

تحلیل سیستم تولیدی MTS/MTO با مدل‌سازی صف مبتنی بر ورود گروهی پواسون و سرویس ارلنگ

جعفر باقری نژاد^{۱*}، آرزو قهقائنی^۲

۱. دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه الزهراء، تهران.
۲. دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه الزهراء، تهران.

خلاصه

در این تحقیق از طریق مدل‌سازی با نظریه صف، رفتار یک سیستم تولیدی MTS/MTO شامل دو ایستگاه، مورد تحلیل قرار گرفته است. در ایستگاه اول، کالاهای نیمه‌ساخته تولید شده و در انبار میانی (بافر) که بر اساس سیاست ذخیره پایه کنترل می‌شود، نگهداری می‌گردد. در ایستگاه دوم، پس از دریافت سفارش مشتری کالای نیمه‌ساخته به منظور تأمین سفارش مشتری تکمیل و سفارش‌سازی می‌شود. زمان تولید در ایستگاه اول دارای توزیع نمایی و در ایستگاه دوم دارای توزیع ارلنگ نوع k می‌باشد. تقاضای مشتریان نیز دارای توزیع پواسون و به صورت ورود گروهی می‌باشد. هدف از این پژوهش تعیین نقطه بهینه نفوذ سفارش و ظرفیت بهینه بافر می‌باشد که بر اساس حداقل هزینه کل که شامل هزینه‌های نگهداری، کسری و تولید کالاهای نامنطبق با سفارش مشتری می‌باشد مشخص شدند. به منظور ارزیابی عملکرد و تعیین هزینه‌های سیستم، احتمالات پایداری با استفاده از روش تحلیل ماتریس محاسبه گردید. نتایج نشان می‌دهد، اگر چه تغییر ظرفیت انبار میانی و نرخ ورود مشتریان ارتباط مستقیمی با مقدار بهینه نقطه نفوذ سفارش ندارد ولی با افزایش درصد عدم انطباق کالاهای نیمه‌ساخته با تقاضای مشتریان و همچنین افزایش نرخ سرویس‌دهی در ایستگاه اول نقطه نفوذ سفارش کاهش می‌یابد.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۴/۰۶/۰۹

پذیرش ۱۳۹۵/۰۱/۳۱

کلمات کلیدی:

نقطه نفوذ سفارش

ظرفیت انبار میانی

تحلیل MTS/MTO با

سیستم صف

روش تحلیل ماتریس

۱- مقدمه

بنگاه‌هایی که علاوه بر تأمین سریع تقاضای مشتریان، محصولات متنوع نیز ارائه می‌کنند، می‌توانند در بازارهای امروزه رقابت کنند. اگر چه شرکت‌هایی که به صورت تولید برای انباشته فعالیت می‌کنند، می‌توانند تقاضای مشتریان را سریعتر برآورده کنند ولی ممکن است با ریسک هزینه بالای موجودی و تقاضای متغیر مشتریان روبه‌رو شوند [۱-۴]. همچنین شرکت‌هایی که به صورت تولید برای سفارش فعالیت می‌کنند، می‌توانند محصولات متنوع‌تری را با هزینه نگهداری کمتر عرضه کنند ولی زمان تدارک به طور نسبی طولانی‌تر می‌باشد [۱-۲]. به منظور برآورده‌سازی این اهداف (سرعت و تنوع) تولید

ترکیبی یا متمایزسازی با تأخیر رویکردی است که مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵] و متمایزسازی با تأخیر مفهومی رایج در مدیریت زنجیره تأمین است که در آن فرآیند تولید با ساخت یک محصول عمومی شروع و سپس به یک محصول خاص متمایز می‌شود [۶]. این مفهوم در میان اعضای زنجیره تأمین شهرت زیادی دارد و دارای مزایای فراوان است. برای مثال این کار ریسک مربوط به تنوع محصولات را با بهره‌گیری از اشتراک محصولات و تغییر در طراحی محصول به گونه‌ای که زمان متمایزسازی به تأخیر بیفتد، کاهش می‌دهد. متمایزسازی با تأخیر باعث می‌شود که موجودی به اندازه صحیح، در مکان صحیح و به شکل صحیح نگهداری شود. بنابراین باعث کاهش ریسک زنجیره تأمین و افزایش سرعت پاسخگویی به تقاضای بازار می‌شود [۲] و [۷]. ژو و همکاران بیان کردند که برای ایجاد توازن بین پاسخگویی سریع و تنوع محصولات مدل‌های کسب و کار

* نویسنده مسئول: جعفر باقری نژاد

تلفن: ۰۲۱-۸۸۰۴۴۰۴۰، پست الکترونیک: jbagheri@alzahra.ac.ir

کردند که در آن ظرفیت تولید در نظر گرفته شده است. علاوه بر این، آن‌ها نقطه بهینه متمایزسازی را در یک سیستم صف چند مرحله‌ای تجزیه و تحلیل کردند [۱۴]. در سال‌های بعد، احمدی و تیموری مسئله تعیین محل نقطه نفوذ سفارش در زنجیره تأمین صادرات خودرو با استفاده از برنامه‌ریزی پویا را مورد بررسی قرار دادند [۱۳]. علاوه بر این مرور ادبیات قابل توجهی در موقعیت‌یابی نقطه جدایش و مطالعه موقعیت نقاط جدایش چندگانه در یک شبکه تأمین را می‌توان در کار پژوهشی سونا و همکاران مشاهده کرد [۱۵]. اما این مدل هیچ تصمیم‌گیری در مورد اندازه بافر محصولات نیمه ساخته ارائه نمی‌دهد. سپس در پژوهشی دیگر نقطه نفوذ سفارش در سیستم‌های تولیدی در مقاله [۱] مورد بررسی قرار گرفته است که در آن تصمیم‌گیری روی نقطه تمایز یک سیستم تولیدی و نیز اندازه‌ی موجودی محصولات نیمه‌ساخته انجام می‌گیرد. علاوه بر این تیموری و همکاران یک زنجیره تأمین تولیدی چند محصولی و چند سطحی را در نظر گرفته‌اند که در آن تولیدکننده در اولین مرحله تولید برای هر نوع محصول، محصولات نیمه ساخته بر اساس سیاست MTS تولید می‌کند تا خرده‌فروش در دومین مرحله تولید محصولات سفارشی را بر اساس سیاست‌های MTO عرضه نماید [۱۶]. در مدلی دیگر، چنگ و همکاران سیستم صف مارکوفی با چند نوع مشتری و دو صف سری را مورد مطالعه قرار می‌دهند. در این مدل تصمیم روی نوع سیستم تولیدی مورد بررسی قرار نگرفته است [۱۷]. به همین ترتیب زنجیره تأمین معرفی شده توسط کامینسکی و کاپا شامل یک تولیدکننده و یک تأمین‌کننده در محیطی احتمالی است. به عبارت دیگر، یک زنجیره تأمین دو سطحی چند محصولی در نظر گرفته شده است. آن‌ها پس از انجام آنالیزهای لازم به این نتیجه رسیدند که هزینه روش ترکیبی از روش‌های تولید بر اساس انباشته و تولید بر اساس سفارش خالص بهتر است. همچنین هزینه در حالت غیرمتمرکز بیشتر از حالت غیرمتمرکز با اطلاعات کامل و آن نیز بیشتر از حالت متمرکز می‌باشد [۱۸]. جوکز و آلفا مدلی برای متمایزسازی محصول در زنجیره تأمین ارائه کردند. در این مدل محصول نیمه‌ساخته که درصدی از آن تکمیل شده وارد انبار کالاهای نیمه ساخته با ظرفیت مشخص می‌شود و از راهبرد متمایزسازی برای مدیریت هزینه‌های نگهداری استفاده می‌شود. در این مدل تصمیمات قیمت مورد توجه نبوده است [۱]. المهداو و جوکز مدلی برای متمایزسازی محصول در سیستم‌های MTO/MTS ارائه کردند. در این تحقیق نیز همانند مدل قبل محصول نیمه‌ساخته که درصدی از آن تکمیل شده وارد انبار کالاهای نیمه‌ساخته با ظرفیت مشخص می‌شود و از راهبرد متمایزسازی برای مدیریت هزینه‌های نگهداری استفاده می‌شود. آن‌ها به منظور استفاده از صرفه‌جویی و بهره‌گیری از اقتصاد به مقیاس، سیاست سفارش‌دهی بسته‌ای را در نظر گرفتند. هدف این مقاله شامل تعیین اندازه بهینه انبار میانی و میزان

متعددی در زنجیره تأمین توسعه یافته‌اند. در میان آن‌ها استراتژی تأخیر یک ابزار کاراست که به‌طور گسترده‌ای به کار می‌رود. در این استراتژی دو مسئله وجود دارد: (۱) تعیین نقطه نفوذ سفارش^۱ و (۲) کنترل موجودی کالاهای نیمه ساخته [۸].

مقالات متعددی در حوزه تصمیم‌گیری برای تمایزسازی محصول با تأخیر^۲ وجود دارد. این مقالات تحت عناوینی از جمله نقطه جدایش^۳، نقطه نفوذ سفارش^۴ و تعویق سفارشی‌سازی بیان شده‌اند [۹]. روش‌های متعددی برای تعیین نقطه نفوذ سفارش در تحقیقات (۱۰-۱۳) و (۲) ارائه شده است. تحقیقات در زمینه سیستم‌های MTS/MTO^۵ به چهار دسته اصلی تقسیم می‌شوند [۵]. اولین دسته در مورد مدیریت موجودی کالاهای نیمه‌ساخته در بین دو ایستگاه تولیدی است. دومین دسته از تحقیقات در مورد تعیین نقطه بهینه متمایزسازی یا نقطه نفوذ سفارش^۶ می‌باشد. دسته سوم تحقیقات به طراحی بهینه و پیکربندی محصولات نیمه‌ساخته با توجه به اشتراکی که بین محصولات نهایی وجود دارد، می‌پردازد. نهایتاً، تحقیقات دسته چهارم به ایجاد هماهنگی بین دو ایستگاه تولیدی متمرکز می‌شوند.

در ادامه، این مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش دوم، مرور ادبیاتی بر تعیین نقطه نفوذ سفارش در سیستم‌های تولیدی ترکیبی و به‌کارگیری تئوری صف در تحلیل این سیستم‌ها بیان می‌شود. در بخش سه، مدل‌سازی مسئله به صورت یک زنجیره مارکوف زمان پیوسته توضیح داده می‌شود. در بخش چهارم، روش تحلیل ماتریس به‌منظور تعیین احتمالات پایداری و محاسبه شاخص‌های ارزیابی عملکرد ارائه می‌گردد. در بخش پنجم، تابع هدف و محدودیت‌های مسئله به‌منظور تعیین نقطه بهینه نفوذ سفارش و ظرفیت بهینه انبار میانی مطرح می‌گردد. در بخش ششم، یک مثال عددی و تحلیل حساسیت بر اساس پارامترهای مسئله ارائه می‌شود. در نهایت در بخش هفتم، نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی بیان می‌گردد.

۲- مرور ادبیات و پیشینه تحقیق

در این بخش به بررسی مقالاتی در زمینه متمایزسازی با تأخیر محصولات در سیستم‌های تولیدی MTS/MTO و تعیین نقطه بهینه نفوذ سفارش و سطح بهینه موجودی محصولات نیمه ساخته پرداخته می‌شود. گوپتا و بنجافر تأثیر محدودیت و مازاد ظرفیت را در نظر گرفتند. آن‌ها یک چارچوب مشترک برای بررسی سیستم‌های تولید برای انباشته^۷ تولید برای سفارش و نقطه نفوذ سفارش پیشنهاد

1. Make To Order
2. Delayed Product Differentiation (DPD)
3. Decoupling Point (DP)
4. Order Penetration Point (OPP)
5. Make To Order

۶. درصدی از فرآیند تولید محصول که در مرحله MTS تکمیل می‌شود.

7. Make To Stock

در این تحقیق یک سیستم تولیدی ترکیبی MTS/MTO مورد بررسی قرار گرفته که در ایستگاه اول، کالاهای نیمه‌ساخته تولید و در انبار میانی (بافر) نگهداری می‌شوند. پس از دریافت سفارش مشتری کالای نیمه‌ساخته در ایستگاه دوم تکمیل و به مشتری تحویل داده می‌شوند. تقاضای مشتریان دارای توزیع پواسون و به صورت ورود گروهی می‌باشد. زمان تولید در ایستگاه اول دارای توزیع نمایی و در ایستگاه دوم دارای توزیع ارلنگ نوع k می‌باشد. پس از تعیین احتمالات پایداری بر اساس روش تحلیل ماتریس، نقطه بهینه نفوذ سفارش و ظرفیت بهینه بافر بر اساس مینیمم‌سازی هزینه کل که شامل هزینه‌های نگهداری، کسری و تولید کالاهای نامنطبق با سفارش مشتری می‌باشد تعیین گردید.

۳- نمادها و مدل‌سازی مسئله

در این بخش به معرفی نمادها و بیان مدل‌سازی مسئله می‌پردازیم.

۳-۱- نمادها

علائم اختصاری این مدل به صورت زیر تعریف می‌شود:

متغیرهای تصمیم

S ظرفیت انبار میانی (بافر)

θ درصد تکمیل محصول در مرحله اول تولید

پارامترها

Q ماتریس مولد

λ_1 نرخ ورود سفارشات تکی

λ_2 نرخ ورود سفارشات دوتایی

μ_1' نرخ تولید در ایستگاه اول (توزیع نمایی) در صورتی که تمام مراحل تولید در ایستگاه اول انجام شود

μ_2' نرخ تولید در ایستگاه سفارشی سازی یا تولید برای سفارش (توزیع ارلنگ) در صورتی که تمام مراحل تولید در ایستگاه دوم انجام شود

i تعداد مشتریان در سیستم در انتظار دریافت کالای نهایی

j تعداد کالاهای نیمه‌ساخته در بافر

k تعداد مراحل تولید

۳-۲- مدل‌سازی مسئله

در این مقاله یک سیستم تولیدی MTS/MTO در نظر گرفته شده است. این سیستم تولیدی شامل دو مرحله است که در مرحله اول کالاهای نیمه‌ساخته تولید شده و در انبار (بافر) نگهداری می‌شوند و در مرحله دوم پس از دریافت سفارش مشتری کالای نیمه‌ساخته به منظور تأمین سفارش مشتری تکمیل (سفارشی‌سازی) می‌شوند. زمان پردازش در مرحله اول تولید نمایی و در مرحله دوم ارلنگ نوع k می‌باشد. تقاضای مشتریان نیز دارای توزیع پواسون و به صورت ورود گروهی می‌باشد.

سفارش‌دهی می‌باشد [۵]. ژو و همکاران یک شبکه صف سری^۱ شامل دو مرحله در نظر گرفتند. در مرحله اول کالاهای نیمه‌ساخته تولید شده و سپس در مرحله دوم بر اساس سفارشات مشتری تکمیل می‌گردند. در این سیستم تولیدی سفارش‌های مشتریان شامل دو نوع است: (۱) سفارش‌های عادی و (۲) سفارش‌های ویژه. سفارشات عادی از طریق تکمیل کالاهای نیمه‌ساخته برآورده می‌شوند. در حالی که پس از دریافت سفارشات ویژه فرآیند تولید از ابتدای مرحله اول شروع می‌شود. سفارش‌های مشتریان بر اساس فرآیند پواسون وارد می‌شوند. با تقریب توزیع پواسون با استفاده از توزیع نرمال، سطح بهینه موجودی و سطح خدمت محاسبه شدند [۷]. ژو و همکاران در مقاله خود یک شبکه صف دو مرحله‌ای را در نظر گرفتند که در آن فرآیند ورود مارکوفی بود. در این مقاله، با استفاده از روش هندسه ماتریس^۲ عملکرد زنجیره تأمین از جمله سطح موجودی محصولات نیمه ساخته، سطح خدمت و نقطه نفوذ سفارش ارزیابی شده است [۸]. در مقاله [۲]، در تحلیل متمایزسازی با تأخیر محصول، عملکرد تأمین‌کننده در تأمین مواد اولیه را نیز علاوه بر عوامل دیگر مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها بیان کردند که عملکرد تأمین‌کننده نقش مهمی در تعیین نقطه نفوذ سفارش دارد.

دسته‌بندی مقالات اصلی بررسی شده در جدول (۱) آمده است:

جدول (۱): دسته‌بندی مقالات اصلی مورد بررسی

مقاله	تقاضا		تعیین DP	نوع مدل صف	نوع شبکه
	قطعی	تصادفی			
گوپتا و بنجافرا (۲۰۰۴)	*	*	*	M/M/1	
سونا و همکاران (۲۰۰۸)	*			M/M/1	Tandem queuing network
جوکر و آلفا (۲۰۰۹)	*	*	*	M/M/1	Tandem queuing network
تیموری و همکاران (۲۰۱۱)	*			M/M/1	
کامینسکی و کایا (۲۰۰۹)	*			M/G/1	
چنگ و همکاران (۲۰۰۹)	*			D/M/c D/M/1	Tandem queuing network
المهداو و جوکر (۲۰۱۳)	*			Er/M/1 M/M/1	Tandem queuing network
ژو و همکاران (۲۰۱۳)				M/M/1	Tandem queuing network
ژو و همکاران (۲۰۱۴)			*	MAP/M/1	
تحقیق حاضر	*	*	*	BAMP/Er/1	Tandem queuing network

1. Tandem

۲. در روش هندسه ماتریس احتمالات پایداری از رابطه تکراری زیر حاصل می‌شوند:

$$\pi_i = \pi_{i-1} R \quad i = 2, 3, \dots$$

که با استفاده از رابطه $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\pi_i = \pi_1 R^{i-1} \quad i = 2, 3, \dots$$

احتمالات پایداری لازم است ماتریس G محاسبه شود. این ماتریس به شکلی تعریف می گردد که رابطه (۳) برقرار باشد:

$$G = \sum_{i=0}^{\infty} A_i G^i \quad (3)$$

که در آن کوچکترین جواب غیر منفی مورد نظر می باشد. در صورتی که $G_{(0)} = 0$ باشد، آنگاه ماتریس G از رابطه تکراری (۴) حاصل می شود:

$$G_{(j+1)} = \sum_{i=0}^{\infty} A_i G_{(j)}^i, \quad j = 0, 1, \dots \quad (4)$$

پس از محاسبه ماتریس G ، به منظور محاسبه احتمالات پایداری لازم است ماتریس های B_{0i}^* و A_i^* از طریق رابطه های (۵)، (۶) و (۷) محاسبه شوند:

$$B_{0i}^* = B_{0i} + B_{0,i+1}G + B_{0,i+2}G^2 + \dots = \sum_{k=i}^{\infty} B_{0k}G^k \quad (5)$$

$$A_1^* = I - A_1 - A_2G - A_3G^2 + \dots = I - \sum_{k=1}^{\infty} A_k G^{k-1} \quad (6)$$

$$A_i^* = -A_i - A_{i+1}G - A_{i+2}G^2 + \dots - \sum_{k=i}^{\infty} A_k G^{k-1}, \quad i \geq 2 \quad (7)$$

با حل معادله (۸) زیر، π_0 حاصل می شود:

$$\pi_0(I - B_{00} - B_{01}^* - A_1^{*-1}A_0) = 0 \quad (8)$$

بردار π_1 نیز بر اساس رابطه (۹) به دست می آید:

$$\pi_1 = \pi_0 - B_{01}^*A_1^{*-1} \quad (9)$$

به منظور نرمالیزه کردن احتمالات پایداری شرط زیر باید برقرار باشد:

$$\pi_0 e + \pi_0 (\sum_{i=1}^{\infty} B_{0i}^*) (\sum_{i=1}^{\infty} A_i^*)^{-1} e = 1 \quad (10)$$

پس از محاسبه π_0 سایر مؤلفه های احتمالات پایداری قابل محاسبه می باشند. در حالت کلی مقدار احتمالات پایداری از طریق رابطه (۱۱) محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} \pi_i &= (\pi_0 B_{0i}^* - \pi_1 A_i^* - \pi_2 A_{i-1}^* - \dots \\ &\quad - \pi_{i-1} A_2^*) A_1^{*-1}, \quad i = 1, 2, \dots \\ &= (\pi_0 B_{0i}^* - \sum_{k=1}^{i-1} \pi_k A_{i-k+1}^*) A_1^{*-1} \end{aligned} \quad (11)$$

۵- تابع هدف

پس از تعیین احتمالات پایداری، لازم است تابع هدف که شامل هزینه های نگهداری کالاهای نیمه ساخته، هزینه ساخت کالاهای نامنطبق با سفارش مشتری و هزینه کسری می باشد، ارائه گردد. برای

تعریف تابع هدف ابتدا لازم است نمادهای زیر معرفی گردند:

C_h هزینه نگهداری کالاهای نیمه ساخته

C_B هزینه سفارشات پس افت

C_U هزینه ساخت کالاهای نیمه ساخته نامنطبق

c_h هزینه نگهداری یک واحد کالای نیمه ساخته

c_B هزینه یک واحد سفارش پس افت

c_U هزینه ناشی از یک واحد کالای نیمه ساخته نامنطبق

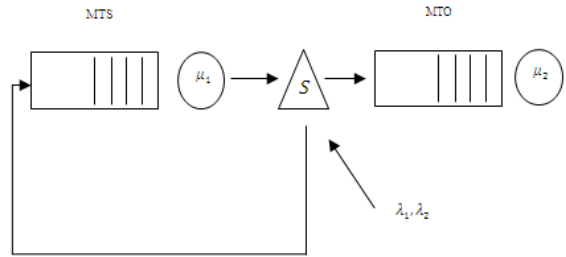
$\pi(1)$ بردار احتمالات پایدار تعداد مشتریان در سیستم

$\pi(2)$ بردار احتمالات پایدار تعداد کالای نیمه ساخته در بافر

$E(I)$ متوسط موجودی کالاهای نیمه ساخته

$E(B)$ متوسط تعداد سفارشات پس افت

$E(U)$ متوسط تعداد کالاهای نیمه ساخته نامنطبق در واحد زمان



شکل (۱): سیستم تولیدی MTS/MTO

فضای حالت زنجیره مارکوف زمان پیوسته این مسئله به صورت $\{(i, j, k) | 0 \leq k \leq 2\}$ تعریف می شود. این زنجیره مارکوف، یک زنجیره مارکوف Block Upper-Hessenberg است که ماتریس انتقال آن به صورت زیر تعریف می گردد [۱۹]:

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} i=0 & i=1 & i=2 & i=3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} i=0 \\ i=1 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & B_{02} & B_{03} \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ & A_0 & A_1 & A_2 \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

که هر یک از زیر ماتریس های $B_{00}, B_{01}, B_{02}, B_{03}, A_0, A_1, A_2, A_3$ در پیوست (۱) آورده شده اند. در ماتریس های ارائه شده در پیوست (۱) آورده شده اند. در ماتریس های ارائه شده در پیوست (۱) آورده شده اند. در ماتریس های ارائه شده در پیوست (۱) آورده شده اند. در ماتریس های ارائه شده در پیوست (۱) آورده شده اند.

۴- روش تحلیل ماتریس

برای محاسبه احتمالات حالات پایداری سیستم، بر اساس روش تحلیل ماتریس ابتدا لازم است ماتریس احتمالات انتقال محاسبه و سپس مراحل زیر انجام شود (توضیحات بیشتر در پیوست (۲) آورده شده است).

۴-۱- شرط پایداری

در صورتی که ماتریس $A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$ باشد، شرط پایداری سیستم توسط رابطه (۱) بیان می شود:

$$\pi_A (\sum_{i=1}^{\infty} i A_i e) < 1 \quad (1)$$

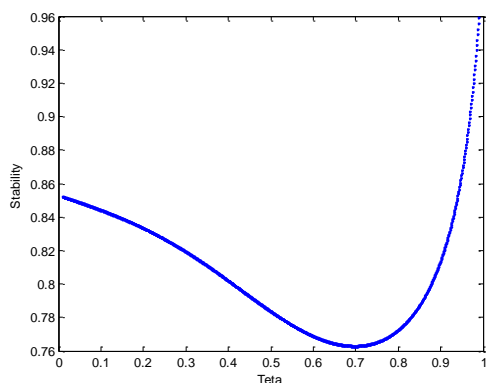
و احتمالات پایداری ماتریس A با استفاده از طریق روابط زیر محاسبه می شوند:

$$\pi_A A = \pi_A, \quad \pi_A e = 1 \quad (2)$$

۴-۲- محاسبه احتمالات پایداری

احتمالات پایداری به صورت $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)$ می باشد، در حالی که $\pi_i = (\pi(i, 1), \pi(i, 2), \dots)$ است. برای محاسبه

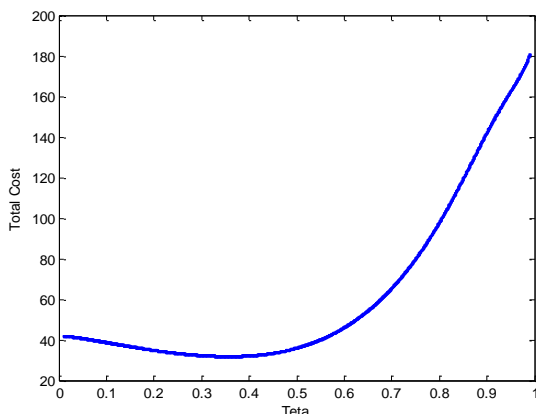
۱. در فرآیند مارکوف Block Upper-Hessenberg انتقال از هر سطح به سطح های بالاتر امکان پذیر است و از طریق روش تحلیل ماتریس حل می شود.



شکل (۲): مقدار عبارت شرط پایداری برای مقادیر مختلف θ به ازای $S = 5$

همان‌طور که در شکل (۲) مشخص است مقدار عبارت شرط پایداری برای مقادیر مختلف θ به ازای $S = 5$ کوچک‌تر از یک می‌باشد.

پس از محاسبه ماتریس G و احتمالات پایداری، مقدار تابع هدف به ازای مقادیر مختلف θ به منظور تعیین درصد تکمیل محصولات در ایستگاه اول (نقطه نفوذ سفارش) محاسبه می‌شود. در صورتی که هزینه نگهداری هر واحد کالا در واحد زمان برابر $C_h = 5$ و هزینه کسری به ازای هر واحد کالا برابر $C_B = 50$ و هزینه هر واحد کالای نامنطبق برابر $C_U = 25$ باشد، مقدار تابع هدف به ازای مقادیر مختلف θ به ازای $S = 5$ در شکل (۳) آورده شده است:



شکل (۳): مقدار تابع هدف به ازای مقادیر مختلف θ به ازای $S = 5$

همان‌طور که در شکل فوق مشخص است مقدار بهینه θ برابر 0.36 و مقدار بهینه تابع هدف در این حالت ($S = 5$) برابر 31.97 می‌باشد. مقدار بهینه تابع هزینه به ازای مقادیر مختلف S (ظرفیت انبار کالاهای نیمه‌ساخته) و مقدار بهینه θ (درصد تکمیل محصولات در ایستگاه اول تولید) در جدول (۲) نشان داده شده است.

ϕ درصدی از کالاهای نیمه‌ساخته که برای سفارشی‌سازی مناسب نیستند ($\phi = b\theta^n, 0 \leq b \leq 1, n \geq 1$)

متوسط موجودی کالاهای نیمه‌ساخته در انبار میانی (بافر) برابر است با:

$$E(I) = \sum_{j=1}^M j\pi(2)_j \quad (12)$$

متوسط تعداد سفارشات پس‌افت ($E(B)$) بر اساس رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود:

$$E(B) = \sum_{i=S+1}^M (i-S)\pi(1)_i \quad (13)$$

متوسط تعداد کالاهای نیمه‌ساخته نامنطبق با سفارشات مشتریان ($E(U)$) بر حسب رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود:

$$E(U) = \frac{(1-\pi(2)_S)\phi\mu}{\theta} \quad (14)$$

بر اساس تحقیق جوکر و آلفا (۲۰۰۹) احتمال عدم انطباق کالاهای نیمه‌ساخته با سفارش مشتریان (ϕ) می‌تواند به صورتی تابعی از نقطه نفوذ سفارش ($\phi = b\theta^n$) بیان شود.

تابع هدف شامل هزینه‌های نگهداری کالاهای نیمه‌ساخته در انبار میانی (C_h)، هزینه کسری (C_B) و هزینه ناشی از کالاهای نیمه‌ساخته نامنطبق (C_U) می‌باشد که به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌شود:

$$TC = C_h + C_B + C_U \quad (15)$$

رابطه (۱۵) را می‌توان به صورت رابطه (۱۶) نیز نوشت:

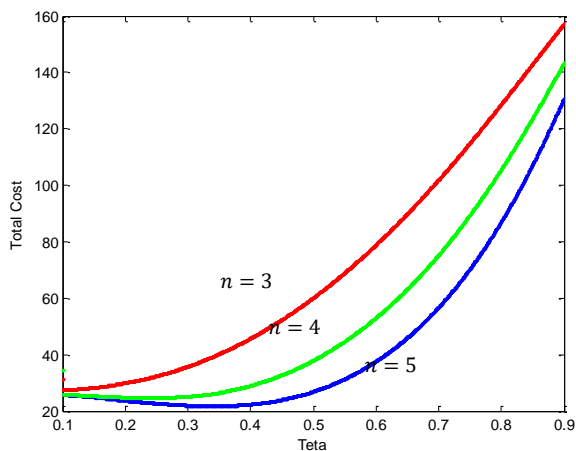
$$TC = hE(I) + c_B E(B) + c_U E(U) \quad (16)$$

۶- مثال عددی

در این بخش یک سیستم تولیدی شامل دو ایستگاه در نظر گرفته شده است. زمان پردازش در ایستگاه اول تولید دارای توزیع نمایی با نرخ $\mu_1 = 5$ و در ایستگاه دوم آرلنگ نوع ۲ با نرخ $\mu_2 = 3$ می‌باشد. تقاضای مشتریان نیز دارای توزیع پواسون و به صورت ورودگروهی می‌باشد. مشتریانی که تقاضای یک کالا دارند با نرخ $\lambda_1 = 5$ و مشتریانی که تقاضای دو کالا دارند با نرخ $\lambda_2 = 2$ مراجعه می‌کنند ($\phi = \theta^5$).

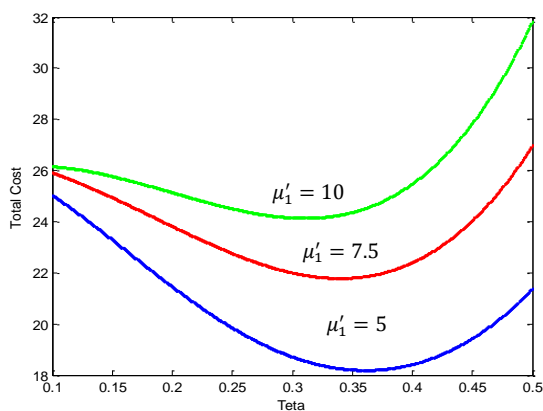
قبل از محاسبه احتمالات پایداری لازم است شرط پایداری سیستم مورد بررسی قرار گیرد. در صورتی که ماتریس باشد، شرط پایداری سیستم توسط رابطه $A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$ $\pi_A(\sum_{i=1}^{\infty} iA_i e) < 1$ بیان می‌شود. مقدار عبارت شرط پایداری به ازای مقادیر مختلف θ در بازه $[0, 1]$ به صورت شکل (۲) می‌باشد:

همچنین مقدار هزینه کل به ازای توابع مختلف احتمال عدم انطباق کالاهاى نیمه ساخته $\phi = \theta^n$ (احتمال عدم انطباق کالای نیمه ساخته با سفارش های مشتریان) در شکل (۶) نشان داده شده است:



شکل (۶): هزینه کل به ازای توابع مختلف $\phi = \theta^n$ و $S = 8$

همان طور که در شکل فوق مشخص است با افزایش مقدار n مقدار بهینه θ افزایش ولی هزینه کل کاهش می یابد. همچنین با افزایش نرخ سرویس دهی در ایستگاه اول مقدار بهینه نقطه نفوذ سفارش (θ) کاهش و هزینه کل به دلیل افزایش تولید کالاهاى نیمه ساخته نامنطبق با سفارش مشتریان افزایش می یابد (شکل ۷).



شکل (۷): هزینه کل به ازای مقادیر مختلف μ'_1 و $S = 8$

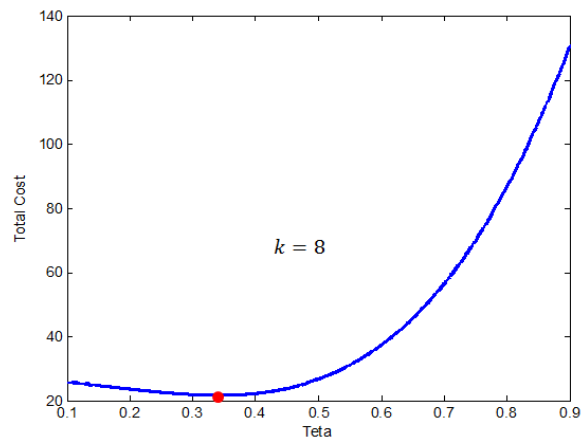
۷- نتیجه گیری

در این مقاله یک سیستم تولیدی ترکیبی شامل دو ایستگاه در نظر گرفته شد که در ایستگاه اول کالاهاى نیمه ساخته تولید شده و در انبار میانی (بافر) نگهداری و سپس در ایستگاه دوم پس از دریافت سفارش مشتری کالای نیمه ساخته به منظور تأمین سفارش مشتری تکمیل می شوند. در این تحقیق، نقطه بهینه نفوذ سفارش و ظرفیت بهینه بافر بر اساس حداقل هزینه کل شامل هزینه های نگهداری، کسری و تولید کالاهاى نامنطبق با سفارش مشتری تعیین شدند. به منظور تعیین هزینه های بیان شده، احتمالات پایداری در فرآیند تصادفی مربوط به این سیستم تولیدی با استفاده از روش تحلیل ماتریس محاسبه گردید. نتایج نشان داد اگر چه تغییر ظرفیت انبار

جدول (۲): مقدار بهینه θ و هزینه کل به ازای مقادیر مختلف

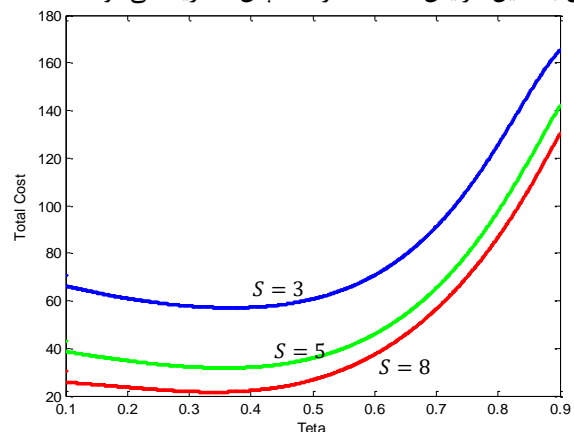
ظرفیت بافر	مقدار بهینه θ	هزینه کل
2	۰/۳۳	۶۱/۱۲
3	۰/۳۶۶	۵۷/۲۸
4	۰/۳۴۸	۴۰/۹۸
5	۰/۳۵۶	۳۱/۹۷
6	۰/۳۲	۲۵/۰۰
7	۰/۳۵	۲۴/۲۷
8	۰/۳۳	۲۲/۵۹
9	۰/۳۷	۲۲/۲۳
10	۰/۳۶	۲۴/۸۳
11	۰/۳۵۵	۲۷/۰۳
12	۰/۳۶	۲۹/۳۶

همان طور که در جدول (۲) نشان داده شده است، در این مطالعه موردی ظرفیت بهینه انبار برابر ۸ و مقدار بهینه نقطه نفوذ سفارش و هزینه کل در این حالت به ترتیب برابر ۰/۳۳ و ۲۲/۵۹ است. جواب بهینه در این حالت در شکل (۴) مشخص شده است:



شکل (۴): مقدار تابع هدف به ازای مقادیر مختلف θ و $S = 8$

در شکل (۵) مقادیر تابع هزینه به ازای مقادیر مختلف θ و S آورده شده است. همانطور که در شکل نشان داده شده است با کاهش ظرفیت انبار میانی به ازای مقادیر کمتر از ظرفیت بهینه مقدار هزینه کل به دلیل افزایش تعداد سفارشات پس افت زیاد می شود:



شکل (۵): تابع هزینه به ازای مقادیر مختلف θ و $S = 3, 5, 8$

$$\pi_0(-B_{01}^*, -B_{02}^*, \dots) = (\pi_1, \pi_2, \dots)U \quad (12)$$

در رابطه بالا B_{0i}^* به صورت زیر محاسبه می شود:

$$B_{01}^* = B_{01} + B_{02}G + B_{03}G^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} B_{0k}G^k \quad (13)$$

$$B_{02}^* = B_{02} + B_{03}G + B_{04}G^2 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} B_{0k}G^k \quad (14)$$

$$B_{0i}^* = B_{0i} + B_{0,i+1}G + B_{0,i+2}G^2 + \dots = \sum_{k=i}^{\infty} B_{0k}G^k \quad (15)$$

که در نهایت رابطه (12) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\pi_0(-B_{01}^*, -B_{02}^*, \dots) = (\pi_1, \pi_2, \dots) \begin{pmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* & A_4^* & \dots \\ 0 & A_1^* & A_2^* & A_3^* & \dots \\ 0 & 0 & A_1^* & A_2^* & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_1^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (16)$$

• محاسبه ماتریس U

بر اساس رابطه (5) و (6) ماتریس UL برابر است با:

$$UL = \begin{pmatrix} I - A_1 & -A_2 & -A_3 & \dots & -A_j & \dots \\ -A_0 & I - A_1 & -A_2 & \dots & -A_{j-1} & \dots \\ 0 & -A_0 & I - A_1 & \dots & -A_{j-2} & \dots \\ 0 & 0 & -A_0 & \dots & -A_{j-3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (17)$$

بنابراین ماتریس U به صورت زیر محاسبه می شود:

$$U = \begin{pmatrix} I - A_1 & -A_2 & -A_3 & \dots & -A_j & \dots \\ -A_0 & I - A_1 & -A_2 & \dots & -A_{j-1} & \dots \\ 0 & -A_0 & I - A_1 & \dots & -A_{j-2} & \dots \\ 0 & 0 & -A_0 & \dots & -A_{j-3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} L^{-1} \quad (18)$$

همچنین بر اساس رابطه (7) ماتریس U برابر است با:

$$U = \begin{pmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* & A_4^* & \dots \\ 0 & A_1^* & A_2^* & A_3^* & \dots \\ 0 & 0 & A_1^* & A_2^* & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_1^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (19)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* & A_4^* & \dots \\ 0 & A_1^* & A_2^* & A_3^* & \dots \\ 0 & 0 & A_1^* & A_2^* & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_1^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - A_1 & -A_2 & -A_3 & \dots & -A_j & \dots \\ -A_0 & I - A_1 & -A_2 & \dots & -A_{j-1} & \dots \\ 0 & -A_0 & I - A_1 & \dots & -A_{j-2} & \dots \\ 0 & 0 & -A_0 & \dots & -A_{j-3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} L^{-1} \quad (20)$$

با جایگذاری L^{-1} ، ماتریس های A_i^* به صورت زیر به دست می آیند:

$$A_1^* = I - A_1 - A_2G - A_3G^2 + \dots = I - \sum_{k=1}^{\infty} A_k G^{k-1} \quad (21)$$

$$A_i^* = -A_i - A_{i+1}G - A_{i+2}G^2 + \dots = -\sum_{k=i}^{\infty} A_k G^{k-1}, \quad i \geq 2 \quad (22)$$

$$A_3 = \begin{matrix} & & j=0 & & & & j=S-2 & & & & \\ & & k & \dots & 1 & 0 & \dots & k & \dots & 2 & 1 & \dots \\ \begin{matrix} j=0 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} & \left\{ \begin{matrix} \lambda_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix} \right. & \dots \end{matrix}$$

پیوست ۲

پس از محاسبه ماتریس G احتمالات پایداری محاسبه می شوند. از رابطه $\pi(I - P) = 0$ داریم:

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_j, \dots) \times \begin{pmatrix} I - B_{00} & -B_{01} & -B_{02} & -B_{03} & \dots & -B_{0j} & \dots \\ -B_{10} & I - A_1 & -A_2 & -A_3 & \dots & -A_j & \dots \\ 0 & -A_0 & I - A_1 & -A_2 & \dots & -A_{j-1} & \dots \\ 0 & 0 & -A_0 & I - A_1 & \dots & -A_{j-2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -A_0 & \dots & -A_{j-3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (0, 0, \dots, 0, \dots) \quad (5)$$

حاصلضرب فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_j, \dots) \begin{pmatrix} I - B_{00} & -B_{01} & -B_{02} & -B_{03} & \dots & -B_{0j} & \dots \\ -B_{10} & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ UL \\ \\ \\ \end{matrix} = (0, 0, \dots, 0, \dots) \quad (6)$$

که ماتریس های U و L به صورت زیر تعریف می شوند:

$$U = \begin{pmatrix} A_1^* & A_2^* & A_3^* & A_4^* & \dots \\ 0 & A_1^* & A_2^* & A_3^* & \dots \\ 0 & 0 & A_1^* & A_2^* & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_1^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -G & I & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -G & I & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -G & I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (8)$$

رابطه (6) را می توان به صورت رابطه (9) بیان کرد:

$$\pi_0(-B_{01}, -B_{02}, \dots) + (\pi_1, \pi_2, \dots)UL = 0 \quad (9)$$

بنابراین:

$$\pi_0(-B_{01}, -B_{02}, \dots)L^{-1} = (\pi_1, \pi_2, \dots)U \quad (10)$$

$$\pi_0(-B_{01}, -B_{02}, \dots) \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 & \dots \\ G & I & 0 & 0 & \dots \\ G^2 & G & I & 0 & \dots \\ G^3 & G^2 & G & I & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \dots)U \quad (11)$$

رابطه (11) را می توان به صورت رابطه زیر نوشت:

66(4): 643-652.

- [8] Zhou, W., Huang, W., Zhang, R. (2014). "A two-stage queueing network on form postponement supply chain with correlated demands", *Applied Mathematical Modeling* 38(11-12): 2734-2743.
- [9] Yang, B., Burns, N.D., Bakhouse, C.J. (2004). "Postponement: a review and an integrated framework", *International Journal of Operations and Production Management*, 24(5): 468-487.
- [10] Olhager, J. (2003). "Strategic positioning of the order penetration point", *International Journal of Production Economic*, 85: 319-329.
- [11] Yang, B., Burns, N.D. (2003). "Implications and postponement for the supply chain", *International Journal of Production Research* 41(9): 2079-2090.
- [12] Mikkola, J.H., Larson, T.S. (2004). "Supply chain integration: implication for mass customization modularization and postponement strategies", *Production Planning and Control*, 15(4): 352-361.
- [13] Ahmadi, M., Teimouri, E. (2008). "Determining the Order Penetration Point in Auto Export Supply Chain by the Use of Dynamic Programming", *Journal of Applied Sciences* 8(18): 3214-3220.
- [14] Gupta, D., Benjaafar, S. (2004). "Make-to-order, make-to-stock, or delay product differentiation? A common framework for modeling and analysis", *IIE Transactions* 36: 529-546.
- [15] Suna, X.Y., Suna, L.Y., Wang, Y.L. (2008). "Positioning multiple decoupling points in a Supply Network", *International Journal Production Economics* 113: 943-956.
- [16] Teimoury, E., Modarres, M., Khondabi, I.G., Fathi, M. (2012). "A queueing approach for making decisions about order penetration point in multi-echelon supply chains", *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Volume 63(1-4): 359-371.
- [17] Chang, K., Lu, Y. (2010). "Queueing analysis of a single-station make-to-stock/make-to-order inventory-production system", *Applied Mathematical Modeling*, 34: 978-991.
- [18] Kaminsky, P., Kaya, O. (2009). "Combined make-to-order/ make-to-stock supply chains", *IIE Transaction*, 41: 103-119.
- [19] Stewart, J.W. (2009). "Probability, Markov Chains, Queues, and Simulation: The Mathematical Basis of Performance Modeling", Princeton University Press.

• محاسبه π_0

بر اساس رابطه (۱۲) $(\pi_0(-B_{01}^*, -B_{02}^*, \dots) = (\pi_1, \pi_2, \dots)U$ رابطه (۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots)U = \begin{pmatrix} I - B_{00} & -B_{01}^* & -B_{02}^* & -B_{03}^* & \dots & -B_{0j}^* & \dots \\ -B_{10} & A_1^* & A_2^* & A_3^* & \dots & A_j^* & \dots \\ 0 & 0 & A_1^* & A_2^* & \dots & A_{j-1}^* & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_1^* & \dots & A_{j-2}^* & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= (0, 0, \dots, 0, \dots) \quad (23)$$

با انجام حاصلضرب فوق می‌توان نوشت:

$$\pi_0(I - B_{00} - B_{01}^* - A_1^{*-1}A_0) = 0 \quad (24)$$

$$\pi_1 = \pi_0 - B_{01}^*A_1^{*-1} \quad (25)$$

به منظور نرمالیزه کردن احتمالات پایداری شرط زیر باید برقرار باشد:

$$\pi_0 e + \pi_0 (\sum_{i=1}^{\infty} B_{0i}^*) (\sum_{i=1}^{\infty} A_i^*)^{-1} e = 1 \quad (26)$$

• محاسبه احتمالات پایداری π_i

پس از محاسبه π_0 و U سایر مؤلفه‌های احتمالات پایداری قابل محاسبه می‌باشند. در حالت کلی داریم:

$$\pi_i = (\pi_0 B_{0i}^* - \pi_1 A_i^* - \pi_2 A_{i-1}^* - \dots - \pi_{i-1} A_2^*) A_1^{*-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$= (\pi_0 B_{0i}^* - \sum_{k=1}^{i-1} \pi_k A_{i-k+1}^*) A_1^{*-1} \quad (27)$$

مراجع

- [1] Jewkes, E.M., Alfa, A.S. (2009). "A queueing model of delayed product differentiation", *European Journal of Operational Research* 199: 734-743.
- [2] Ngniatedema, T., Fono, L.A. and Mbondo, G.D. (2015). "A delayed product customization cost model with supplier delivery performance", *European Journal of Operational Research* 243(1): 109-111.
- [3] خسروشاهی، ح، معطر حسینی، س. م.، مرجانی، م. ر.، (۱۳۹۳)، "اندازه‌گیری اثر شلاق چرمی در یک زنجیره تأمین خطی سه سطحی با استفاده از روش میانگین متحرک با استفاده از روش میانگین متحرک برای برآورد تقاضا"، نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید ۲(۴): ۳۷-۲۱.
- [4] طالع‌زاده، ع.، صالحی، ع.، (۱۳۹۴)، "مدل کنترل موجودی با طول دوره بازپرسازی تصادفی و پرداخت معوقه برای کالاهای فسادپذیر"، نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید ۱(۵): ۲۵-۱۳.
- [5] Almehdawe, E., Jewkes, E. (2013). "Performance analysis and optimization of hybrid manufacturing systems under a batch ordering policy", *International Journal of Production Economic* 148(1): 200-208.
- [6] Li, L., Lee, Y.S. (1994). "Pricing and delivery-time performance in a competitive Environment", *Management Science*, 40(5): 633-646.
- [7] Zhou, W., Zhang, R., Zhou, Y. (2013). "A queueing model on supply chain with the form postponement strategy", *Computers & Industrial Engineering*



Analysing MTO/MTS Manufacturing System with Batch Arrival Poisson Process and Erlang Processing Time Through Queueing Theory

J .Bagherinejad^{1*}, A .Ghahghaei¹

¹ Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering, Alzahra University, Tehran, Iran.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 30 August 2015

Accepted 19 April 2016

Keywords:

Point of differentiation

Buffer size

MTO/MTS

Queueing theory

Analytic matrix approach

ABSTRACT

In this paper, a two-stage MTO/MTS manufacturing system is analysed through queueing theory. In the first stage, semi-finished items are manufactured and held in intermediate buffer which is controlled by base stock policy. In the second stage, semi-finished items are customized when customers' orders arrive. Processing time are assumed to be exponentially distributed at the stage one and follows Erlang distribution at the stage two. Demand follows a batch arrival Poisson process. Stationary probabilities are calculated using analytic matrix approach to evaluate performance measures and total cost function. Optimal point of differentiation and semi-finished goods buffer size are determined to minimize total cost function. Results show that optimal point of differentiation is not sensitive to semi-finished goods buffer size and customers' arrival rate but decreases as the probability of manufacturing unsuitable items and processing time at the first stage increases.

* Corresponding author. Jafar Bagherinejad
Tel.: 021-88044040; E-mail address: jbagheri@alzahra.ac.ir