسئله برنامه‌ریزی گسسته را به مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط تبدیل کرد که در آن باید یک متغیر Y_{Ij}^{α} برای هر شرط (۳) که به‌صورت باینری است معرفی شود و K به عنوان یک عدد ثابت بزرگ بکار رود. با این تعریف می‌توان چنین گفت که Y_{ij}^{α} برابر ۱ است اگر i قبل از j روی ماشین α زمان‌بندی شود و اگر j قبل از i روی ماشین α زمان‌بندی شود Y_{ij}^{α} برابر صفر است.

$$x_{I\alpha} \geq x_{J\alpha} + P_{j\alpha} - K * Y_{Ij}^{\alpha}$$
$$x_{j\alpha} \geq x_{i\alpha} + P_{I\alpha} - K * \left(1 - Y_{ij}^{\alpha}\right) \quad \forall i, j \in J, \alpha \in M \tag{۶}$$

روش برش سطحی را می‌توانیم برای دو حالت گسسته و عدد

1. Either-or

صحیح مختلط توسعه دهیم اما در این پژوهش فقط مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط را در نظر می‌گیریم. در مورد حالت گسسته ابتدا باید مسئله خطی آزاد شده آن را حل کنیم و سپس بررسی کنیم که آیا محدودیت ۳ را ارضا می‌کند یا خیر. بدین ترتیب:

$$minimize\ \{Z: subject\ to\ (1), (2), and\ (4)\} \quad (۷)$$

سپس نامعادلاتی که در بخش بعد توسعه داده خواهد شد را به فرمولاسیون اضافه می‌کنیم که برای بردار x که زمان‌بندی را ارائه می‌دهد معتبرند اما جواب بهینه فعلی را برای مسئله خطی آزاد شده ارضا نمی‌کنند.

مقدار بهینه مسئله خطی حدهای پایین قوی برای مقدار بهینه زمان‌بندی فراهم می‌کند. به طور مشابه، در فرمولاسیون عدد صحیح مختلط، ابتدا حدود Y را به‌صورت زیر می‌نویسیم و با آزادسازی رابطه ۹ به دست می‌آید.

$$0 \le Y_{IJ}^{\alpha} \le 1 \quad for\ all\ \ i, j \in J\ , \alpha \in M \quad (۸)$$

$$minimize\{Z: s.to\ (1), (2), (4), (6)\ and\ (8)\} \quad (۹)$$

۴- نامعادلات معتبر

نامعادلات معتبر توسط فالکرسن، دنتزیک و جانسون[1] در سال‌های ۱۹۵۴ تا ۱۹۵۹ در مطالعه مسئله فروشنده دوره گرد معرفی شده‌اند. آنها با این روش به طرز موفقیت آمیزی مسئله بزرگ و متقارن فروشنده دوره گرد را به‌صورت بهینه حل کردند. کار اولیه آنها بر نامعادلات ترکیبی یا استنتاجات منطقی که می‌تواند از ساختار مسئله و متغیرهای ۰-۱ به دست بیاید، دلالت داشت. مطالعه اولیه دیگری نیز از این نوع توسط مارکوویتز و مین[2] در سال ۱۹۷۵ انجام شد. مطالعات اولیه نامعادلات معتبر که برای مسائل عدد صحیح عمومی انجام شده است به تنهایی توسط گومری[3] در اواخر سده ۱۹۵۰ و اوایل ۱۹۶۰ انجام شد. کار او بر ایجاد تعداد محدودی از نامعادلات معتبر برای حل مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح عمومی تأکید می‌کرد [۲۹].

نامعادلات معتبر، نامعادلاتی هستند که از ابتدا در میان محدودیت‌های ما نیستند و در واقع آن‌ها را با توجه به فضای جواب استخراج می‌کنیم و روش تولید آن‌ها برای انواع مدل‌های خطی و عدد صحیح متفاوت می‌باشد. این نامعادلات به دو دسته نامعادلات معتبر و نامعادلات معتبر قوی تقسیم می‌شوند. نامعادلات معتبر برای مسائل عدد صحیح و عدد صحیح مختلط کاربرد دارند، همچنین تکنیک‌های عمومی‌ای هم برای تولید تمام نامعادلات معتبر ایجاد شده است. نامعادلات معتبر قوی نیز برای مسائل برنامه‌ریزی عدد صحیح Np-hard کاربرد دارند. تعیین خانواده نامعادلات معتبر قوی بیشتر هنر است تا یک روش رسمی. بنابراین روش‌های ایجاد این نامعادلات متنوع‌اند، برخی از آنها مانند روش گومری که برای آن فرمول و روش حل وجود دارد و برخی دیگر که فرمولی برای آنها وجود ندارد. پس از تولید این نامعادلات با روش‌های مختلف و افزودن نامعادلات به مسئله اصلی، روند جستجو تسریع می‌شود. در برخی موارد، برخی نامعادلات معتبر بر نامعادلاتی که از آنها مشتق شده‌اند ، دلالت می‌کنند بنابراین نامعادله اصلی را باید از مسئله حذف کرد. در بین تمام روش‌های موجود حل مسائل Np-hard، روش برش سطحی در کاهش زمان حل مدل‌های ریاضی توسط حل کننده‌های تجاری مانند CPLEX بسیار قدرتمند است. مسائل زیادی تاکنون با این الگوریتم حل شده‌اند که در جدول ۱ به آنها اشاره شده است. پس از حل باید نتایج زیر به دست بیاید [۳۰]:

۱- با این روش، تعدادی محدودیت به ازای هر مجموعه برش به فرمولاسیون اصلی اضافه می‌شود.

۲- افزودن هر مجموعه برش باید به فرمولاسیون اولیه، باید حدود LP آن را به طور معنی داری بهبود دهد.

۳- فاکتور مهم، پیدا کردن جواب شدنی مورد نیاز از مسئله با زمان پردازش کوتاهی می‌باشد.

۴- اگر جواب شدنی‌ای از فرمولاسیون در زمان کوتاهی با شکاف کم بین حدود بالا و پایین به دست بیاید، می‌توانیم ادعا کنیم که کیفیت خوبی را به دست آورده‌ایم.

۵- بدیهی است که برش‌های پیشنهادی باید به طور معنی داری زمان کل پردازش را بهبود دهند.

در این مسئله، ما می‌توانیم نامعادلات معتبری که شامل متغیر Y هستند را استفاده کنیم. نامعادلات به خوبی برای فرمولاسیون گسسته توسعه داده شده‌اند. در این پژوهش دو برش مثلثی و برش ناقص را برای حالت عدد صحیح مختلط ایجاد می‌کنیم.

۴-۱- برش مثلثی

برش مثلثی به‌صورت زیر مدل بندی می‌شود.

$$Min\ Z \quad (۱۰)$$

$$x_{J\alpha} \ge 0 \quad for\ all\ \mathrm{j} \in \mathrm{J}, \alpha \in M \quad (۱۱)$$

$$x_{J\sigma_t^J} \ge x_{J\sigma_{t-1}^J} + P_{j\sigma_{t-1}^J} \quad \forall\ \mathrm{j} \in \mathrm{J}, = 2, \dots, \mathrm{m} \quad (۱۲)$$

$$x_{I\alpha} \ge x_{J\alpha} + P_{j\alpha} - K * Y_{Ij}^{\alpha}\ \ and \quad (۱۳)$$
$$x_{j\alpha} \ge x_{i\alpha} + P_{I\alpha} - K * \left(1 - Y_{ij}^{\alpha}\right) \forall\ i, j \in \mathrm{J}, \alpha \in M$$

$$Z \ge x_{J\sigma_m^J} + P_{j\sigma_m^J} \quad \forall\ \mathrm{j} \in \mathrm{J} \quad (۱۴)$$

$$0 \le Y_{IJ}^{\alpha} \le 1 \quad \forall\ i, j \in J\ , \alpha \in M \quad (۱۵)$$

$$Y_{IJ}^{\alpha} + Y_{JK}^{\alpha} + Y_{KI}^{\alpha} \le 2 \quad \forall\ i, j, k \in \mathrm{J} \quad (۱۶)$$

برای هر ۳ کار i, j, k و هر ماشین α، باید نامعادله ساده مثلثی را در نظر بگیریم. تعریف این نامعادله بدین صورت است که اگر i قبل j زمان‌بندی شود و j قبل k، سپس باید i قبل k زمان‌بندی شود. برای نوشتن این نامعادله ما به حداقل ۳ کار نیاز داریم. برای نوشتن این نامعادله ما نیاز داریم به جایگزین، $1 - Y_{Ji}^{\alpha}$ برای Y_{IJ}^{α}، و بستگی دارد که چطور متغیر Y را تخصیص دهیم.

1. Fulkerson, Dantzig & Johnson
2. Markowitz & Manne
3. Gomory

۴-۲- برش ناقص

برای هر کار j و ماشین α، $E_{J\alpha}$ به عنوان اولین زمان شروع ممکن از کار j روی ماشین α تعریف می‌شود. $F_{J\alpha}$ نیز به عنوان حداقل زمان تکمیل کار j بعد از آنکه روی ماشین α پردازش شود (که مجموع زمان پردازش jامین کار روی ماشین‌های باقیمانده است) تعریف می‌شود.

با فرض $S \subseteq J$ به عنوان زیرمجموعه کارها و $\alpha \in M$ برای ماشین‌ها، $E_{S\alpha}$ را حداقل $E_{J\alpha}$ روی همه $j \in S$ تعریف می کنیم و $P_{S\alpha}$ را مجموع $P_{J\alpha}$ روی همه کارهای $j \in S$ قرار می‌دهیم. سپس ترتیب روی ماشین‌ها را در S که روی ماشین α زمان‌بندی می‌شوند، در نظر می‌گیریم و بدین ترتیب نامعادله معتبری ایجاد می‌شود که این نامعادله برای همه زمان‌بندی‌ها معتبر بوده و K نمی‌تواند روی ماشین α پردازش شود تا زمانی که همه کارها در مجموعه S که روی ماشین α زمان‌بندی می‌شوند قبل از K تکمیل شوند.

$$Min\ Z \qquad (۱۷)$$

$$x_{J\alpha} \geq 0 \quad \forall\, j \in J, \alpha \in M \qquad (۱۸)$$

$$x_{J\sigma_t^J} \geq x_{J\sigma_{t-1}^J} + P_{j\sigma_{t-1}^J} \quad \forall\, j \in J, t = 2, \dots, m \qquad (۱۹)$$

$$x_{I\alpha} \geq x_{J\alpha} + P_{j\alpha} - K * Y_{Ij}^{\alpha} \ and \qquad (۲۰)$$
$$x_{j\alpha} \geq x_{i\alpha} + P_{I\alpha} - K * \left(1 - Y_{ij}^{\alpha}\right)$$
$$\forall\, i, j \in J, \alpha \in M$$

$$Z \geq x_{J\sigma_m^J} + P_{j\sigma_m^J} \quad \forall\, j \in J \qquad (۲۱)$$

$$0 \leq Y_{IJ}^{\alpha} \leq 1 \quad \forall\, i, j \in J, \alpha \in M \qquad (۲۲)$$

$$x_{K\alpha} \geq E_{S\alpha} + \sum_{j \in S\{K\}} Y_{JK}^{\alpha} P_{J\alpha} \qquad (۲۳)$$
$$\forall\, S \subseteq J, \alpha \in M, K \in S$$

۴-۳- یک مثال عددی

در اینجا مسئله را با ۳ کار که هر کار دارای ۳ عملیات می‌باشد و ۴ ماشین و فرم عدد صحیح مختلط مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی، در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌کنید کار A دارای سه عملیات روی سه ماشین به ترتیب اول، سوم و چهارم بوده و کار B نیز به ترتیب به ماشین‌های اول، دوم و چهارم و کار C به ترتیب به ماشینهای دوم، سوم و اول برای تکمیل نیاز دارند. در اینجا ابتدا مسئله را با ترتیب پردازش کارها روی ماشین‌ها حل می‌کنیم. مسئله زیر را حل می‌کنیم و نتایج را برای ۳ حالت MIP و $RMIP$ و $RMIP + B\&C$ (یعنی ریلکس شده متغیر Y_{ij}^{α} مسئله به همراه برش‌های اضافه شده) در جدول ۲ است.

$$Min\ Z \qquad (۲۴)$$

$$x_{J\alpha} \geq 0 \quad for\ all \quad j \in J, \alpha \in M, J = 3, M = 4 \qquad (۲۵)$$

$$x_{J\sigma_t^J} \geq x_{J\sigma_{t-1}^J} + P_{j\sigma_{t-1}^J} \quad for\ all \quad j \in J, t = 2, \dots, m \qquad (۲۶)$$

$$Z \geq x_{J\sigma_m^J} + P_{j\sigma_m^J} \quad for\ all \quad j \in J \qquad (۲۷)$$

$$x_{I\alpha} \geq x_{J\alpha} + P_{j\alpha} - K * Y_{Ij}^{\alpha} \ and \qquad (۲۸)$$
$$x_{j\alpha} \geq x_{i\alpha} + P_{I\alpha} - K * \left(1 - Y_{ij}^{\alpha}\right) \quad for\ all \quad i, j \in J, \alpha \in M$$

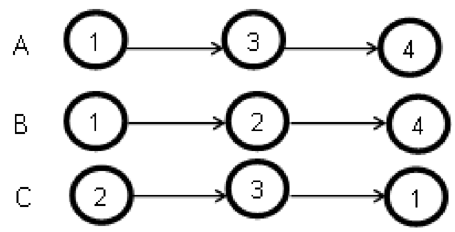
$$\begin{cases} Y_{ij}^{\alpha} = 1 & \text{اگر } i \text{ قبل } j \text{ زمان‌بندی شود روی } \alpha \\ Y_{ij}^{\alpha} = 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۲۹)$$

جدول(۲): نتایج اولیه

RMIP + B&C X	RMIP X	MIP X	
۰	۰	۰	A.$m_{۱}$
۵	۵	۱۳	A.$m_{۳}$
۱۲	۱۲	۲۰	A.$m_{۴}$
۵	۵	۵	B.$m_{۱}$
۸	۸	۸	B.$m_{۲}$
۱۳	۲۰	۱۳	B.$m_{۴}$
۱۳/۰۷۳	۲۱	۱۳	C.$m_{۱}$
۰	۰	۰	C.$m_{۲}$
۴/۰۷۳	۱۲	۴	C.$m_{۳}$
۲۰	۲۷	۲۸	Z

جدول (۳): مقایسه اولیه

m×n	مدل	روش	بهینه	حد پایین	زمان
۳×۴	RMIP		۲۷		۰/۰۴۷
۳×۴	RMIP + B&C	B&C		۲۰	۰/۰۳۱



شکل (۱): اطلاعات مثال عددی با ۳ کار، ۳ عملیات و ۴ ماشین

۵- شاخه زنی

رویه شاخه زنی برای مسائل زمان‌بندی تولید کارگاهی به خوبی مورد مطالعه قرار گرفته است. یکی از قوی‌ترین رویه‌های مورد بحث، می‌تواند به‌صورت مستقیم از فرمولاسیون گسسته مسئله زمان‌بندی نتیجه شود. ابتدا چند ماشین $\alpha \in M$ و ۲ کار $i,j \in J$ را انتخاب می‌کنیم و بر محدودیت ۳ تأکید داریم، سپس زیر مسئله P_1 را ایجاد می‌کنیم، که i قبل از j روی α زمان‌بندی می‌شود. دومین زیر مسئله که P_2 است و در آن j قبل از i زمان‌بندی می‌شود. ایده این است که اگر ما بتوانیم یک انتخاب خوب از α و i و j داشته باشیم می‌توانیم بعضی از ناسازگاری‌های اساسی را در زمان‌بندی حل کنیم و بنابراین بهبود چشم گیری را در حدود پایین ایجاد کنیم. برای آزمون این رویه، الگوریتم‌های ساده زیر را بکار می‌گیریم.

۵-۱- شاخه زنی مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی

فرض می‌کنیم زیر مسئله‌های $P_1, \dots, P_K$ را ایجاد کرده‌ایم. زیر مسئله P_1 را که دارای حد پایین انحصاری است، $\mathrm{LB}(\mathrm{P_1})$ حداقل می‌باشد. پردازش P_1، زیر مسئله جدید P_{K+1} و P_{K+2}، را ایجاد می‌کند، با شاخه زنی روی ماشین α و کار i و j به‌طوری‌که $\min\{LB(P_{K+1}), LB(P_{K+2})\}$، حداکثر است. هنگامی که یک مسئله P_1 دارای شرایط $LB(P_1) \geq UB$ باشد، آن می‌تواند از لیست زیر مسئله‌ها حذف شود. در این رویه اگر یک ماشین α، یک زیرمجموعه $S \subseteq J$ و یک کار $j \in J$ وجود داشته باشد داریم:

$$\min_{j \in S\{I\}} E_{J\alpha} + P_{S\alpha} + F_{S\alpha} \geq UB \qquad (۳۰)$$

سپس i باید روی α قبل از هر کار دیگری در مجموعه S پردازش شود. در α را انتخاب و کارهای i و j را برای شاخه زنی انتخاب می‌کنیم. محدوده توجه به ماشینی که دارای بدترین حد اولیه می‌باشد و این روند تا جایی که ماشین به‌صورت کامل زمان‌بندی شود ادامه دارد و سپس همه ماشین‌های باقیمانده در نظر گرفته می‌شوند.

$$d_{IJ} = \max\left(0, E_{I\alpha} + P_{I\alpha} + P_{J\alpha} + F_{j\alpha} - LB\right) \qquad (۳۱)$$

$$d_{JI} = \max\left(0, E_{j\alpha} + P_{J\alpha} + P_{i\alpha} + F_{i\alpha} - LB\right) \qquad (۳۲)$$

$$a_{IJ} = \min\left(d_{IJ}, d_{JI}\right) \qquad (۳۳)$$

$$\upsilon_{IJ} = \max\left(d_{IJ} - d_{JI}\right) \qquad (۳۴)$$

اکثر مقدار υ_{IJ} را انتخاب می‌کنیم و بدین ترتیب شاخه زنی را انجام می‌دهیم. در این پژوهش، الگوریتم شاخه و کران را استفاده نمی‌کنیم ولی در حالت کلی می‌توان پس از اضافه کردن نامعادلات معتبر، با استفاده از شاخه زنی کران‌های پایینی به دست آورد و روش شاخه و کران را با روش شاخه و برش مقایسه کرد.

۶- نتایج عددی

ابتدا مسئله را با ۳ کار و ۴ ماشین در نظر گرفتیم و برای آن نامعادلات معتبر تولید کردیم. در اینجا تعداد کارها را به عدد ۷ افزایش می‌دهیم. پس از اضافه کردن برش‌ها و حل مسئله با تعداد کارهای مختلف، نتایج در جدول شماره ۴ نمایش داده می‌شود.

جدول(۴): مقایسه روش شاخه و برش برای مسئله با تعداد کارهای متغیر

ابعاد	تکرار	زمان	بهینه	حد پایین	درصد شکاف بهینگی	گره
۳×۴	۴۷	۰/۰۳۱	۲۷	۲۰	۲۵	۰
۴×۴	۵۹	۰/۰۳۱	۲۷	۲۰	۲۵	۰
۵×۴	۱۴۴	۰/۰۱۵	۳۱	۲۰/۰۵۶	۳۵	۱۲
۶×۴	۳۲۱	۰	۳۵	۲۰/۰۵۶	۴۲	۲۶
۷×۴	۲۶۷۶	۰	۳۹	۲۰/۰۵۶	۴۸	۴۵۷

نتایج نشان می‌دهند که با افزایش تعداد کارها، زمان حل کاهش می‌یابد ولی شکاف افزایش می‌یابد و از جواب بهینه دورتر می‌شویم. هدف از اضافه کردن برش‌ها رسیدن سریع تر به جواب بهینه می‌باشد که این هدف برآورده شده است. برای بهبود بیشتر این مساله، می‌توانیم تعداد بیشتری نامعادله معتبر به مدلمان اضافه کنیم. برای حل مسائل Np-hard مانند مساله زمانبندی تولید کارگاهی با تعداد کار و ماشین‌های زیاد در زمان معقول، بهتر است که از الگوریتم‌های فراابتکاری استفاده کنیم.

۷- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی به وضوح مسئله سختی در مبحث بهینه‌سازی ترکیبیاتی می‌باشد. در این مقاله، ما مسئله زمان‌بندی تولید کارگاهی را به دو حالت گسسته و عددصحیح مختلط بررسی کردیم. برای حل مسئله به صورت بهینه، نامعادلاتی را به مدل اولیه اضافه کردیم که این نامعادلات، کران‌های پایینی را ایجاد کردند که

نتایج نشان دادند حدود پایین ایجاد شده توسط مدل مجددا فرموله شده، قوی تر از حدود پایین ایجاد شده توسط مدل اصلی آزاد شده می‌باشد. برای مطالعات آتی می‌توان مدل فوق را با الگوریتم شاخه و کران حل کرد و نتایج آن را با الگوریتم شاخه و برش مقایسه نمود. همچنین استفاده از روشهای ترکیبی ابتکاری- دقیق نیز می‌تواند روش مناسبی برای حل مسائل با این درجه سختی بخصوص در ابعاد بزرگ مسئله می باشد.

مراجع

[1] Muth J.F., Thompson G.L. (1963). "Industrial scheduling", Thompson, Gerald Luther, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall.

[2] Carlier, J., Pinson, E., (1989). "An Algorithm for Solving the Job-Shop Problem", Management Science, 35(2): 164-176.

[3] Ashour, S., Hiremath, S.R., (1973). "A branch-and-bound approach to the job-shop scheduling problem", International Journal of Production Research, 11(1): 47-58.

[4] Kharbeche, M., Mohamed. H., (2013). "MIP models for minimizing total tardiness in a two-machine flow shop", Journal of the Operational Research Society, 64(5): 690-707.

[5] Zhang, M., Simge, K., Hande, Y., (2012). "A polyhedral study of multiechelon lot sizing with intermediate demands", Operations Research, 60(4): 918-935.

[6] Kianfar, K., (2012). "On n-step MIR and partition inequalities for integer knapsack and single-node capacitated flow sets, Discrete Applied Mathematics, 160(10): 1567-1582.

[7] Della, C.F, Salassa, F., T'kindt, V., (2014). "A hybrid heuristic approach for single machine scheduling with release times", Computers & Operations Research, 45: 7-11.

[8] Pessan, C., Emmanuel, N., Mohamed, H., (2013). "Development of lower bounds for the scheduling of setup tasks in serial production lines", European Journal of Industrial Engineering 7, 5: 558-576.

[9] Gicquel, C., Michel, M., (2015). "Multi-product valid inequalities for the discrete lot-sizing and scheduling problem", Computers & Operations Research, 54: 12-20.

[10] Behdani, B., Cole, J.S., (2014). "An integer-programming-based approach to the close-enough traveling salesman problem", INFORMS Journal on Computing, 26(3): 415-432.

[11] Louveaux, F.V., Salazar-González, J.J., (2014). "Solving the Single Vehicle Routing Problem with Variable Capacity", Transportation Science, 50(2): 708-719.

[12] Esmaeilbeigi, R., Charkhgard, P., Charkhgard, H., (2016). "Order acceptance and scheduling problems in two-machine flow shops: New mixed integer programming formulations", European Journal of Operational Research, 251(2): 419-431.

[13] Subramanyam, A., Chrysanthos, E.G., (2016). "A branch-and-cut framework for the consistent traveling salesman problem", European Journal of Operational Research, 248(2): 384-395.

[14] Sundar, K., Sivakumar, R., (2016). "Generalized multiple depot traveling salesmen problem—Polyhedral study and exact algorithm", Computers & Operations Research, 70: 39-55.

[15] Györgyi, P., Kis, T., (2018). "Minimizing the maximum lateness on a single machine with raw material constraints by branch-and-cut", Computers & Industrial Engineering, 115: 220-225.

[16] Hoffmann, K., Buscher, U., (2018). "Valid inequalities for the arc flow formulation of the railway crew scheduling problem with attendance rates", Computers & Industrial Engineering, In press.

[17] S., Silvestri, Laporte, G., Cerulli, R. (2017). "A branch-and-cut algorithm for the minimum branch vertices spanning tree problem", Computers & Operations Research, 81: 322-332.

[18] Dalmeijer, K., Spliet, R., (2018). "A branch-and-cut algorithm for the Time Window Assignment Vehicle Routing Problem", Computers & Operations Research, 89: 140-152.

[19] Lefever, W., Aghezzaf, E.H., Bernard Penz, K.H.H., (2018). "Analysis of an improved branch-and-cut formulation for the Inventory-Routing Problem with Transshipment", Computers & Operations Research, 98: 137-148.

[20] Fernandes, S., Helena R.L. (2008). "Optimised search heuristic combining valid inequalities and tabu search", International Workshop on Hybrid Metaheuristics, Springer Berlin Heidelberg.

[21] Karimi-Nasab, M., Seyedhoseini, S.M., (2013). "Multi-level lot sizing and job shop scheduling with compressible process times: A cutting plane approach", European Journal of Operational Research, 231(3): 598-616.

[22] Benziani, Y., Kacem, I., Laroche, P., (2013). "Lower and upper bounds for the Job Shop Scheduling problem with min-sum criteria. Control", Decision and Information Technologies (CoDIT), 2013 International Conference on. IEEE.

[23] Karimi-Nasab, M., Modarres, M., (2015). "Lot sizing and job shop scheduling with compressible process times: A cut and branch approach", Computers & Industrial Engineering, 85: 196-205.

[24]Ham, A.M., Eray, C., (2016). “Flexible job shop scheduling problem with parallel batch processing machines: MIP and CP approaches”, Computers & Industrial Engineering, 102: 160-165.

[25]Barker, J.R., (1981). “Primal search tree algorithms for the general job shop problem”.

[26]Balas, E., (1969). “Machine sequencing via disjunctive graphs: an implicit enumeration algorithm”, Operations research, 17(6): 941-957.

[27]Balas, E., (1979). “Disjunctive programming”, Annals of Discrete Mathematics, 5: 3-51.

[28]Balas, E., (1985). “On the facial structure of scheduling polyhedra, Springer Berlin Heidelberg, 24: 179-218.

[29]Gokce, E.I., Wilbert, E.W., (2015). “Valid inequalities for the multi-dimensional multiple-choice 0–1 knapsack problem”, Discrete Optimization, 17: 25-54.

[30]Laurence, A., (1998). Wolsey, Integer Programming, Wiley.

IERPS Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

Journal of Industrial Engineering Research in Production Systems

ISSN: 2345-2269

Autumn and Winter 2018, Volume 6., No. 13., pp.139-149
www.ier.basu.ac.ir

DOI: 10.22084/ier.2019.15262.1707

Branch & Cut Algorithm for Solving job Shop Scheduling Problem Using Valid Inequalities

J. Behnamian[1,*], **F. Komijani**[2]

[1] Department of Industrial Engineering, Bu-Ali Sina University, Hamadan, Iran, Iran.

A R T I C L E   I N F O

***Article history*:**

Received 20 December 2017
Accepted 05 February 2019

***Keywords*:**

Scheduling
Job shop problem
Branch and cut
Valid inequalities

A B S T R A C T

In this paper, the problem of scheduling the job shop production is considered, which, while being applicable as one of the complex issues in the field of combinatorial optimization, has been raised and this has caused the researchers to pay more attention to this problem. In this problem, given the existence of a number of workshops, the number of jobs should be processed in the workshop with a known production path that is already known. In order to solve this problem, in this paper, the problem of production scheduling is firstly modeled as a mixed integer programming. Then, due to the limitations of the exact solving using this model, the surface cutting method is proposed to create inequalities this is valid for the problem in the framework of branching and cutting algorithm. The aim of adding this set of inequalities is to create a lower bound, which, while the feasible solutions are not eliminated by them, accelerates the solution in the framework of branch & cut algorithm. To solve the problem optimally, the results show that the lower bound created by the re-formulated model is stronger than the lower bound created by the original relaxed model.

[*] Corresponding author. Javad Behnamian
Tel.: 081-38292505; *E-mail address:* behnamian@basu.ac.ir