



یادداشت فنی

ارایه یک رویکرد ابتکاری نوین برای ساده‌سازی گراف اولیه مسأله بیشینه جریان

وحید خداکرمی^{۱*}، وحید حاجی پور^۲، محمدرضا حسنی^۳

۱. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان
۲. دانشجوی دکتری گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان
۳. دانشجوی کارشناسی گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران

خلاصه

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۳/۷/۳۰

پذیرش ۱۳۹۴/۶/۳۱

کلمات کلیدی:

مسأله بیشینه جریان

گراف جهت‌دار

رویکرد ابتکاری

مسأله بیشینه جریان شبکه به دنبال یافتن بیشترین جریانی است که در شبکه می‌تواند از رئوس منبع به رئوس چاه منتقل شود. هدف از این تحقیق بهبود و ساده‌سازی گراف اولیه است که به‌عنوان گراف پایه برای حل به الگوریتم‌های بیشینه جریان شبکه داده می‌شود. در این صورت زمان حل مسأله کاهش می‌یابد. بسیاری از الگوریتم‌های بیشینه جریان با تکیه بر مفهوم سطح در گراف، بیشینه جریان را با پیدا کردن مسیر و ارسال آن به‌دست آورده‌اند. در این مقاله، با دقت به مفهوم عمق گراف در الگوریتم پیشنهادی، برآنیم از منطری جدید به مسأله پرداخته شود تا از پیچیدگی زمانی مسأله کاسته شود. در الگوریتم پیشنهادی سعی شده است با استفاده از مفهوم عمق در گراف، ابتدا با ساده‌سازی مسأله از طریق حذف کمان‌ها و رئوس، ابعاد و پیچیدگی محاسباتی مسأله کاهش یابد. این الگوریتم همچنین با مسائلی که در آنها چندین چشمه و چاه وجود دارد سازگار است. تحلیل روند و گام‌های حل، با استفاده از ماتریس تهیه شده از گراف مسأله بسیار ساده است و با دیگر الگوریتم‌های ارایه شده در ادبیات نیز سازگاری دارد. لذا به‌راحتی می‌توان پس از چند مرحله ساده‌سازی از دیگر روش‌ها، به ادامه حل مسأله پرداخت. در نهایت، عملکرد روش حل ارایه شده بر روی مسائل آزمایشی تولید شده با ابعاد مختلف مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و الگوریتم‌های موجود در ادبیات مورد مقایسه قرار گرفته شده است.

۱- مقدمه

طرح مسأله بیشینه جریان به دوران جنگ سرد باز می‌گردد، یعنی زمانی که کشور ایالات متحده امریکا به دنبال بررسی شبکه ریلی شوروی سابق بود. آن‌گونه که ذکر شده است هدف از این تحقیق ایجاد اختلال در سیستم حمل و نقل دشمنان بوده است. مسأله

بیشینه جریان به‌دنبال یافتن بیشترین مقدار جریانی است که می‌تواند با توجه به محدودیت‌هایی که هر کمان متصل‌کننده رئوس برای انتقال جریان دارد از رئوس منبع (تولیدکننده جریان) به رئوس چاه (دریافت‌کننده نهایی جریان) منتقل شود. این مسأله در واقع مدلی از شبکه‌های ارسال‌کننده جریان و شماره است و در زمینه خطوط انتقال شار (مانند خط لوله انتقال آب یا نفت)، حمل و نقل، شبکه انتقال برق، خط تولید (مانند محاسبه بیشینه کالایی که از خط خارج می‌گردد) و غیره کاربرد دارد [۱]، [۲]. به‌دلیل اهمیتی که

* نویسنده مسئول. وحید خداکرمی

تلفن: ۰۸۱-۳۸۲۹۲۵۰۵، پست الکترونیکی: v.khodakarami@basu.ac.ir

می‌شود. در این صورت پیچیدگی زمانی مسأله با کاهش تعداد راس‌ها و کمان‌ها کاهش می‌یابد. در مسأله بیشینه جریان شبکه، هدف یافتن بیشترین جریانی است که در شبکه می‌تواند از رئوس منبع به رئوس چاه منتقل شود. بسیاری از الگوریتم‌های بیشینه جریان با تکیه بر مفهوم سطح در گراف، بیشینه جریان را با پیدا کردن مسیر و ارسال آن به دست آورده‌اند [۲۱-۲۲]. در این مقاله با ارائه الگوریتمی جدید با دقت به مفهوم جست و جو در عمق گراف، برآنیم از منظری جدید به مسأله پرداخته شود تا از پیچیدگی مسأله کاسته شود. هیچ یک از الگوریتم‌های ارائه شده تاکنون از جست و جو در عمق گراف برای حل مسأله استفاده نکرده‌اند. در الگوریتم ارائه شده سعی بر آن است با استفاده از مفهوم عمق در گراف، با ساده‌سازی مسأله از طریق حذف کمان‌ها و رئوس ابعاد و پیچیدگی مسأله کاهش یابد. همچنین جریان، از مسیرهایی که در آن چشمه و چاه به یکدیگر با یک کمان متصل شده‌اند، عبور داده می‌شود. برخی از الگوریتم‌هایی که تاکنون مورد استفاده قرار گرفته‌اند با مسائلی که دارای چندین چشمه و چاه می‌باشند سازگار نبوده و باید با اعمال تغییراتی به مسائلی که دارای یک چشمه و یک چاه می‌باشند، تبدیل گردند [۲۳]. الگوریتم پیشنهادی با مسائلی که در آن‌ها چندین چشمه و چاه وجود دارد سازگار است. تحلیل روند و گام‌های حل با استفاده از ماتریس تهیه شده از گراف مسأله بسیار ساده است و با دیگر الگوریتم‌های ارائه شده در ادبیات نیز سازگاری دارد. لذا به راحتی می‌توان پس از چند مرحله ساده‌سازی از دیگر روش‌ها، به ادامه حل مسأله پرداخت. در ادامه ابتدا رویکرد ابتکاری پیشنهادی به تفصیل تشریح شده و سپس الگوریتم پیشنهادی بر روی مسائل مختلف مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و با رویه‌های موجود در ادبیات مقایسه می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی در بخش انتهایی ارائه می‌شود.

۲- رویکرد ابتکاری پیشنهادی

در این بخش، ابتدا مفاهیم و تعاریف مقدماتی مورد استفاده در تشریح الگوریتم معرفی شده، سپس فرضیات، شاخص‌ها و پارامترها تعریف می‌شوند و در نهایت الگوریتم ابتکاری به تفصیل تشریح می‌شود.

۲-۱- مفاهیم و تعاریف مقدماتی

مفاهیم و تعاریف استفاده شده در الگوریتم پیشنهادی به قرار زیر است:

تعریف ۱: ظرفیت کمان که بیشترین جریانی است که می‌تواند از کمان عبور کند.

تعریف ۲: راس چشمه^۲ که راس ارسال‌کننده جریان است؛ یعنی جهت همه کمان‌های آن رو به بیرون است.

تعریف ۳: راس چاه^۳ که راس دریافت‌کننده جریان است؛ یعنی جهت

این مسأله در محاسبه و تخمین بیشینه جریان شبکه‌ها برای طراحی و کنترل شبکه دارد، افراد بسیاری در طی سالیان گذشته، متدولوژی‌های گوناگونی را ارائه کرده‌اند. چهار سوئی و همکاران [۳] به بررسی مدل مکان یابی هاب بر مبنای صرفه‌جویی اقتصادی جریان‌ها با استفاده از وسایل حمل و نقل ظرفیت‌دار و محدودیت جریان ورودی به هاب پرداختند. این مسأله با بررسی جریان بیشینه در گراف‌های مسطح، برای اولین بار توسط هریس و راس [۴] به منظور تحلیل شبکه ریلی شوروی سابق مدل سازی و فرمول‌بندی شد. فورد و فالکرسون اولین الگوریتم را برای حل مسأله ارائه کرده و در ادامه این تحقیق معادل بودن مسأله برش کمینه و مسأله بیشینه جریان را اثبات کردند [۵-۶]. دینیک [۷] با روش مسیر افزایشی، مسأله را با زمان $O(V^2E)$ حل کرد. الگوریتم دینیک [۷] در سال ۱۹۷۲ به وسیله ادموندز و کارپ [۸] به الگوریتمی با زمان $O(EV^2)$ بهبود یافت. کارزانوف [۹] با استفاده از آزادسازی مسأله و با تعریف پیش جریان، توانست مسأله را در زمان $O(V^3)$ حل کند. روش او به سرعت می‌توانست جریان بلوکه شده را بیابد. اسلیتور و تارجان [۱۰] با مطرح کردن ساختار داده درخت پویا^۱، توانستند مقدار جریان روی هر مسیر به طول k را در زمان $O(\log k)$ تغییر دهند. در نتیجه این کار، گلدبرگ و تارجان [۱۲] روش ارسال-برچسب را با زمان $O(V \log k)$ ، به‌عنوان جایگزین روش‌های گذشته توسعه دادند و زمان $O(VE \log(V^2/E))$ را به‌عنوان یک کران چندجمله‌ای برای حل مطرح کردند. استفاده از این روش برای بالا بردن سرعت حل الگوریتم‌ها بسیار کارآمد بود. اخیراً اورلین [۱۳] و همچنین گلدبرگ و تارجان [۱۴] توانستند با توسعه یک روش به کران ارائه شده در [۱۲] یعنی زمان $O(VE \log(V^2/E))$ دست یابند.

با پیشرفت تحقیقات در زمینه بیشینه جریان، محققان بسیاری با استفاده از روش‌های ارائه شده و ترکیب یا توسعه آن‌ها به حل مسائل مشابه اقدام کردند و با در نظر گرفتن فرض‌ها و محدودیت‌های جدید به طرح و حل مسائل جدید پرداختند. از سوی دیگر تلاش افراد برای ارائه الگوریتم با زمان حل کوتاه‌تر افزایش یافت. الگوریتم‌های آهوجا و اورلین [۱۵] و الگوریتم جانسون و ونکاتسان [۱۶] با زمان حل $O(n^{3/2} \log n)$ و الگوریتم ریف [۱۷] با زمان حل $O(n \log^2(n))$ از جمله این تلاش‌ها می‌باشد. هم زمان با مطرح شدن مسائل جدید، میلر و ناوور [۱۸] با مطرح کردن مسائلی که در آن به جای یک چشمه و یک چاه، چندین چشمه و چندین چاه وجود داشت شرایط جدیدی را به مسأله اضافه نمودند و به حل آن پرداختند. در رقابت برای کاهش زمان حل مسأله، بوردایل و کلین [۱۹] زمان حل $O(n \log n)$ را برای حل مسأله ارائه دادند. همچنین کاپلان و ناسبام [۲۰] شبکه‌ای را مطرح کردند که هر یک از راس‌ها دارای محدودیت ظرفیتی بودند.

هدف از این تحقیق بهبود و ساده سازی گراف اولیه است که به عنوان گراف پایه برای حل به الگوریتم‌های بیشینه جریان شبکه داده

2. Source
3. Sink

1. Dynamic Tree Data Structure

۲-۴- تشریح الگوریتم

گام اول - آماده سازی ماتریس برای حل مسأله

در این گام، با توجه به گراف شبکه، باید ماتریس مربعی بالا مثلثی، مشابه جدول سفر^۱ یا جدول از-به^۲ تعریف شود. تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس به تعداد راس‌ها ($N \times N$) است و ترتیب قرار گرفتن رئوس در ماتریس باید بر اساس رعایت روابط پیش‌نیازی انجام شود. یعنی برای هر راس تا وقتی همه رئوسی که می‌توانند به آن جریان بفرستند، در ماتریس قرار نگرفته‌اند، آن راس حق وارد شدن به ماتریس را ندارد. در ابتدا رئوس چشمه، که هیچ پیش‌نیازی ندارند، به ترتیب در سطر و ستون ماتریس تعریف می‌شوند. در صورتی که دو راس شرایط یکسانی داشت، به دلخواه، یکی پس از دیگری به ماتریس وارد می‌شود.

سپس بقیه رئوس باید با رعایت روابط پیش‌نیازی در ماتریس قرار گیرند. پس از تعریف ساختار ماتریس درایه‌های آن عدددهی می‌شود. هر یک از درایه‌های قطر اصلی مقدار جریان موجود در راس است. در ابتدا مطابق رابطه (۱) جریان موجود در هر راس چشمه، برابر با مجموع ظرفیت کمان‌های خارج شده از آن راس قرار داده شود.

$$X_{n1} = \sum_{s=SI_{n1}(1)}^{SI_{n1}(s)} X_{ns1} \quad (1)$$

همچنین جریان موجود در هر راس چاه، با توجه به رابطه (۲) برابر با مجموع ظرفیت کمان‌های وارد شده به آن راس قرار داده شود.

$$X_{m1} = \sum_{t=TJ_{m1}(1)}^{TJ_{m1}(t)} X_{tm1} \quad (2)$$

این جریان برای چشمه مثبت و برای چاه منفی در نظر گرفته شود. جریان برای رئوس غیر چاه یا چشمه صفر منظور شود. درایه‌های بالای قطر اصلی ظرفیت کمان برای انتقال جریان از راسی به راس دیگر است. مقدار بیشینه جریان ($FMAX_0$) در ابتدای کار برابر صفر است.

گام دوم - گام تکرار

در این گام با توجه به ماتریس، یکی از دو حالت زیر رخ خواهد داد: الف) اگر اعداد روی قطر اصلی همگی بزرگتر یا مساوی صفر باشند (چاه وجود نداشته باشد) و یا اعداد روی قطر اصلی همگی کوچکتر یا مساوی صفر باشند (چشمه وجود نداشته باشد) در این حالت مقدار بیشینه جریان به دست آمده تاکنون، به‌عنوان جواب نهایی مسأله ثبت می‌شود و الگوریتم پایان می‌یابد.

ب) اگر اعداد روی قطر اصلی مختلف‌العلامه باشند (چشمه و چاه موجود است) که در این شرایط یکی از چهار حالت زیر مشاهده می‌شود:

همه کمان‌های آن رو به داخل است.

تعریف ۴: معکوس جریان که جریان تقاضا شده در راس چاه است (جریانی مجازی است) که با علامت منفی مدل شده است.

تعریف ۵: جریان موجود در راس که جریان و یا معکوس جریان دریافت شده از کمان‌های متصل به راس است. علامت جریان موجود در راس، مثبت؛ و علامت معکوس جریان موجود در راس منفی در نظر گرفته شده است.

تعریف ۶: جریان قطعی در شبکه که جریانی بدون نیاز به تصمیم‌گیری برای انتخاب مسیر و ارسال آن است.

تعریف ۷: عمق بعدی برای راس چشمه که به مجموعه راس‌های متصل به راس چشمه با مسیری به طول یک می‌گویند.

تعریف ۸: عمق قبلی برای راس چاه که به مجموعه راس‌های متصل به راس چاه با مسیری به طول یک می‌گویند.

۲-۲- فرضیات

در الگوریتم پیشنهادی پیش فرض بر آن است که :

- گراف جهت‌دار و غیرمدور است
- ظرفیت هر کمان محدود و ثابت است
- تعداد رئوس و کمان‌ها متناهی است

۲-۳- شاخص‌ها و پارامترها

k	شماره تکرار
m	شماره راس چاه در مجموعه چاه‌ها
n	شماره راس چشمه در مجموعه چشمه‌ها
s	شماره راس در مجموعه راس‌های عمق بعدی یک چشمه
t	شماره راس در مجموعه راس‌های عمق قبلی یک چاه
x	راس مبدا
y	راس مقصد
N	تعداد کل رئوس
I_k	مجموعه رئوس چشمه در تکرار k
J_k	مجموعه رئوس چاه در تکرار k
SI_{nk}	مجموعه رئوس عمق بعد از راس چشمه n در تکرار k
TJ_{mk}	مجموعه رئوس عمق قبل از راس m چاه در تکرار k
$FMAX_k$	بیشینه جریان عبور داده شده از مرحله ۱ تا k
FN_{nmk}	مقدار جریان ارسال شده از چشمه n به چاه m در تکرار k
FP_{nsk}	مقدار جریان ارسال شده از چشمه n به مجموعه رئوس عمق بعدی s در تکرار k
FP_{tmk}	مقدار معکوس جریان ارسال شده از چاه m به رئوس عمق قبلی t در تکرار k
X_{xyk}	ظرفیت باقی‌مانده کمان متصل‌کننده دو راس x و y در تکرار k
X_{nk}	جریان موجود در راس چشمه n در تکرار k
X_{mk}	جریان موجود در راس چاه m در تکرار k
X_{nmk}	ظرفیت باقی‌مانده کمان متصل‌کننده راس چشمه n به راس چاه m در تکرار k

$$X_{nsk} = 0 \quad (10)$$

$$X_{nk} = X_{nk} - FP_{nsk} \quad (11)$$

سپس به ابتدای گام تکرار باز می‌گردد.

(۳) اگر چشمه روی درایه قطر اصلی (X_{nk}) و چاه روی درایه قطر اصلی (X_{mk}) باشد و درایه k تکرار k ام برابر صفر باشد، در این صورت مسیری به طول یک کمان بین این چاه و چشمه وجود ندارد. اگر طبق رابطه (۱۲) مقدار قدر مطلق جریان موجود در راس بیش از مجموع ظرفیت کمان‌های ورودی باشد:

$$|X_{mk}| \geq \sum_{t=TJ_{mk}(1)}^{TJ_{mk}(t)} X_{tmk} \quad (12)$$

یا تعداد مسیرهای قابل انتقال (X_{tmk}) برابر یک باشد، در این

صورت طبق روابط (۱۳) تا (۱۵) عمل می‌شود:

سپس به ابتدای گام تکرار باز می‌گردد.

(۴) اگر هیچ یک از حالات سه‌گانه فوق برقرار نبود حل خاتمه یافته است. اگر درایه‌های سطر و ستون مربوط به راسی صفر شده باشند، آن سطر و ستون‌ها حذف می‌شوند. ماتریس باقیمانده، ساده شده ماتریس اولیه است که جریان‌های قطعی شبکه آن فرستاده شده است. ماتریس باقیمانده آن بخش از مسأله است که نیاز به تصمیم‌گیری برای ارسال جریان از رئوس چشمه به رئوس چاه دارد.

در ادامه با استفاده از روش‌های دیگر حل مسأله بیشینه جریان می‌توان حل را ادامه داد. مقدار جریان ارسال محاسبه شده از این الگوریتم باید به مقدار جریان محاسبه شده از دیگر روش‌ها اضافه شود تا بیشینه جریان کل شبکه محاسبه شود. شکل (۱) فلوجارت کارکرد الگوریتم ابتکاری پیشنهادی را نشان می‌دهد.

۳- تشریح عددی الگوریتم پیشنهادی

در این بخش، برای آشنایی با نحوه عملکرد رویکرد پیشنهادی، به بررسی و حل مثال پرداخته می‌شود. گراف مسأله در شکل (۲) نشان داده شده است. در این گراف SI و $S2$ رئوس چشمه و TI راس چاه است و ظرفیت هر کمان روی آن مشخص شده است.

در شکل (۳) گام آماده‌سازی گراف انجام می‌شود و هر یک از راس‌ها بر اساس تقدم و تاخر شماره‌دهی می‌شود. سپس جریان موجود در رئوس چشمه و چاه معین می‌شود. پس از آماده‌سازی گراف، ماتریس مسأله مطابق جدول (۱) تهیه می‌شود ($FMAX_0=0$).

در مرتبه اول اجرای الگوریتم، کمانی که راس $S1$ را به چاه TI متصل کرده و کمان‌هایی که از رئوس چشمه به عمق بعدی متصل هستند، در شکل (۴) و در جدول (۲) مشخص شده‌اند. با توجه به رابطه (۳) شرایط برای ارسال جریان از چشمه به چاه فراهم می‌باشد. بنابراین ۹ واحد جریان آماده برای ارسال می‌باشد. از طرفی طبق رابطه (۸) شرایط برای ارسال جریان از چشمه‌ها به عمق بعدی مهیا بوده و مطابق رابطه‌های (۹) تا (۱۱) الگوریتم، جریان به عمق بعد ارسال می‌شود.

(۱) اگر چشمه روی درایه قطر اصلی (X_{nk}) و چاه روی درایه قطر اصلی (X_{mk}) باشد و درایه k تکرار k ام برابر صفر نباشد، در این صورت مسیری به طول یک کمان بین این چاه و چشمه وجود دارد. پس جریان از چشمه به چاه منتقل می‌شود. مقدار جریان ارسال شده از چشمه به چاه در هر تکرار مطابق رابطه (۳) برابر است با کمینه جریان موجود در چشمه و جریان موجود در چاه و حداکثر ظرفیت مسیر برای انتقال جریان.

$$FN_{nmk} = \min_0\{X_{nk}, |X_{mk}|, X_{nmk}\} \quad (3)$$

سپس با توجه به روابط (۴) تا (۷) به اندازه جریان ارسال از

$$FP_{tmk} = \min_0\{X_{mk}, X_{tmk}\} \quad (13)$$

$$X_{tmk} = 0 \quad (14)$$

$$X_{mk} = X_{mk} + FP_{tmk} \quad (15)$$

چشمه به چاه، از جریان موجود در چشمه و جریان موجود در چاه و حداکثر ظرفیت مسیر برای انتقال جریان کم می‌شود و در ماتریس جایگذاری می‌شود. همچنین به اندازه جریان منتقل شده به مقدار بیشینه جریان ($FMAX$) اضافه می‌شود.

$$X_{nk} = X_{nk} - FN_{nmk} \quad (4)$$

$$X_{mk} = X_{mk} + FN_{nmk} \quad (5)$$

$$X_{nmk} = X_{nmk} - FN_{nmk} \quad (6)$$

$$FMAX_k = FMAX_k + FN_{nmk} \quad (7)$$

اگر جریان موجود در راس چشمه‌ای (X_{nk}) صفر شد، آن‌گاه مسیرهای خروجی از آن راس (X_{nsk}) برابر صفر می‌شود. اگر جریان موجود در راس چاهی (X_{mk}) صفر شد، آنگاه مسیرهای ورودی به آن راس (X_{tmk}) برابر صفر می‌شود.

اگر جمع ظرفیت باقیمانده مسیرهای خروجی از چشمه‌ای که با (X_{nmk}) نشان داده می‌شود در این گام صفر شود، جریان موجود در چشمه (X_{nk}) صفر می‌شود. اگر جمع ظرفیت باقیمانده مسیرهای ورودی به چاهی که با (X_{nmk}) نشان داده می‌شود در این گام صفر شود، جریان موجود در چاه (X_{mk}) صفر می‌شود. سپس به ابتدای گام دوم باز می‌گردد.

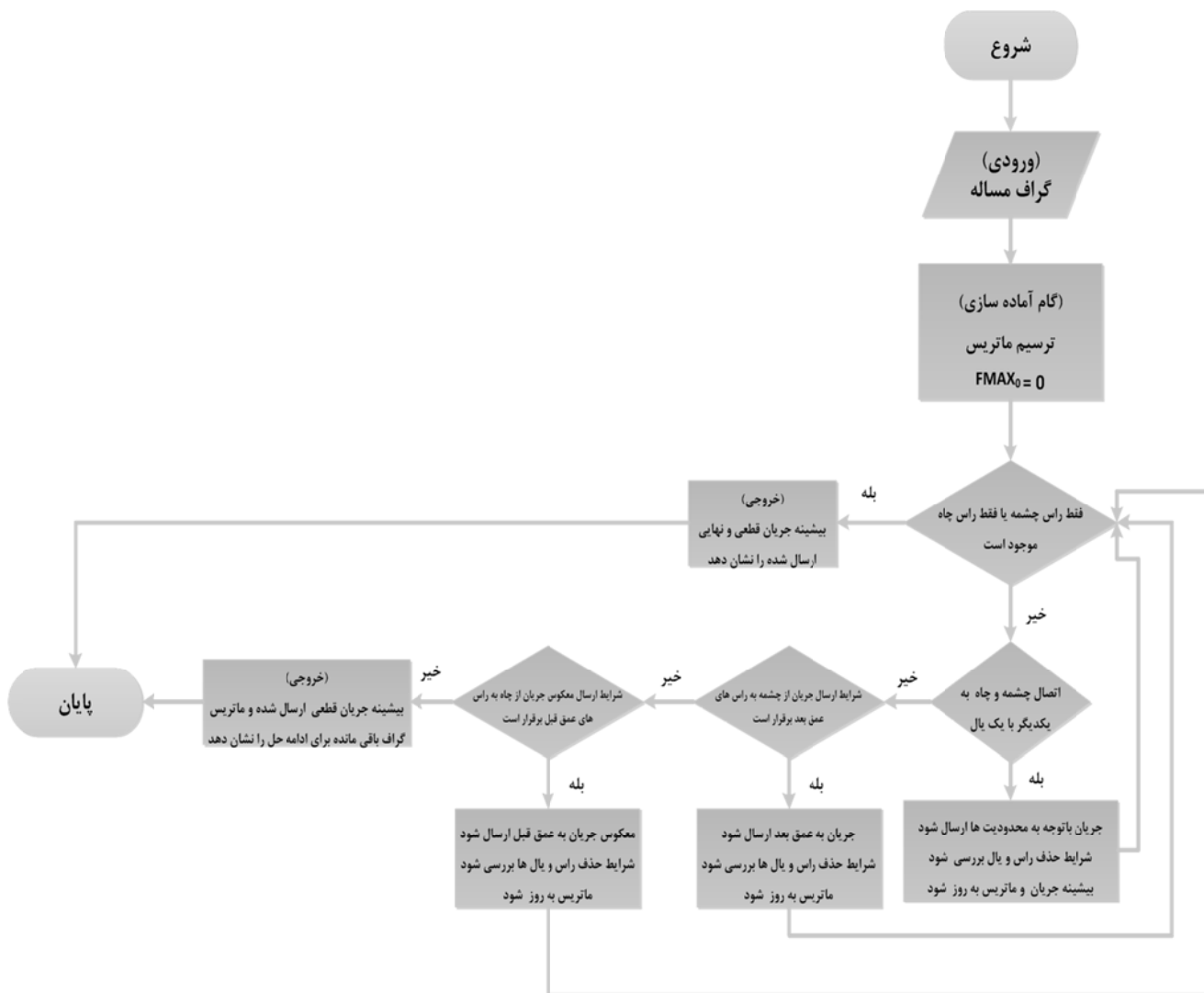
(۲) اگر چشمه روی درایه قطر اصلی (X_{nk}) و چاه روی درایه قطر اصلی (X_{mk}) باشد و درایه k تکرار k ام برابر صفر باشد، در این صورت مسیری به طول یک کمان بین این چاه و چشمه وجود ندارد. حال اگر با توجه به رابطه (۸) مقدار جریان موجود در راس بیشتر یا مساوی مجموع ظرفیت کمان‌های خروجی باشد،

$$X_{nk} \geq \sum_{s=SI_{nk}(1)}^{SI_{nk}(s)} X_{nsk} \quad (8)$$

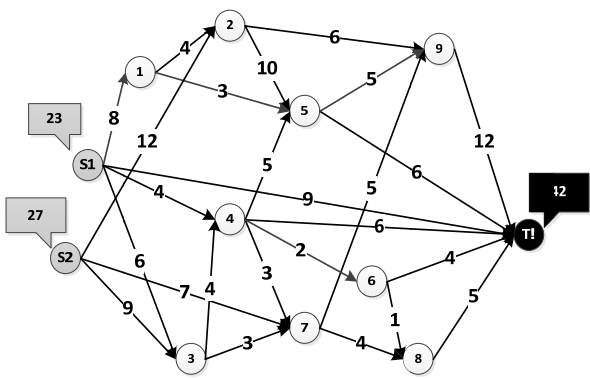
یا تعداد مسیرهای (X_{nsk}) قابل انتقال برابر یک باشد، در این

صورت با توجه به روابط (۹) تا (۱۱) عمل می‌شود:

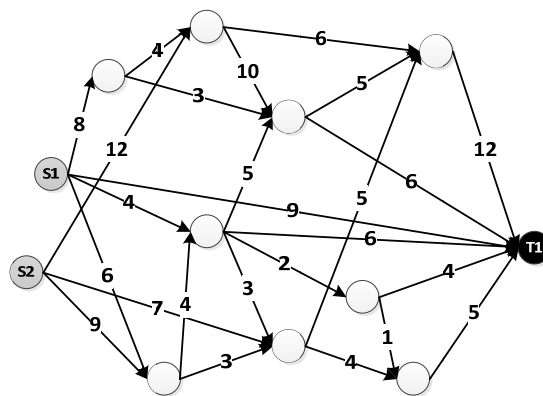
$$FP_{nsk} = \min\{X_{nk}, X_{nsk}\} \quad (9)$$



شکل (۱): ساختار الگوریتم ابتکاری پیشنهادی



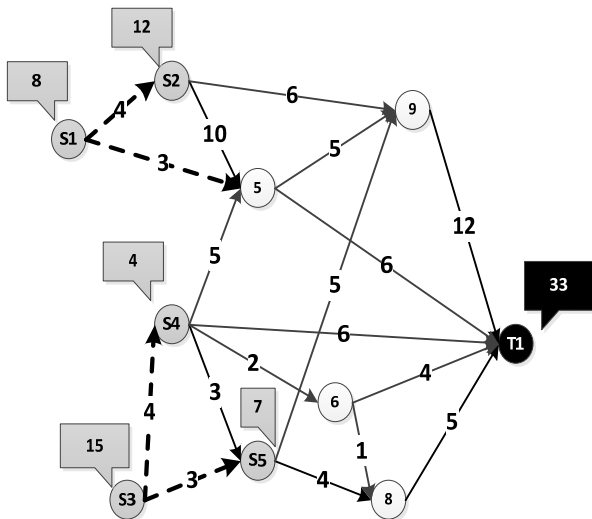
شکل (۳): مشخص کردن جریان موجود در رئوس گراف



شکل (۲): گراف مسأله

جدول (۱): ماتریس اولیه

C0	S1	S2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T1
S1	23	0	8	0	6	4	0	0	0	0	0	9
S2	0	27	0	12	9	0	0	0	7	0	0	0
1	0	0	0	4	0	0	3	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	6	0
3	0	0	0	0	0	4	0	0	3	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	5	2	3	0	0	6
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	6
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	4
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	5	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
T1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

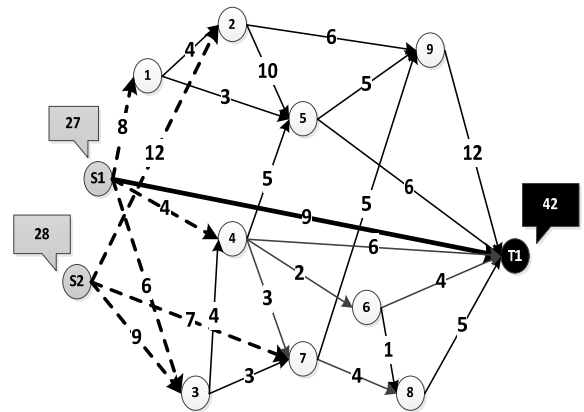


شکل (۵): گراف بروز شده پس از اجرای اول

جدول (۳): ماتریس بروزسانی شده پس از انتقال جریان در اجرای اول

اول

C2	S1(1)	S2(2)	S3(3)	S4(4)	5	6	S5(7)	8	9	T1
S1(1)	8	4	0	0	3	0	0	0	0	0
S2(2)	0	12	0	0	10	0	0	0	6	0
S3(3)	0	0	15	4	0	0	3	0	0	0
S4(4)	0	0	0	4	5	2	3	0	0	6
5	0	0	0	0	0	0	0	0	5	6
6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	4
S5(7)	0	0	0	0	0	0	7	4	5	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
T1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

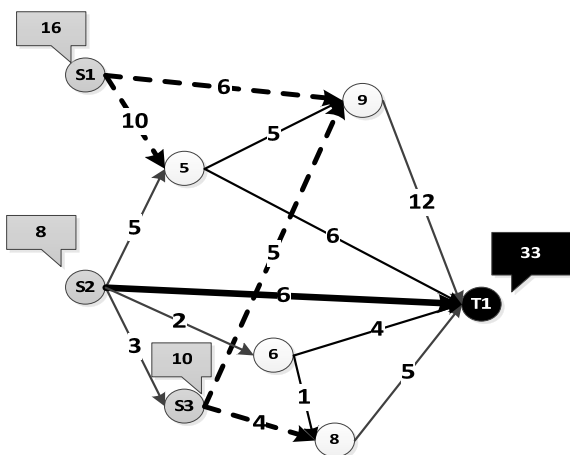


شکل (۴): مشخص کردن کمان اتصال دهنده چشمه به چاه و

کمان‌های متصل کننده چشمه‌ها به رؤس عمق بعد برای اجرای اول

جدول (۲): یافتن مسیر برای انتقال جریان در ماتریس اولیه

C1	S1	S2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T1
S1	23	0	8	0	6	4	0	0	0	0	0	9
S2	0	27	0	12	9	0	0	0	7	0	0	0
1	0	0	0	4	0	0	3	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	6	0
3	0	0	0	0	0	4	0	0	3	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	5	2	3	0	0	6
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	6
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	4
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	5	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12
T1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



شکل (۶): گراف بروز شده پس از اجرای دوم

در پایان اجرای سوم، ۶ واحد جریان به جریان بیشینه ثبت شده

که مقدار آن ۹ بود، اضافه می‌شود. گراف و ماتریس مطابق شکل (۷) و جدول (۵) تغییر می‌یابد. با توجه به این که چشمه‌ها به چاه به وسیله یک کمان متصل شده‌اند، با توجه به روابط (۴) تا (۷) جریان ارسال می‌گردد.

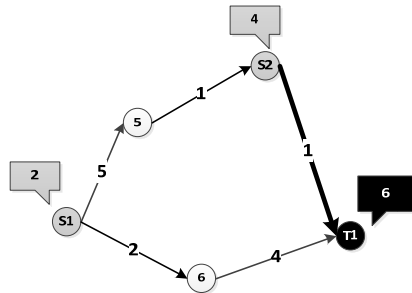
مقدار جریان قطعی ارسال شده یعنی ۹ واحد جریان ثبت می‌شود. پس از ارسال جریان، گراف و ماتریس مربوط به آن بروزسانی می‌شوند. شکل (۵) و جدول (۳) حاصل از اجرای اول می‌باشند. در این مرحله طبق رابطه (۸) عمق بعدی برای ارسال جریان مورد استفاده قرار می‌گیرد و با استفاده از روابط (۹) تا (۱۱) جریان ارسال می‌گردد.

پس از اجرای دوم، گراف و ماتریس مطابق شکل (۶) و جدول (۴) بروز شده و مجدداً به وسیله رابطه (۸) عمق بعدی گراف برای ارسال جریان سنجیده می‌شود. سپس مانند قبل عمل می‌شود.

جدول (۶): ماتریس بروزرسانی شده پس از انتقال جریان در اجرای

چهارم

C5	S1(4)	S2(5)	6	9	T1
S1(4)	2	5	2	0	0
S2(5)	0	4	0	5	0
6	0	0	0	0	4
9	0	0	0	0	1
T1	0	0	0	0	



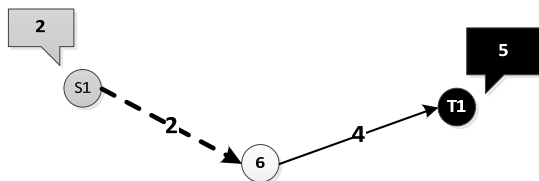
شکل (۹): گراف بروز شده پس از اجرای پنجم

جدول (۷): ماتریس بروزرسانی شده پس از انتقال جریان در اجرای

پنجم

C6	S1(4)	5	6	S2(9)	T1
S1(4)	2	5	2	0	0
5	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	4
S2(9)	0	0	0	4	1
T1	0	0	0	0	

گراف و ماتریس بروزرسانی می‌شود و مانند گذشته عمل می‌گردد. در ادامه، در اجرای ششم واحد جریان دیگر منتقل می‌شود. گراف و ماتریس حاصل از این اجرا در شکل (۱۰) و جدول (۸) نشان داده شده‌اند.



شکل (۱۰): گراف بروز شده پس از اجرای ششم

جدول (۸): ماتریس بروزرسانی شده پس از انتقال جریان در اجرای

ششم

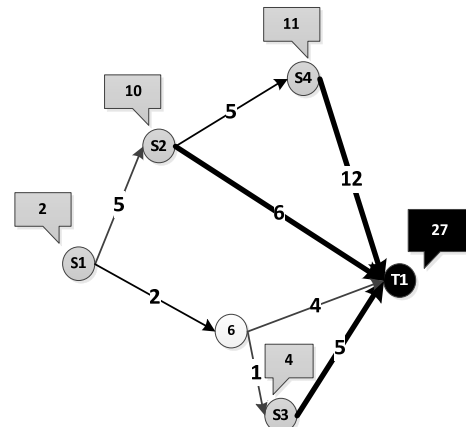
C7	S1(4)	6	T1
S1(4)	2	2	0
6	0	0	4
T1	0	0	

پس از اجرای هفتم که حاصل آن در شکل (۱۱) و جدول (۹) آورده شده است، در اجرای پایانی الگوریتم ۲ واحد جریان منتقل می‌شود. مسأله حل شده و الگوریتم به شرط اختتام رسیده است. مقدار بیشینه جریان منتقل شده برابر ۳۹ واحد است.

جدول (۴): ماتریس بروزرسانی شده پس از انتقال جریان در اجرای

دوم

C3	S1(2)	S2(4)	5	6	S3(7)	8	9	T1
S1(2)	16	0	10	0	0	0	6	0
S2(4)	0	8	5	2	3	0	0	6
5	0	0	0	0	0	0	5	6
6	0	0	0	0	0	1	0	4
S3(7)	0	0	0	0	10	4	5	0
8	0	0	0	0	0	0	0	5
9	0	0	0	0	0	0	0	12
T1	0	0	0	0	0	0	0	



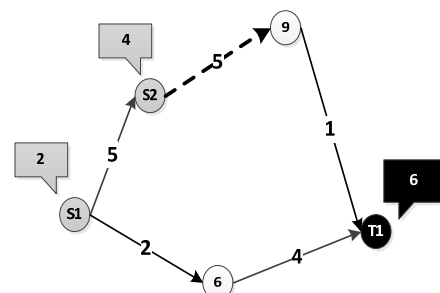
شکل (۷): گراف بروز شده پس از اجرای سوم

جدول (۵): ماتریس بروزرسانی شده پس از انتقال جریان در

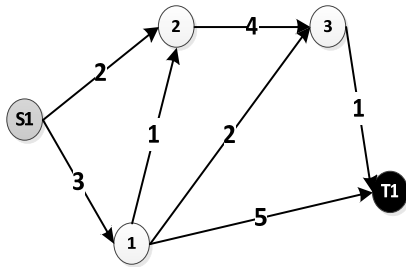
اجرای سوم

C4	S1(4)	S2(5)	6	S3(8)	S4(9)	T1
S1(4)	2	5	2	0	0	0
S2(5)	0	10	0	0	5	6
6	0	0	0	1	0	4
S3(8)	0	0	0	4	0	5
S4(9)	0	0	0	0	11	12
T1	0	0	0	0	0	

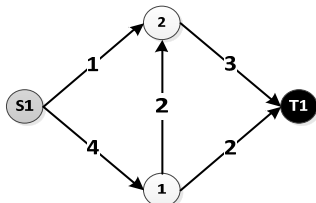
در اجرای چهارم ۲۱ واحد جریان به بیشینه جریان ثبت شده اضافه می‌شود. شکل (۸) و جدول (۶) حاصل از اجرای این مرحله‌اند. در اجرای بعد گراف و ماتریس به صورت شکل (۹) و جدول (۷) است. شرایط رابطه (۸) برای ارسال جریان مهیا می‌باشد و مانند گذشته طبق روابط (۹) تا (۱۱) عمل می‌شود.



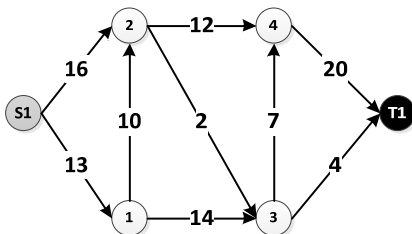
شکل (۸): گراف بروز شده پس از اجرای چهارم



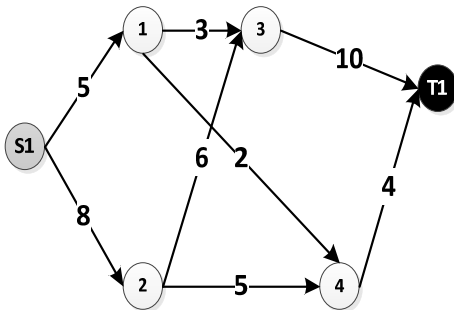
شکل (۱۲): گراف در نظر گرفته شده برای مسأله شماره ۱



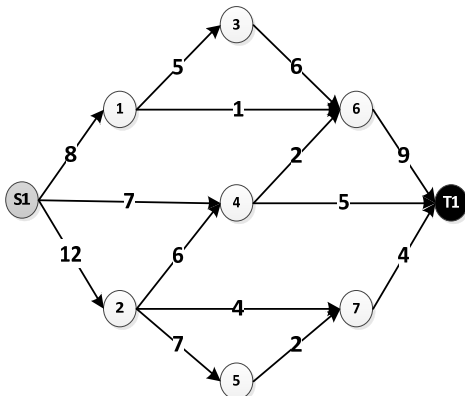
شکل (۱۳): گراف در نظر گرفته شده برای مسأله شماره ۲



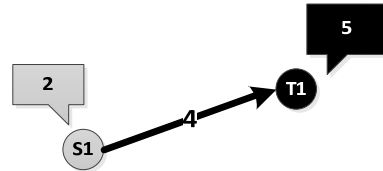
شکل (۱۴): گراف در نظر گرفته شده برای مسأله شماره ۳



شکل (۱۵): گراف در نظر گرفته شده برای مسأله شماره ۴



شکل (۱۶): گراف در نظر گرفته شده برای مسأله شماره ۵



شکل (۱۱): گراف بروز شده پس از اجرای هفتم

جدول (۹): ماتریس بروزسانی شده پس از انتقال جریان در اجرای هفتم

	C8	S1(6)	T1
S1(6)		2	4
T1		0	

۴- تجزیه و تحلیل و مقایسات

در این بخش، چند مسأله که در شکل‌های (۱۲) تا (۱۹) آورده شده- اند، ابتدا با استفاده از رویکرد پیشنهادی مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد. سپس نتایج الگوریتم پیشنهادی با نتایج الگوریتم فورد- فالکرسون مقایسه می‌شود. مسائل به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که بتوانند تا انتها با الگوریتم پیشنهادی حل شوند و معیار مناسبی برای مقایسه دو روش به‌دست آید. معیارهایی که در طراحی مسائل لحاظ شده است شامل: تعداد عمق گراف، تعداد مسیرهای آن، تعداد رئوس و تعداد چشمه و چاه می‌باشند تا کارایی الگوریتم را در شرایط مختلف مورد بررسی قرار دهد. دلیل انتخاب این الگوریتم برای مقایسه آن است که این روش کاملاً مبتنی بر جستجوی سطح اول و انتخاب مسیر است. معیار مقایسه این دو روش در این بخش تعداد دفعات اجرای گام‌های الگوریتم برای حل مسأله است. برای نمونه، مسأله ۲ که در شکل (۱۳) آورده شده است حل می‌شود. سپس همین مسأله به روش فورد- فالکرسون نیز حل می‌شود.

۴-۱- حل مسأله ۲ به روش پیشنهادی

در این بخش مسائلی برای مقایسه دو الگوریتم آورده شده است. در ادامه مسأله دوم که در شکل (۱۳) نشان داده شده است به صورت مختصر به روش الگوریتم پیشنهادی و الگوریتم فورد و فالکرسون حل می‌گردد. نتیجه حل مسائل با الگوریتم پیشنهادی در جدول (۱۰) ثبت شده است.

اجرای ۱: ابتدا ۴ و ۱ واحد جریان به ترتیب وارد رئوس ۱ و ۲ می- شوند. به دلیل اتصال به راس چاه ۲ و ۱ واحد جریان از رئوس ۱ و ۲ به چاه ارسال می‌شود.

اجرای ۲: از ۴ واحد جریان ارسال شده به راس ۲ واحد به چاه منتقل شده و ۲ واحد باقی مانده است. ۲ واحد جریان به راس ۲ منتقل می‌شود. به سبب اتصال راس ۲ به چشمه ۲ واحد به چاه منتقل می‌شود و الگوریتم پایان می‌یابد.

۴-۲- حل مسأله ۲ به روش فورد-فالکرسون

در الگوریتم فورد-فالکرسون در هر بار اجرای الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر از چشمه به چاه انتخاب می‌شود و جریان ارسال می‌گردد. البته این الگوریتم ممکن است با تعداد تکرار بیشتری به نتیجه برسد زیرا انتخاب مسیر در این الگوریتم در تعداد دفعات اجرای آن موثر است. اجرای ۱: کوتاه‌ترین مسیر از چشمه به چاه با طول ۲ کمان، از رئوس چشمه، ۱ و چاه می‌گذرد. به اندازه مینیمم ظرفیت کمان‌ها ۲ واحد جریان منتقل می‌شود.

اجرای ۲: کوتاه‌ترین مسیر موجود از چشمه به چاه با طول ۲ کمان، از رئوس چشمه، ۲ و چاه می‌گذرد. همانند قبل ۱ واحد جریان منتقل می‌شود.

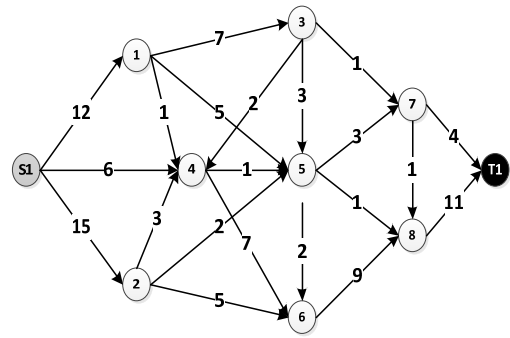
اجرای ۳: کوتاه‌ترین مسیر باقی‌مانده از چشمه به چاه با طول ۳ کمان، از رئوس چشمه، ۱، ۲ و چاه می‌گذرد. دو واحد جریان منتقل می‌شود و الگوریتم خاتمه می‌یابد.

۴-۳- مقایسه دو روش

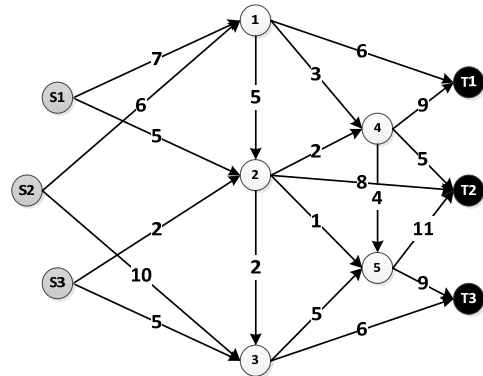
الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسأله ممکن است طراحی شده باشند. برای انتخاب بهترین الگوریتم باید معیاری جهت مقایسه کارایی الگوریتم‌ها موجود باشد. آنالیز کارایی یک تخمین اولیه است و با معیار پیچیدگی زمانی سنجیده می‌شود؛ که رفتار الگوریتم را در زمان اجرا با مجموعه‌ای از ورودی‌های منتخب توصیف می‌کند. پیچیدگی زمانی یک مسأله تعداد گام‌های مورد نیاز برای حل یک نمونه از یک مسأله با ورودی n بیت است که در n^2 گام حل شود. در این مثال می‌گوییم که مسأله از درجه پیچیدگی n^2 می‌باشد. البته تعداد دقیق گام‌ها بستگی به ماشین و زبان مورد استفاده دارد. اما برای صرف نظر کردن از این مشکل، نماد O بزرگ معمولاً بکار می‌رود. اگر یک مسأله، پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(n^2)$ روی یک کامپیوتر نمونه داشته باشد، معمولاً روی اکثر کامپیوترهای دیگر نیز پیچیدگی زمانی از مرتبه $O(n^2)$ خواهد داشت. پس این نشانه به ما کمک می‌کند که صرف نظر از یک کامپیوتر خاص، یک حالت کلی برای پیچیدگی زمانی یک الگوریتم ارائه دهیم.

پیچیدگی زمانی، مدت زمانی است که یک الگوریتم اجرا می‌شود. پیچیدگی با افزایش تعداد ورودی‌های الگوریتم افزایش می‌یابد. تحلیل پیچیدگی زمانی یک الگوریتم، تعیین تعداد دفعاتی است که عمل اصلی به ازای هر مقدار از ورودی انجام می‌شود. زمان اجرای یک الگوریتم از مسائل مهم طراحی الگوریتم می‌باشد و غالباً کارایی الگوریتم‌ها از روی زمان اجرای آنها بررسی می‌شود [۲۴-۲۵].

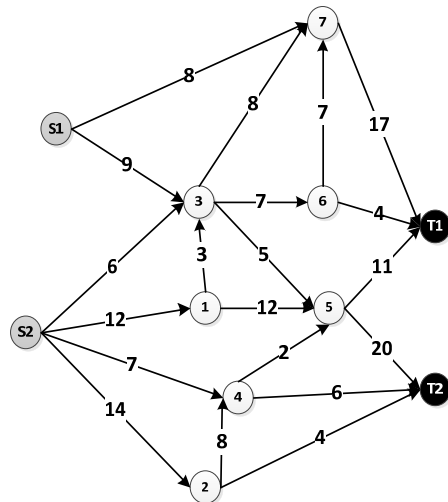
در شکل (۲۰) نتایج مقایسه دو الگوریتم ارائه شده است. با بررسی نتایج دو روش ملاحظه می‌شود که با استفاده از رویکرد پیشنهادی، در بیشتر مسائل حل شده تعداد اجرای‌های لازم برای حل مسأله کاهش یافته است. منظور از تعداد دفعات اجرا، تعداد دفعاتی است که الگوریتم شرایط را برای ارسال جریان بررسی می‌کند



شکل (۱۷): گراف در نظر گرفته شده برای مسأله شماره ۶



شکل (۱۸): گراف در نظر گرفته شده برای مسأله شماره ۷



شکل (۱۹): گراف در نظر گرفته شده برای مسأله شماره ۸

جدول (۱۰): حل مسائل و دفعات اجرای الگوریتم پیشنهادی

شماره مسأله	جواب نهایی مسأله	دفعات اجرای الگوریتم پیشنهادی
1	4	2
2	5	2
3	23	4
4	12	3
5	17	5
6	14	5
7	31	3
8	47	5

شکل (۲۰): مقایسه تعداد دفعات اجرا بین الگوریتم پیشنهادی و

فورد- فالکرسون در حل مسائل

نکته قابل توجه در ارتباط با هدف ارائه الگوریتم پیشنهادی آن است که این رویکرد به دنبال حل کامل مسأله نبوده اما ممکن است در برخی از مسائل به حل کامل آن نیز بپردازد. یکی از اهداف اصلی محاسبه مقدار بیشینه جریانی است که بدون نیاز به تصمیم‌گیری برای انتخاب مسیر ارسال‌کننده جریان منتقل می‌گردد. با مشخص شدن این جریان و حذف گره و کمان‌ها، تحلیل شبکه ساده‌تر می‌شود و می‌توان به بررسی دقیق رفتار شبکه در صورت تغییر مقدار ظرفیت هر کمان پرداخت.

این الگوریتم به دلیل سازگاری با الگوریتم فورد- فالکرسون می‌تواند به صورت ترکیبی استفاده شود و برای ساده کردن حل مسائل، با توجه به شرایط از این دو روش به‌صورت هم‌زمان بهره‌برد.

۴-۴- شبه کد الگوریتم پیشنهادی

همان‌طور که در جدول (۱۱) مشاهده می‌گردد استفاده از الگوریتم پیشنهادی برای حل کامل مسأله به دلیل رویکرد جست و جو در عمق زمان بر خواهد بود اما می‌توان این الگوریتم را برای ساده‌سازی مسائل استفاده نمود و نتیجه آن را برای ادامه حل به دیگر الگوریتم‌ها به عنوان داده ورودی داد. همچنین این رویکرد برای ساده کردن شبکه در حل دستی و مسائل در ابعاد کوچک‌تر بسیار کارآمد می‌باشد. در نهایت شبه کد الگوریتم پیشنهادی در شکل (۲۱) آورده شده است.

همان‌طور که در شبه کد مشاهده می‌شود ورودی الگوریتم ماتریس اولیه است که با توجه به گراف مسأله تهیه می‌گردد. مرحله اول اجرای الگوریتم پیشنهادی همانند روش فورد- فالکرسون ابتدا مسیرهای به طول یک، بین چشمه و چاه را یافته و جریان قطعی را ارسال می‌نماید. به‌عبارتی این مرحله در هر دو الگوریتم یکسان می‌باشد اما تفاوت اصلی الگوریتم در ادامه این مرحله و در پیش راندن جریان در عمق گراف می‌باشد. در این مرحله به تدریج رئوس و یال‌های گراف با پیش راندن جریان از گراف حذف می‌گردد. با پیشروی در عمق، به تدریج گراف مسأله پیمایش و ساده‌تر شده و دیدی کلی از مسأله تصمیم‌گیری برای انتخاب مسیر ارسال‌کننده جریان ایجاد می‌شود. خروجی الگوریتم، بیشینه جریان قطعی ارسال شده از رئوس چشمه به رئوس چاه می‌باشد و در صورتی که این جریان با بیشینه جریان شبکه برابر نباشد خروجی دیگر مسأله ماتریس باقی‌مانده از مسأله است که نیازمند تصمیم‌گیری برای ارسال جریان از مسیرهای موجود است.

از ماتریس خروجی حاصل می‌توان برای اصلاح یک شبکه طراحی شده و بهبود آن با تغییر ظرفیت هر یال پرداخت. همچنین به دلیل سازگاری روش با دیگر روش‌ها این ماتریس می‌تواند به‌عنوان یک ورودی برای دیگر روش‌های حل مسأله بیشینه جریان مورد استفاده قرار گیرد.

تا به جواب نهایی برسد. البته الگوریتم پیشنهادی به دنبال محاسبه جریان قطعی مبادله شده بین رئوس چشمه و چاه می‌باشد که برای ارسال آن نیازی به تصمیم‌گیری برای یافتن مسیر نیست.

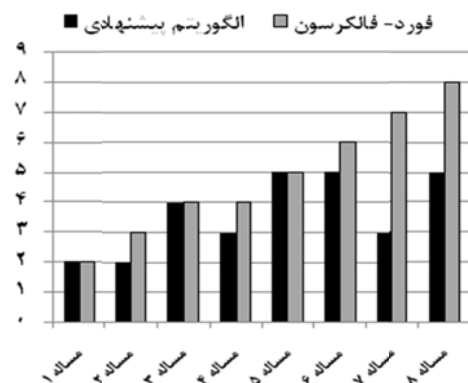
مثال‌های انتخاب شده به گونه‌ای هستند که جریان قطعی ارسال شده با بیشینه جریان شبکه برابر می‌باشد و در چنین شرایطی مشاهده می‌شود که الگوریتم پیشنهادی با تعداد دفعات اجرای کمتر به نتیجه رسیده است.

در غیر این صورت الگوریتم با ساده کردن گراف اولیه و محاسبه جریان قطعی ارسال شده ابعاد مسأله که ناشی از تعداد رئوس و یال‌های بین آن‌ها است را کاهش می‌دهد و تحلیل آن را آسان می‌نماید.

همان‌گونه که در نمودار ملاحظه می‌شود با بزرگتر شدن ابعاد مسأله یعنی افزایش تعداد رئوس و مسیرهای بین چشمه و چاه با شرط کم بودن عمق بین چشمه و چاه این الگوریتم از کارایی خوبی برخوردار است و می‌تواند با تعداد اجرای کمتر به نتیجه مطلوب برسد. آن‌چه که بر تعداد اجرای روش پیشنهادی مؤثر است عمق موجود بین چشمه و چاه است و هرچه عمق کمتر باشد این روش می‌تواند با تعداد کمتری اجرا به جواب نهایی برسد.

از طرفی در الگوریتم فورد- فالکرسون برخلاف روش پیشنهادی تعداد مسیرهای موجود و همچنین انتخاب مسیر می‌تواند بر تعداد اجرای الگوریتم اثرگذار باشد. از دیگر ویژگی‌های مثبت روش پیشنهادی که در مسائل ۷ و ۸ مشهود است این است که الگوریتم پیشنهادی به دلیل سازگار بودن با وجود چند راس چشمه و چاه بدون نیاز به استفاده از رئوس چاه و چشمه مجازی، مسأله را حل و یا ساده‌سازی می‌کند. اما در روش فورد- فالکرسون برای حل این دست از مسائل ابتدا باید یک راس چشمه یا چاه مجازی قرار داده شود و سپس به حل مسأله پرداخته شود.

در این حالت ماتریسی که مورد تحلیل قرار می‌گیرد باید سطر و ستونی برای گره‌های مجازی اضافه شده در نظر بگیرد و منجر به افزایش ابعاد مسأله می‌گردد اما در الگوریتم پیشنهادی نیازی به چنین کاری نیست و تعداد سطر و ستون‌های ماتریس برابر تعداد گره‌های موجود در گراف مسأله می‌باشد.



گراف اولیه را که در یافتن جواب بهینه نقشی ندارند و در واقع باعث پیچیده شدن مسأله می‌گردند حذف می‌نماید. همچنین تغییراتی که الگوریتم بر گراف اعمال می‌کند و اثر آن بر جواب بهینه ثابت می‌گردد. جریانی حذف یا اضافه نمی‌گردد بلکه در شبکه به حرکت درمی‌آید و فقط در صورت بلوکه شدن جریان (بی‌اثر بودن بر جواب بهینه) از نمایش آن در گراف برای ساده‌سازی صرف‌نظر می‌گردد. عملکرد روش حل ارائه شده بر روی مسائل آزمایشی تولید شده با ابعاد مختلف مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و الگوریتم‌های موجود در ادبیات مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج بیانگر این امر است که آنچه که در این روش بر تعداد اجرای آن موثر است عمق موجود بین چشمه و چاه است و هرچه عمق کمتر باشد می‌تواند با تعداد کمتری اجرا به جواب نهایی برسد. از طرفی در الگوریتم فورد-فالکرسون برخلاف روش پیشنهادی تعداد مسیرهای موجود و همچنین انتخاب مسیر می‌تواند بر تعداد اجرای الگوریتم اثرگذار باشد. از دیگر ویژگی‌های مثبت روش پیشنهادی که در مسائل ۷ و ۸ مشهود است، سازگار بودن الگوریتم پیشنهادی با وجود چند راس چشمه و چاه است که بدون نیاز به استفاده از رئوس چاه و چشمه مجازی، مسأله را حل و یا ساده سازی می‌کند. اما در روش فورد-فالکرسون برای حل این دست از مسائل ابتدا باید یک راس چشمه یا چاه مجازی قرار داده شود و سپس به حل مسأله پرداخته شود. برای تحقیقات آتی، می‌توان به بررسی تاثیر تعداد عمق موجود بین رئوس چشمه و چاه بر عملکرد الگوریتم پیشنهادی و همچنین سنجش عملکردی ترکیب رویکرد پیشنهادی با الگوریتم‌های دیگر که مبتنی بر جستجو در سطح گراف هستند پرداخته شود.

۶- منابع

- [1] Iri, M. (1960). A New Method of Solving Transportation-Network Problems. Journal of the Operations Research Society of Japan, 3:27-87.
- [2] Schrijver, A. (2002). On the History of the Transportation and Maximum Flow Problems. Mathematical Programming, 91: 437-445.
- [3] چهارسوقی سیدکمال، ممیزی فرید، یزدخواستی امین. (۱۳۹۳). توسعه مدل مکان یابی هاب بر مبنای صرفه‌جویی اقتصادی جریان‌ها با استفاده از وسایل حمل و نقل ظرفیت‌دار و محدودیت جریان ورودی به هاب. نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید. سال دوم، شماره ۴. صفحه ۱-۱۹.
- [4] Harris, T., Ross, F. (1955). Fundamental of a Method for Evaluating Rail Net Capacities. Research Memorandum RM-1573, The RAND Corporation, Santa Monica, CA.
- [5] Ford, L.R., Fulkerson, DR. (1956). Maximum Flow Through a Network. Canada Journal of Mathematics 8: 399-404.
- [6] Christos, H., Papadimitriou, KS. (1998). The Max-Flow, Min-Cut Theorem. Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity. Dover: 120-128. ISBN 0-486-40258-4.
- [7] Dinic, E.A. (1970). Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation, Soviet Math. Doklady, 11: 1277-1280.

Function Proposed Algorithm

Inputs: Initial Matrix

Outputs: Fmax & Remain Matrix

```
{max_flow = 0;
while (condition is true)
  For i
    For j
      if (condition 1)
        Compute (Fn, Xnk, Xmk, Xnmk, Fmax)
      End
    End
  End
  For i
    if (condition 2)
      For n
        Compute (Fp, Xnk, Xnsk)
      End
    End
  End
  For j
    if (condition 3)
      For m
        Compute (Fp, Xmk, Xtmk)
      End
    End
  End
  if (condition)
    Break
  End
End}
```

شکل (۲۱): شبه کد الگوریتم پیشنهادی

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی

در این تحقیق، یک الگوریتم ابتکاری برای بهبود و ساده‌سازی گراف اولیه که به‌عنوان گراف پایه برای حل به الگوریتم‌های پیشینه جریان شبکه داده می‌شود، ارائه شد. از مزایا و نوآوری‌های دیگر این الگوریتم محاسبه پیشینه جریان قطعی است که بدون نیاز به تصمیم‌گیری از رئوس چشمه به رئوس چاه منتقل می‌گردد. بسیاری از الگوریتم‌های پیشینه جریان با تکیه بر مفهوم سطح در گراف، پیشینه جریان را با پیدا کردن مسیر و ارسال آن به‌دست آورده‌اند. در این مقاله، با دقت به مفهوم عمق گراف، از منظری جدید به مسأله پرداخته شد تا از پیچیدگی مسأله کاسته شود و گرافی که پیچیدگی مسأله ناشی از آن است برای تحلیل‌گر مشخص گردد. پیامد تحلیل گراف خروجی از الگوریتم پیشنهادی، امکان ارزیابی گراف موجود برای طراحی شبکه جدید یا بهبود شبکه ارسال جریان را به تحلیل‌گر می‌دهد زیرا کار با بخشی از شبکه که پیچیدگی اصلی مسأله ناشی از آن می‌باشد آسان‌تر از بررسی گراف اولیه است. به در الگوریتم پیشنهادی سعی شد با استفاده از مفهوم عمق در گراف، ابتدا با ساده سازی مسأله از طریق حذف کمان‌ها و رئوس ابعاد و پیچیدگی مسأله کاهش یابد. الگوریتم پیشنهادی، آن دسته از رئوس و کمان‌های

- with Multiple Sources and Sinks. *SIAM Journal on computing* 24: 1002-1017.
- [19] Borradaile, G., Klein, P. (2009). An $O(n \log n)$ Algorithm for Maximum st-flow in a Directed Planar Graph. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 56: 1-30.
- [20] Kaplan, H., Nussbaum, Y. (2011). Maximum Flow in Directed Planar Graphs with Vertex Capacities. *Algorithmica* 61: 174-189.
- [21] Erickson, J. (2010). Maximum flows and parametric shortest paths in planar graphs. In *Proceedings of the 21st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 794-804.
- [22] Lee, T., Rao, S., Srivastava, N. (2013). A new approach to computing maximum flows using electrical flows. In *Proceedings of the Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. ACM Press, New York, 755-764.
- [23] Madry, A. (2013). Navigating central path with electrical flows: From flows to matchings, and back. In *Proceedings of the Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE Press, New York, 253-262.
- [24] Kelner, A., Lee, Y.T., Orecchia, L., Sidford, A. (2014). An almost-linear-time algorithm for approximate max flow in undirected graphs, and its multi-commodity generalizations. In *Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SIAM, Philadelphia, 217-226.
- [25] Sherman, J. (2013). Nearly maximum flows in nearly linear time. In *Proceedings of the Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE Press, New York, 263-269.
- [8] Edmonds, J., Karp, R. (1972). Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19: 248-264.
- [9] Karzanov, A.V. (1974). Determining the Maximal Flow in a Network by the Method of Preflows. *Soviet Mathematical Dokladi*, 15: 434-437.
- [10] Sleator, D.D., Tarjan, R.E. (1983). A Data Structure for Dynamic Trees. *Journal of Computer and System Sciences*, 26, 3: 362-391.
- [11] Sleator, D.D., Tarjan, R.E. (1985). Self-adjusting Binary Search Trees. *Journal of the ACM*, 32: 652-686.
- [12] Goldberg, A.V., Tarjan, R.E. (1988). A New Approach to the Maximum Flow Problem. *Journal of the ACM*, 35: 921-940.
- [13] Orlin, J.B. (2013). Max Flows in $O(nm)$ Time, or Better. In *Proceedings of the Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. ACM Press, New York: 765-774.
- [14] Goldberg, A.V., Tarjan, R.E. (2014). Efficient Maximum Flow Algorithms. *Communications of the ACM*, 57: 82-89.
- [15] Ahuja, R.K., Magnanti, T.L., Orlin, J.B. (1988). *Network Flows*, Cambridge, Mass, Alfred P. Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.
- [16] Johnson, D.B., Venkatesan, S. (1982). Using Divide and Conquer to Find Flows in Directed Planar Networks in $O(n^{3/2} \log n)$ Time, In *Proceeding of the 20th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*: 898-905.
- [17] Reif, J.H. (1983). Minimum s-t Cut of a Planar Undirected Network in $O(n \log^2(n))$ Time. *SIAM Journal on computing* 12: 71-81.
- [18] Miller, G. L., Naor, J. (1995). Flow in planar Graphs



Technical Note

**A Novel Heuristic Approach to Simplify Initial Graph of
Maximum Flow Problem**

V. Khodakarami*, V. Hajipour, M.R. Hassani

Department of Industrial Engineering, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 22 October 2014

Accepted 22 September 2015

Keywords:

Maximum flow problem

Directed graph

Heuristic approach

ABSTRACT

Network maximum flow problem trying to find the maximum flow that can transmit from the source nodes to sink nodes. The purpose of this research is to improve and simplify the initial graph that given as a problem to solve by network maximum flow algorithm. Most of maximum flow algorithms solve the problem with finding route & transmitting based on basic feasible solution. In this paper, we attempt to present a new heuristic approach according to depth concept in graph to reduce the problem time complexity with removing arcs and nodes. This algorithm is compatible with multi-source multi-sink algorithms in the literature. Finally, to demonstrate applicability of the proposed approach, several test problems are first generated; then, the comparisons are carried out. The results show that the proposed heuristic can simplify the problem and consequently reduce the complexity of maximum flow problem.

* Corresponding author. Vahid Khodakarami

Tel.: 081-38292505; E-mail addresses: v.khodakarami@basu.ac.ir