



نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید

نشریه پژوهش‌های
مهندسی صنایع
در سیستم‌های تولید

ISSN: 2345-2269

سال سوم شماره پنجم بهار و تابستان ۱۳۹۴، صفحه ۶۱-۷۱
www.ier.basu.ac.ir

ارائه یک الگوریتم حل دقیق برای مسأله جایابی P هاب میانه با تخصیصی r -تایی

علیرضا عیدی^{۱*}، خالد برزگر^۲

۱. استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان، سنندج

۲. دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه کردستان، سنندج

خلاصه

مسائل جایابی هاب نقش مهمی در شبکه‌های حمل‌ونقل و سیستم‌های مخابراتی دارند. این مسائل در دهه‌های اخیر، بسیار مورد توجه بوده‌اند. در مسأله جایابی هاب میانه باید P گره در شبکه به‌عنوان تسهیلات هاب انتخاب شده و سایر گره‌ها به نحوی به نقاط انتخابی اختصاص داده شوند که هزینه‌های مسیریابی در شبکه کمینه شود. در تحقیق حاضر مسأله جایابی هاب میانه با تخصیص r -تایی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مسأله هر گره غیر هاب می‌تواند حداکثر به r عدد از P هاب جایابی شده اختصاص یابد. هدف تحقیق کنونی مطالعه و طراحی یک الگوریتم حل دقیق بر مبنای رویکرد تجزیه بندرز برای مسأله ذکر شده است و بر اساس ساختار مسأله مورد مطالعه، راهکارهایی برای بهبود الگوریتم تجزیه بندرز کلاسیک ارائه شده است. نتایج محاسباتی الگوریتم دقیق ارائه شده با استفاده از مجموعه داده شبکه ترکیه و USA423 انجام شده است. آزمایشات محاسباتی کارایی الگوریتم پیشنهادی را تأیید می‌کند.

اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت ۱۳۹۲/۱۱/۲۳

پذیرش ۱۳۹۴/۳/۲۳

کلمات کلیدی:

جایابی هاب میانه

تخصیص چندگانه

الگوریتم حل دقیق

تجزیه بندرز

۱- مقدمه

شبکه‌ای با تعداد مشخصی گره مفروض است که از این گره‌ها جریان‌هایی به نقاط یا گره‌های دیگر فرستاده شده و جریان‌هایی نیز به آن‌ها وارد می‌شود. در این گونه مواقع، بویژه در حالتی که تعداد این نقاط زیاد باشد؛ تعدادی از گره‌ها را به‌عنوان هاب (واسط) انتخاب نموده و به جای ایجاد ارتباط مستقیم مابین تمام نقاط در شبکه، جریان موجود در سیستم را به این نقاط (هاب‌ها) فرستاده و سپس به‌سوی مقصدها ارسال می‌نماییم. به بیان دیگر هاب‌ها کار یکپارچه‌سازی و تغییر جهت جریان را هنگامی که با تعداد زیادی جفت گره‌های مبدأ-مقصد سروکار داریم، انجام می‌دهند. شبکه‌های حمل‌ونقل اعم از حمل بار و مسافر، شبکه‌های مخابراتی و شبکه‌های پستی زمینه‌هایی از کاربرد ساختار هاب-گره هستند.

نخستین مقاله در زمینه مکان‌یابی هاب که شامل اولین مدل ریاضی و رویکرد حل می‌باشد توسط اولکی [۱] ارائه گردیده است. از

آن زمان تاکنون مقالات فراوانی در این زمینه منتشر شده است. به‌منظور مطالعه بیشتر در زمینه مسائل هاب می‌توان به مقالات مروری که در این زمینه منتشر شده مراجعه نمود از جمله: آلومیور و کارا [۲]، کمیل و اولکی [۳] و فراهانی و همکاران [۴].

در حالت کلی طبقه‌بندی مسائل جایابی هاب بر اساس ۴ جنبه مختلف صورت می‌گیرد. جنبه نخست تابع هدف این مسائل است بر همین اساس کمیل [۵] مسائل مکان‌یابی هاب را بر حسب توابع هدف به این صورت دسته‌بندی نمود: (۱) مسأله هاب میانه، که عبارتست از جایابی تعداد مشخصی هاب (P) در شبکه با هدف کمینه‌سازی هزینه عبور جریان در شبکه؛ (۲) مسأله جایابی با هزینه ثابت، که تعداد هاب‌ها متغیر فرض می‌گردد و هزینه ثابتی برای استقرار هر هاب در نظر گرفته می‌شود. تابع هدف این مسأله علاوه بر هزینه ارسال جریان در شبکه هزینه احداث هاب‌ها را نیز در نظر می‌گیرد؛ (۳) مسأله هاب مرکز، که تابع هدف آن عبارتست از کمینه‌سازی بیشترین طول یا هزینه هر مسیر در شبکه و (۴) مسأله هاب پوششی که تابع هدف این مسأله کمینه‌سازی تعداد هاب‌های احداثی ضمن پوشش تقاضای موجود در شبکه می‌باشد.

* نویسنده مسئول. علیرضا عیدی

تلفن: ۰۷۳-۳۳۶۶۰۰۷۳؛ پست الکترونیکی: Alireza.eydi@uok.ac.ir

(حدود ۰.۳ درصد به طور متوسط) دارد. به طور خلاصه این مسأله سعی دارد بین هزینه‌های توسعه شبکه و هزینه‌های ارسال جریان توازن برقرار کند. در ادامه، پیرو و همکاران [۱۱] برای مسأله یاد شده یک الگوریتم ابتکاری مبتنی بر رویکرد جستجوی انطباقی حریصانه ارائه دادند.

متدلوژی پیشنهادی در این تحقیق بر اساس رویکرد تجزیه بندرز [۱۲] می‌باشد. این الگوریتم در سال ۱۹۶۲ برای حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی ارائه شده است. استفاده از این روش در حل بسیاری از مسائل مکان یابی هاب نتایج مناسبی را به دنبال داشته است. در مرجع [۱۳] الگوریتم تجزیه بندرز برای مسأله جایابی هاب با تخصیص چندگانه و هزینه ثابت مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین کامارگو و همکاران [۱۴] حالت تخصیص چندگانه با در نظر گرفتن ازدحام در هاب‌ها را مورد بررسی قرار داده و با روش تجزیه بندرز حل نمودند. در مرجع [۱۵] نیز چندین رویکرد برای بهبود الگوریتم بندرز برای حل مسأله هاب با هزینه ثابت در مقیاس بزرگ پیشنهاد شده است. کونتریاس و همکاران [۱۶] مسأله هاب در حالت وجود عدم قطعیت در داده‌های تقاضای مشتریان و هزینه‌های حمل مورد بررسی قرار دادند. در مرجع [۱۷] حالت تخصیص تکی با فرض وجود ازدحام در هاب‌ها و از دو منظر مدیر و کاربر با روش تجزیه بندرز مورد بررسی قرار گرفته است. در تحقیق سا و همکاران [۱۸] مسأله جایابی درختی از هاب‌ها به کمک الگوریتم تجزیه بندرز حل شده است. روش تجزیه بندرز برای حل سایر مسائل نیز به کار گرفته شده است نظیر مقاله توکلی مقدم و همکاران [۱۹].

در این تحقیق مسأله P هاب میانه با تخصیص r تایی در نظر گرفته شده و راهکارهایی برای بهبود حالت استاندارد الگوریتم تجزیه بندرز جهت حل مسائل با ابعاد بزرگ ارائه شده است. یادآور می‌شود تنها پژوهشی که برای مسأله با مفروضات بیان شده الگوریتم دقیق ارائه داده؛ مقاله یامان [۱۰] می‌باشد که از مدل‌سازی ریاضی و حل‌کننده CPLEX استفاده نموده است. در تحقیق حاضر الگوریتمی کاراتر که در مسائل کوچک قابل رقابت با حل‌کننده نرم‌افزاری بوده و قادر به حل مسائل بزرگ در زمان مناسب باشد پیشنهاد می‌گردد. محاسبات عددی تحقیق کنونی با استفاده از مجموعه داده‌های شبکه ترکیه و هواپیمایی آمریکا USA423 انجام شده است. ادامه این تحقیق شامل بخش‌های زیر است: در بخش (۲) مدل ریاضی مسأله مرور شده است. در بخش (۳) الگوریتم حل پیشنهادی معرفی شده است و در بخش (۴) راهکارهایی برای بهبود آن ارائه گردیده است. بخش (۵) شامل محاسبات عددی بوده و در نهایت نتایج و پیشنهادات در بخش (۶) آورده شده است.

۲- مدل ریاضی

در مرجع [۱۰] دو نوع مدل برای مسأله مورد تحقیق ارائه شده است. فرمول‌بندی اول که از متغیرهای چهار شاخصه برای مدل نمودن جریان استفاده می‌نماید. این نوع مدل مبتنی بر جریان خوانده

در یک حالت دیگر، مسائل یاد شده بر این اساس که تعداد هاب‌ها از پیش تعیین شده یا خیر دسته‌بندی می‌شوند. اگر تعداد هاب‌ها توسط تصمیم‌گیران مشخص شود مسأله p -هاب خوانده می‌شود که عدد صحیح p تعداد هاب‌های مدنظر است [۴].

رویکرد سوم دسته‌بندی مسائل هاب بر حسب ظرفیت هاب‌ها می‌باشد. اگر برای جریان عبوری از هاب‌ها ظرفیت مشخصی در نظر گرفته شود مسأله ظرفیت‌دار گفته می‌شود که در پژوهش‌هایی از جمله [۸-۶] به این گونه مسائل پرداخته شده است.

آخرین روش دسته‌بندی مسائل جایابی هاب بر اساس استراتژی تخصیصی نقاط غیر هاب به هاب‌هاست که در دهه‌های اخیر بسیار مورد توجه بوده است، این دسته‌بندی عبارت است از: مسأله با تخصیص تکی و چندگانه [۲]. در حالت تخصیص تکی، هر گره غیر هاب (اسپوک) تنها می‌تواند توسط یک هاب در شبکه سرویس‌دهی شود به این مفهوم که گره یاد شده تنها می‌تواند با هاب اختصاص یافته‌اش تعامل جریان داشته باشد. در حالت تخصیص چندگانه، هر گره تقاضا در شبکه می‌تواند با هر کدام از هاب‌های احداثی تبادل جریان داشته باشد. مسأله p هاب میانه به کلاس مسائل NP-hard تعلق دارد [۹]. حتی هنگامی که مکان هاب‌ها مشخص شده باشد، مسأله تخصیص نقاط تقاضا به هاب‌های موجود NP-hard است.

اخیراً یامان [۱۰] حالت کاربردی‌تری از مسأله هاب میانه با تخصیص چندگانه را ارائه داده است. در این نسخه هر گره تقاضا تنها می‌تواند توسط تعداد مشخصی (r) هاب سرویس‌دهی شود که مسأله p هاب میانه با تخصیص r -تایی خوانده می‌شود. توسعه این مسأله ریشه در این حقیقت دارد که حالت تخصیص تکی برای کاربردهای دنیای واقع بسیار محدود شده است، به علاوه حالت تخصیص چند گانه که هر گره می‌تواند با تمام p هاب احداثی به تبادل ترافیک بپردازد به لحاظ هزینه‌های راه‌اندازی و توسعه شبکه بعضاً غیرممکن بوده و منجر به ایجاد شبکه‌های پیچیده می‌گردد. مسأله هاب میانه با تخصیص r -تایی که $r \leq p$ هر دو حالت تخصیص تکی و چندگانه را در بر می‌گیرد. در واقع هنگامی که $r = 1$ مسأله به حالت تخصیص تکی و در صورتی که $r = p$ فرض گردد مسأله به حالت تخصیص چندگانه تبدیل می‌شود.

یامان [۱۰] مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط برای این مسأله ارائه داده است. او در تحقیق خود مسائلی با اندازه کوچک و متوسط را حل نموده است. محاسبات عددی وی نشان می‌دهد که در نظر گرفتن مسأله با تخصیص r تایی نسبت به حالت تخصیص تکی هزینه‌های انتقال جریان در شبکه را به نحو چشم‌گیری کاهش می‌دهد، در حالی که نسبت به حالت تخصیص چند گانه افزایش چندانی مشاهده نمی‌شود. باید در نظر داشت که حالت تخصیص چند گانه هزینه‌های راه‌اندازی فراوانی دارد. او مشاهده نمود در صورتی که مقدار r برابر ۲ فرض شود هزینه‌های ایجاد شده نسبت به حالت تخصیص تکی کاهش قابل توجهی (به طور متوسط حدود ۲ درصد) دارد در حالی که افزایش ناچیزی نسبت به حالت تخصیص چند گانه

یابد. روابط (۶) و (۷) تضمین می‌کنند که جریان مابین جفت گره مبدأ-مقصد $i - j$ تنها زمانی می‌تواند از طریق هاب k به هاب l انتقال یابد که گره i به هاب k و گره j به هاب l اختصاص یافته باشد. روابط (۸) و (۹) بیانگر علامت متغیرها هستند.

هر چند مدل دیگری نیز برای این مسأله در مرجع [۱۰] توسعه داده شده است اما کران‌های خطی مدل (۱)-(۹) بسیار مناسب‌تر است. به علاوه این فرمول‌بندی دارای یک ویژگی جالب توجه دیگر است. در واقع در صورتی مقادیر متغیرهای باینری تثبیت شوند مسأله کمکی حاصله به ازای هر جفت گره تبدیل به یک مسأله مسیریابی مستقل می‌شود. مسأله فوق دارای $n^4 + n^2$ متغیر و $2n^3 + 2n^2 + n + 1$ محدودیت است که در آن $n = ||N||$ می‌باشد. پیاده‌سازی چنین مسأله‌ای بر روی سیستم‌های با حافظه پایین امکان پذیر نیست. با ویژگی‌های ذکر شده، استفاده از روشهای تجزیه همچون بندرز می‌تواند بسیار کارآمد باشد.

۳- رویکرد تجزیه بندرز

روش تجزیه بندرز یک رویکرد استاندارد برای حل دقیق مسائل بهینه‌سازی ترکیبی است. این روش بر تجزیه مدل اصلی مسأله به دو مسأله اصلی آزاد شده و کمکی و حل چند باره هر کدام از این مسائل با استفاده از جواب مسأله دیگر تا رسیدن به همگرایی استوار است. مسأله اصلی آزاد شده تنها شامل متغیرهای عدد صحیح است. مسأله کمکی نیز با ثابت قرار دادن متغیرهای پیچیده (عدد صحیح) مسأله اصلی به دست می‌آید. جواب بهینه مسأله اصلی آزاد شده فراهم کننده یک کران پایین برای جواب بهینه مسأله کلی است. سپس مقادیر متغیرهای عدد صحیح به مسأله کمکی داده می‌شود. با ثابت کردن این متغیرها در مسأله کمکی، زیر مسأله حاصله به سادگی قابل حل خواهد بود. از حل مسأله کمکی در صورت شدنی بودن یک کران بالا برای مسأله کلی فراهم می‌شود. در صورتی که معیار بهینگی ارضا شود الگوریتم متوقف می‌گردد در غیر این صورت یک برش با استفاده از مقادیر دوگان تولید و به مسأله اصلی آزاد شده افزوده شده و فرآیند حل ادامه می‌یابد.

۳-۱- مسأله کمکی بندرز

در ازای مقدار ثابت متغیرهای عدد صحیح (پیچیده) که از حل مسأله اصلی آزاد شده گرفته می‌شود، مسأله اولیه کمکی به دست می‌آید. برای مسأله هاب میانه با تخصیص I -تایی این مسأله به فرم زیر است:

$$\text{Min} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l t_{ij}(\chi d_{ik} + \alpha d_{kl} + \delta d_{lj}) f_{ijkl} \quad (10)$$

S.t:

$$\sum_k \sum_l f_{ijkl} = 1 \quad \forall i, j \quad (11)$$

$$\sum_l f_{ijkl} \leq \bar{z}_{ik} \quad \forall i, j, k \quad (12)$$

می‌شود. مدل دوم از متغیرهای سه شاخصه استفاده می‌کند. مدل نخست دارای آزادسازی خطی فشرده‌تری نسبت به حالت سه شاخصه است و حل آن به لحاظ زمانی سریع‌تر صورت می‌گیرد. البته ضعف این گونه مدل‌ها احتیاج داشتن به حافظه موقت بالا در سیستم مورد اجرا می‌باشد که در این تحقیق سعی می‌شود با پیاده‌سازی الگوریتم تجزیه بندرز این نقطه ضعف برطرف گردیده و همزمان از کران خطی فشرده‌تر مدل چهار شاخصه مبتنی بر جریان بهره‌جست. به همین دلیل در تحقیق حاضر از مدل چهار شاخصه استفاده خواهد شد. مدل ارائه شده به صورت ذیل است [۱۰]:

فرض کنید N مجموعه گره‌های تقاضا در شبکه باشد. برای هر جفت گره $i \in N$ و $j \in N$ پارامتر t_{ij} را برابر مقدار جریانی می‌گیریم که باید از i به j فرستاده شود. فرض می‌شود هر واحد هزینه حمل جریان از i به j برابر d_{ij} است. پارامتر α را برابر ضریب تخفیف انتقال جریان بر روی کمان‌های هاب می‌گیریم. پارامترهای χ و δ به ترتیب ضرایب هزینه جمع‌آوری (از اسپوک به هاب) و توزیع (از هاب به اسپوک) هستند. متغیرهای تصمیم مسأله به شرح زیر است: z_{ik} متغیری دودویی است و در صورتی مقدار یک می‌گیرد که گره i به هاب k اختصاص یابد در غیر این صورت صفر است. توجه شود اگر $z_{kk} = 1$ شود به مفهوم راه‌اندازی هاب در نقطه k است. متغیر چهار شاخصه f_{ijkl} را برابر درصدی از t_{ij} می‌گیریم که از طریق مسیر $j \rightarrow l \rightarrow k \rightarrow i$ عبور داده می‌شود به نحوی که نقاط k و l هاب باشند. با تعاریف انجام شده فرمول‌بندی پیشنهادی به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l t_{ij}(\chi d_{ik} + \alpha d_{kl} + \delta d_{lj}) f_{ijkl} \quad (1)$$

S.t:

$$\sum_k z_{ik} \leq r \quad \forall i \quad (2)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk} \quad \forall i, k \quad (3)$$

$$\sum_k z_{kk} = p \quad (4)$$

$$\sum_k \sum_l f_{ijkl} = 1 \quad \forall i, j \quad (5)$$

$$\sum_l f_{ijkl} \leq z_{ik} \quad \forall i, j, k \quad (6)$$

$$\sum_k f_{ijkl} \leq z_{jl} \quad \forall i, j, l \quad (7)$$

$$f_{ijkl} \geq 0 \quad \forall i, j, k, l \quad (8)$$

$$z_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i, k \quad (9)$$

رابطه (۱) تابع هدف مدل بوده و مجموع هزینه‌های انتقال جریان در شبکه را کمینه می‌کند. رابطه (۲) تضمین می‌کند هر گره حداکثر به r هاب اختصاص یابد. گره‌های شبکه تنها می‌توانند به هاب‌ها اختصاص یابند که از طریق رابطه (۳) محقق می‌شود. رابطه (۴) تعداد کل هاب‌ها را به تعداد p محدود می‌کند. رابطه (۵) بیان می‌کند که جریان مابین جفت گره $i - j$ باید به صورت کامل انتقال

$$\sum_i \sum_j u_{ij} - \sum_i \sum_j \sum_k w_{ijk} z_{ik} - \sum_i \sum_j \sum_l s_{ijl} z_{jl} \quad (23) \quad \sum_k f_{ijkl} \leq \bar{z}_{jl} \quad \forall i, j, l \quad (13)$$

$$\eta \geq 0 \quad (24)$$

$$z_{ik} \in \{0,1\} \quad \forall i, k \quad (25)$$

فرم دوگان مسأله فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\text{Max} \sum_i \sum_j u_{ij} - \sum_i \sum_j \sum_k w_{ijk} \bar{z}_{ik} - \sum_i \sum_j \sum_l s_{ijl} \bar{z}_{jl} \quad (14)$$

S.t:

$$u_{ij} - w_{ijk} - s_{ijl} \leq t_{ij}(\chi d_{ik} + \alpha d_{kl} + \delta d_{ij}) \quad \forall i, j, k, l \quad (15)$$

$$u_{ij} \in R \quad \forall i, j \quad (16)$$

$$w_{ijk} \geq 0 \quad \forall i, j, k \quad (17)$$

$$s_{ijl} \geq 0 \quad \forall i, j, l \quad (18)$$

که در آن Δ و Ω به ترتیب مجموعه نقاط رأسی و جهت‌های رأسی مسأله (۱۴)-(۱۸) می‌باشد.
 بنابراین مسأله اصلی آزاد شده شامل متغیرهای پیچیده (عدد صحیح) و محدودیت‌های شامل این متغیرها، متغیر مثبت η و برش‌های بندری است. تعداد برش‌های بندری می‌تواند نامایی باشد اما تنها تعدادی از آن‌ها در جواب بهینه فعالند به همین دلیل استراتژی آزادسازی پیاده می‌گردد. در حقیقت در ابتدای الگوریتم هیچ برشی وجود نداشته و این برش‌ها پس از هر تکرار و بررسی شرایط بهینگی اضافه می‌گردند. اضافه نمودن برش‌های بهینگی باعث بهبود کران پایین شده و الگوریتم را به سمت همگرایی سوق می‌دهند.

۴- بهبود کارایی الگوریتم

همگرایی الگوریتم تجزیه بندری با استراتژی‌های مختلفی قابل بهبود است. برخی از این استراتژی‌ها شامل موارد زیر است [۱۸]: (۱) انتخاب مدل مسأله به نحوی که کران خطی فشرده‌تری داشته باشد. (۲) افزودن نامعادلات مؤثر به مسأله اصلی آزاد شده به منظور کم‌تر کردن تعداد تکرارها. (۳) تحقیق در انتخاب نوع برش‌های بندری. (۴) ترکیب الگوریتم با روش‌های ابتکاری. در تحقیق حاضر موارد (۱)، (۲) و (۳) مورد توجه بوده‌اند. از دو مدل موجود برای مسأله، فرمول‌بندی با کران بهتر انتخاب گردید. به منظور کم‌تر کردن تعداد تکرارها و بهبود کران پایین مسأله اصلی آزاد شده یک دسته نامعادله که قادر به حذف کامل برش‌های شدنی هستند، توسعه داده شد. به علاوه با جداسازی برش‌ها با دو روش مختلف بر اساس ساختار مسأله و مقایسه آن‌ها، رویکرد بهتر که همگرایی سریع‌تری دارد انتخاب شد.

۴-۱- نامعادله مؤثر

تولید برش‌های شدنی کمکی به بهبود کران پایین نمی‌کنند و به لحاظ الگوریتمی نامطلوب هستند. در مسأله مورد تحقیق ما، علت نشدنی بودن یک جواب و به تبع آن تولید برش‌های شدنی وجود گره‌های ایزوله می‌باشد، به این مفهوم که اگر در یک جواب گرهی وجود داشته باشد که به هیچ‌هایی اختصاص نیافته باشد مسأله اولیه کمکی نشدنی و دوگان آن بیکران خواهد بود. بنابراین اگر هر گره حداقل به یک هاب اختصاص یابد جواب‌های حاصل از حل مسأله اصلی آزاد شده همواره شدنی خواهد بود. این امر با اضافه نمودن نامعادله زیر محقق می‌شود:

$$\sum_k z_{ik} \geq 1 \quad \forall i \quad (26)$$

در مسأله فوق متغیرهای u_{ij} ، w_{ijk} و s_{ijl} به ترتیب متغیرهای متناظر محدودیت‌های (۱۱) تا (۱۳) هستند. با توجه به تابع هدف این مسأله دو نوع برش بهینگی یا شدنی در هر تکرار می‌تواند با استفاده از مقادیر دوگان تولید شده و به مسأله اصلی آزاد شده اضافه گردد. در صورتی که مسأله (۱۴)-(۱۸) بیکران شود، مسأله (۱۰)-(۱۳) نشدنی بوده، یک برش شدنی که معادل یک جهت رأسی مسأله دوگان می‌باشد به ترتیب زیر تولید می‌شود:

$$\sum_i \sum_j \bar{u}_{ij} - \sum_i \sum_j \sum_k \bar{w}_{ijk} z_{ik} - \sum_i \sum_j \sum_l \bar{s}_{ijl} z_{jl} \leq 0 \quad (19)$$

اگر مسأله دوگان کمکی کران دار باشد به مفهوم شدنی بودن مسأله اولیه بوده و یک برش بهینگی مطابق رابطه (۲۰) با استفاده از متغیر کمکی η تولید می‌شود. توجه شود که این برش معادل یک نقطه رأسی مسأله دوگان است:

$$\eta \geq \sum_i \sum_j \bar{u}_{ij} - \sum_i \sum_j \sum_k \bar{w}_{ijk} z_{ik} - \sum_i \sum_j \sum_l \bar{s}_{ijl} z_{jl} \quad (20)$$

متغیر η به منظور بر آورد هزینه جا به جایی ترافیک در شبکه به کار می‌رود و به همین علت مثبت می‌باشد.

۳-۲- مسأله اصلی آزاد شده

مسأله اصلی مورد بحث در تحقیق حاضر (۱)-(۹) می‌تواند به فرم زیر آزاد شود:

$$\text{Min } \eta \quad (21)$$

S.t:

$$(2)-(4)$$

$$\sum_i \sum_j u_{ij} - \sum_i \sum_j \sum_k w_{ijk} z_{ik} - \sum_i \sum_j \sum_l s_{ijl} z_{jl} \leq 0 \quad \forall (u, w, s) \in \Delta \quad (22)$$

آزمایش‌های انجام شده از مجموعه داده شبکه ترکیه و USA423 استفاده شده است. مجموعه داده شبکه ترکیه شامل ۸۱ شهر ترکیه و میزان جریان ترافیکی مابین آن‌ها می‌باشد. مجموعه داده USA423 در مقاله [۱۱] معرفی گردیده است. این داده‌ها شامل اطلاعات واقعی مربوط به فاصله و حجم جریان در خطوط هوایی ۴۲۳ شهر ایالات متحده آمریکا است که در یک دوره ۳ ماهه جمع‌آوری شده است.

ما در ابتدا به منظور اعتبارسنجی و ارزیابی الگوریتم توسعه داده شده آن را بر روی مجموعه داده شبکه ترکیه پیاده سازی کردیم. در جدول (۱) مسائلی با ۲۵ گره حل شده است. در جدول یاد شده سه ستون اول معرف پارامترهای مسئله است. ستون چهارم مقدار ضریب تخفیف انتخابی را نشان می‌دهد. ستون بعدی مقدار بهینه تابع هدف را نشان می‌دهد. در ستون "CPLEX" زمان لازم برای حل مدل توسط حل‌کننده نرم‌افزاری گزارش شده است. در ستون BD1 زمان حل و تعداد تکرارهای الگوریتم بندرز برای حل مسئله با برش‌های رابطه (۲۷) گزارش شده است. در ستون BD2 این مقادیر برای حل مسئله توسط الگوریتم با برش‌های رابطه (۲۸) ارائه شده است. در این جدول مقدار زمان‌های لازم توسط الگوریتم‌ها مقایسه شده و اعداد بهتر برجسته شده‌اند. متوسط زمان لازم برای حل مسائلی با ۲۵ گره توسط حل‌کننده نرم‌افزاری ۶۰.۵۸ ثانیه گزارش شده است. این مقدار برای الگوریتم‌های بندرز BD1 و BD2 به ترتیب ۱۵۶.۲۷ و ۶۶.۲۳ ثانیه است. همان‌گونه که ملاحظه می‌گردد الگوریتم دوم نسبت به اولی به لحاظ زمان محاسباتی برتری دارد. حل‌کننده دقیق نیز با تفاوت اندکی از الگوریتم BD2 بهتر است. ما محاسبات را با ۴۰ گره نیز انجام دادیم اما چون در تمام موارد حل‌کننده دقیق با خطای کمبود حافظه مواجه شد در تحقیق حاضر گزارش نگردید. حال توجه به این نکته حائز اهمیت است که بر طبق مرجع [۱۰] مدل چهار شاخصه (استفاده شده در این تحقیق) به دلیل داشتن آزادسازی خطی بهتر بر مدل سه شاخصه برتری دارد. اما همان‌گونه که بیان گردید مدل مذکور در مسائل بزرگ‌تر از ۴۰ گره با خطای حافظه مواجه می‌شود. نتیجه این‌که مدل سه شاخصه به لحاظ زمان حل دارای نقطه ضعف بوده و مدل چهار شاخصه نیز برای مسائل بزرگ با خطای حافظه مواجه می‌شود بنابراین استفاده از رویکرد تجزیه مبتنی بر مدل چهار شاخصه برای مسائل بزرگ‌تر پیشنهاد می‌شود. شایان ذکر است در مرجع [۱۰] به منظور حل مسائل بزرگ‌تر از ۲۵ گره تنها از مدل سه شاخصه استفاده شده است.

در ادامه الگوریتم پیشنهادی بر روی مجموعه داده USA423 پیاده شده است. در این محاسبات، مشابه با تحقیق [۱۱] از دو ترکیب مختلف برای پارامترهای α ، γ و δ استفاده شده است. مقادیر ۰.۱، ۰.۰۷، ۰.۰۹ و ۰.۰۹، ۰.۰۷۵ و ۰.۰۸ (به ترتیب) مورد استفاده قرار گرفته‌اند. ما در جداول، ترکیب اول را با A و ترکیب دوم را با B کدگذاری نموده‌ایم. در جداول ۲ و ۳ پارامتر تعداد هاب از مجموعه $\{4,5\}$ و پارامتر r از محدوده $2 \leq r \leq p - 1$ به ازای هر حالت انتخاب شده است.

با اضافه نمودن نامعادله (۲۶) به مسئله (۲۵)-(۲۱)؛ شدنی بودن جواب تضمین شده و برش‌های شدنی تولید نخواهد شد که این امر باعث تسریع در همگرایی الگوریتم خواهد شد.

۴-۲- تفکیک برش‌ها

با دقت در برش بندرزی (۲۳) می‌توان دریافت که برش یاد شده قابل تفکیک به دو روش مختلف است: ۱- یک برش به ازای هر گره در شبکه تولید شود. این امر ناشی از این حقیقت است که مسئله کمکی در ازای مقادیر ثابت متغیرهای دودویی به یک مسئله جریان شبکه چند کالایی تبدیل می‌شود. ۲- یک برش به ازای هر جفت گره $i - j$ در شبکه تولید شود. باید توجه داشت که مسئله کمکی به ازای هر جفت گره به یک مسئله کوتاه‌ترین مسیر تقلیل می‌یابد. در حالت اول در هر تکرار n برش تولید می‌شود که $n = \|N\|$ است. ما در محاسبات خود این حالت را با (BD1) نشان داده‌ایم. در صورتی‌که به ازای هر جفت گره یک برش (حالت دوم) تولید کنیم در هر تکرار n^2 برش خواهیم داشت. این الگوریتم در محاسبات با (BD2) نشان داده شده است.

در حالت نخست برش بندرزی به فرم زیر خواهد بود:

$$\sum_j u_{ij}^h - \sum_j \sum_k w_{ijk}^h z_{ik} - \sum_j \sum_l s_{ijl}^h z_{jl} \leq \eta_i \quad \forall i \in N, h \in H \quad (27)$$

در حالت دوم برش به صورت زیر تفکیک می‌شود:

$$u_{ij}^h - \sum_k w_{ijk}^h z_{ik} - \sum_l s_{ijl}^h z_{jl} \leq \eta_{ij} \quad \forall i, j \in N, h \in H \quad (28)$$

که در روابط فوق H مجموعه تکرارها می‌باشد. نکته قابل توجه دیگر اینکه مسئله کمکی به لحاظ اندازه (تعداد متغیر و محدودیت) با افزایش تعداد گره‌های شبکه، بسیار بزرگ شده و حل آن در سیستم‌های معمولی امکان‌پذیر نیست. این مسئله نیز به مانند برش‌ها به دو صورت قابل تجزیه است. نخست این‌که در هر تکرار پس از حل مسئله اصلی آزاد شده به ازای هر گره یک مسئله خطی توزیع چند کالایی (n مسئله) حل شود یا به ازای هر جفت گره یک مسئله مسیریابی حل گردد. در تحقیق حاضر تنها حالت نخست در نظر گرفته شده است زیرا با بزرگ شدن مسئله حل تعداد n^2 مسئله خطی پس از هر تکرار به لحاظ محاسباتی به صرفه نخواهد بود.

۵- محاسبات عددی

در این بخش محاسبات عددی مدل و الگوریتم پیشنهادی ارائه شده است. فرمول‌بندی مسئله و هر دو حالت الگوریتم تجزیه بندرز در محیط نرم‌افزار بهینه‌سازی GAMS کد گردید. برای حل مدل و مسائل اصلی آزاد شده و کمکی از آخرین نسخه حل‌کننده CPLEX یعنی ۱۲.۶ استفاده شد. محاسبات بر روی رایانه همراه با پردازنده اینتل Core(i3) با سرعت پردازش ۲.۵۳ گیگاهرتز، حافظه داخلی ۳ گیگابایتی و سیستم عامل ویندوز ۸.۱ انجام شده است. در

در جدول (۳) نتایج حاصل از حل مسائلی با ۵۰ و ۷۵ گره گزارش شده است. با توجه به برتری الگوریتم BD2 بر حل کننده CPLEX و الگوریتم BD1 تنها این الگوریتم بر روی مسائل پیاده‌سازی شد. در ستون آخر جدول یاد شده شماره شهرهایی از مجموعه داده USA423 که به‌عنوان هاب انتخاب شده‌اند ذکر شده است. بیشترین زمان حل مسائل با ۵۰ گره از ۱۰۰۰ ثانیه کمتر بوده است به‌علاوه متوسط این زمان‌ها کمتر از ۶۵۰ ثانیه بوده است. همچنین متوسط تکرارهای لازم برای حل مسائل با ۵۰ گره ۱۰ تکرار بوده است. متوسط زمان حل مسائل با ۷۵ گره کمتر از ۲۹۰۰ ثانیه گزارش شده است در حالی که بیشترین زمان حل لازم کمتر از ۵۰۰۰ ثانیه است که مربوط به مسأله با ۵ هاب و $r=2$ از گروه B است.

نهایتاً در جدول ۴ نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم BD2 بر روی مسائل بزرگ‌تر گردآوری شده است. در این جدول از هر کدام از مسائل با ۸۰، ۹۰، و ۱۰۰ گره دو مسأله حل و ارائه شده است. بیشترین زمان حل مربوط به مسأله با ۱۰۰ گره و ۴ هاب است که حدود ۶.۵ ساعت است. در نمودار شکل (۲) که مربوط به مسأله با ۱۰۰ گره و ۵ هاب است شکاف بهینگی برحسب تکرار با استفاده از رابطه (۲۹) محاسبه و ترسیم شده است:

$$\frac{UB-LB}{UB} * 100 \quad (29)$$

همان‌گونه که از نمودار نیز قابل دریافت است حل مسأله در ۸ تکرار به پایان رسیده است اما نکته قابل توجه اینکه از تکرار چهارم به بعد شکاف بهینگی بسیار ناچیز بوده و از ۳ درصد کمتر است. در واقع اگر شکاف بهینگی ۲ درصد قابل پذیرش باشد الگوریتم در تکرار پنجم متوقف می‌شود که این امر به لحاظ زمانی برای کاربر به صرفه‌تر خواهد بود.

با توجه به جدول (۲)، حل کننده CPLEX تمام مسائل با ۱۵ گره را در زمانی کمتر از ۴ ثانیه حل نموده است. این در حالیست که متوسط زمان حل برای الگوریتم نخست ۲۱.۵۵ ثانیه و برای الگوریتم دوم ۱۵.۲۵ ثانیه است و به جز در یک مسأله زمان حل الگوریتم BD2 از BD1 بهتر بوده است علت این امر را می‌توان در تعداد تکرارهای کمتر لازم برای همگرایی الگوریتم BD2 جستجو نمود. متوسط زمان لازم برای حل مسائلی با ۲۵ گره توسط حل کننده نرم‌افزاری ۳۶.۸۶ ثانیه گزارش شده است. این مقدار برای الگوریتم های بندرز BD1 و BD2 به ترتیب ۴۳.۴۱ و ۳۲.۷۱ ثانیه است. در ۶ مسأله از ۱۰ مسأله حل شده با ۲۵ گره بهترین زمان به الگوریتم BD2 اختصاص داشته است. بنابراین می‌توان با توجه به نتایج محاسباتی دریافت که برای حل مسائل کوچک استفاده از حل کننده نرم‌افزاری (در این جا CPLEX) نتایج بهتری به دنبال دارد، اما با بزرگ‌تر شدن مسأله؛ الگوریتم تجزیه بندرز زمان کمتری برای اجرا نیاز داشته ضمن این‌که به دلیل تجزیه مسأله مورد بحث به مسائل کوچکتر، مثال‌های بزرگ‌تری (با حافظه داخلی ثابت) قابل پیاده‌سازی خواهد بود.

در نمودار شکل (۱) منحنی همگرایی الگوریتم‌های BD1 و BD2 برای حل آخرین مسأله از جدول (۲) ترسیم شده است. در این نمودار کران‌های بالا و پایین هر الگوریتم به ازای تکرارها گزارش شده است. با دقت در نمودار می‌توان دریافت که کران پایین الگوریتم دوم همواره از الگوریتم BD1 بهتر بوده که به علت تولید برش‌های بیشتر در هر تکرار است ضمن این‌که کران بالای این الگوریتم نیز سریع‌تر همگرا شده است. توجه شود که حتی برای مثال‌های کوچک با ۲۵ گره نیز الگوریتم بندرز شماره دو نسبت به حل کننده دقیق نتایج بهتری به دست داده است.

جدول (۱): مقایسه حل کننده دقیق با الگوریتم حل‌های پیشنهادی در شبکه ترکیه با ۲۵ گره

n	P	r	α	Optimal	(BD1)			(BD2)	
					Cplex CPU(s)	CPU(s)	Iterations	CPU(s)	Iterations
۲۵	۴	۱	۰.۹	۵,۱۷۰,۲۴۱	۷۸,۲۹	۱۲۳,۹۳	۱۳	۶۱,۱۵	۶
		۲	۰.۹	۴,۷۸۱,۴۵۲	۱۵۰,۸۶	۲۳۴,۳۶	۲۴	۱۰۷,۸۱	۱۰
		۳	۰.۹	۴,۰۶۷,۷۲۴	۲۱,۶۰	۱۰۹,۰۷۷	۱۶	۶۰,۹۵	۷
۵	۱	۱	۰.۹	۴,۹۵۹,۲۵۲	۵۳,۳۲	۱۳۳,۷۴	۱۴	۵۴,۶۶	۶
		۲	۰.۹	۴,۰۶۱,۶۴۸	۱۰۴,۸۶	۲۳۶,۶۸	۲۰	۸۵,۵۱	۸
		۳	۰.۹	۴,۰۵۶,۲۵۶	۸۱,۸۲	۲۴۲,۲۲	۲۷	۸۱,۶۴	۹
		۴	۰.۹	۴,۰۵۴,۷۶۲	۴۷,۱۶	۱۵۵,۸۱	۲۲	۶۹,۳۳	۸
۴	۱	۱	۰.۲	۲,۹۳۶,۴۴۲	۴۷,۶۹	۱۱۵,۰۶	۱۶	۵۱,۶۴	۶
		۲	۰.۲	۲,۹۰۵,۲۸۳	۹۲,۴۵	۱۶۶,۴۶	۲۳	۷۹,۴۵	۹
		۳	۰.۲	۲,۹۰۱,۸۷۹	۲۵,۰۵	۱۷۶,۰۸	۲۴	۶۶,۶۳	۸
۵	۱	۱	۰.۲	۲,۴۲۳,۶۷۰	۴۴,۳۵	۸۹,۶۳	۱۳	۳۹,۴۳	۵
		۲	۰.۲	۲,۴۱۵,۷۳۵	۲۰,۲۲	۱۲۰,۰۳	۱۷	۵۶,۸۳	۷
		۳	۰.۲	۲,۴۱۴,۷۳۵	۱۹,۹۳	۱۲۷,۷۸	۱۹	۵۷,۳۹	۷
		۴	۰.۲	۲,۴۱۴,۷۳۵	۱۹,۵۰	۱۲۷,۰۹	۱۹	۵۴,۸۱	۷
Maximum					۱۵۰,۸۶	۲۴۲,۲۲	۲۷	۱۰۷,۸۱	۱۰
Average					۶۰,۵۸	۱۵۶,۲۷	۱۹,۰۷	۶۶,۲۳	۷,۳۸

جدول (۲): مقایسه حل کننده دقیق با الگوریتم حل های پیشنهادی در شبکه USA423

n	P	r	Type	Optimal	Cplex	(BD1)		(BD2)		
					CPU(s)	CPU(s)	Iterations	CPU(s)	Iterations	
۱۵	۴	۲	A	۴۷۰۴۸۶۴۰۳	۳۰۵۱	۱۴۰۰۰	۶	۱۶۰۳۹	۷	
			A	۴۷۰۴۲۴۴۰۴	۳۰۶۵	۱۸۰۴۴	۸	۱۵۰۷۰	۷	
	۵	۲	A	۴۶۲۷۲۹۷۰۲	۳۰۶۹	۲۰۰۷۶	۹	۱۵۰۹۰	۷	
			A	۴۶۲۵۶۱۲۰۱	۳۰۴۶	۲۰۰۶۹	۹	۱۳۰۵۷	۶	
			A	۴۶۲۵۵۵۸۰۸	۳۰۵۴	۲۴۰۳۱	۱۱	۱۱۰۷۹	۵	
	۴	۲	B	۴۹۴۰۶۶۹۰۹	۳۰۴۳	۲۵۰۲۸	۱۱	۱۷۰۷۴	۸	
			B	۴۹۲۲۲۰۷۰۸	۳۰۵۳	۲۲۰۸۱	۱۰	۱۳۰۴۲	۶	
	۵	۲	B	۴۸۱۱۴۵۸۰۹	۳۰۴۱	۲۰۰۶۴	۹	۱۸۰۶۱	۸	
			B	۴۸۷۴۶۸۳۰۸	۳۰۳۸	۲۴۰۲۶	۱۱	۱۵۰۸۵	۷	
			B	۴۸۷۳۹۶۵۰۸	۳۰۵۷	۲۴۰۳۷	۱۱	۱۳۰۵۸	۶	
	Maximum Average					۳۰۶۹	۲۵۰۲۸	۱۱	۱۸۰۶۱	۸
	Average					۳۰۵۱	۲۱۰۵۵	۹۰۵	۱۵۰۲۵	۶۰۷
۲۵	۴	۲	A	۵۳۵۳۷۱۹۰۳	۳۷۰۴۶	۳۷۰۳۵	۸	۲۴۰۶۲	۵	
			A	۵۳۴۹۹۷۳۰۴	۳۱۰۴۵	۳۲۰۴	۷	۲۹۰۲۱	۶	
	۵	۲	A	۵۲۳۰۷۳۶۰۰	۳۷۰۵۵	۳۸۰۸۰	۸	۳۲۰۶۱	۷	
			A	۵۲۲۹۰۳۶۰۷	۵۸۰۰۵	۴۰۰۲۲	۹	۳۸۰۲۰	۸	
			A	۵۲۲۸۵۱۴۰۸	۵۲۰۱۴	۴۰۰۱۲	۹	۲۸۰۹۱	۶	
	۴	۲	B	۵۵۶۰۴۸۱۰۴	۱۶۰۸۹	۳۸۰۸۲	۸	۳۳۰۰۳	۷	
			B	۵۵۳۲۹۳۱۰۳	۲۴۰۴۰	۳۹۰۴۶	۹	۲۸۰۱۴	۶	
	۵	۲	B	۵۴۸۶۳۱۶۰۵	۵۳۰۴۳	۶۲۰۶۰	۱۳	۳۹۰۱۳	۸	
			B	۵۴۶۵۵۹۶۰۲	۳۴۰۶۵	۵۴۰۰۱	۱۲	۴۱۰۶۷	۹	
			B	۵۴۶۱۹۸۳۰۶	۳۱۰۶۳	۵۰۰۳۴	۱۱	۳۱۰۶۳	۷	
	Maximum Average					۵۸۰۰۵	۶۲۰۶۰	۱۲	۴۱۰۶۷	۹
	Average					۳۶۰۸۶	۴۲۰۴۱	۹۰۴	۳۲۰۷۱	۶۰۹

جدول (۳): حل دقیق مسائل متوسط شبکه USA423

n	r	p	Type	optimal	(BD2)Cpu	Iterations	Hub locations			
۵۰	۲	۴	A	۱۳۰۸۶۵۹۲۲۰۴	۶۲۶۰۸۱	۱۰	۵۰۰۳۰۲۶۰۲			
				۱۳۰۲۸۱۷۹۳۰۰	۶۸۹۰۲۳	۱۱	۳۰۰۲۶۰۴۰۲			
				۱۲۲۷۵۶۴۸۰۲	۴۷۳۰۰۳	۸	۵۰۰۳۰۲۶۰۴۰۲			
				۱۲۲۳۰۹۰۶۷۰۰	۳۹۳۰۷۷	۷	۵۰۰۳۰۲۶۰۴۰۲			
	۴	۴	B	۱۲۲۲۳۵۵۹۷۰۱	۳۹۳۰۵۵	۷	۵۰۰۳۰۲۶۰۴۰۲			
				۱۲۶۸۹۶۹۹۳۰۴	۸۵۸۰۶۶	۱۱	۵۰۰۳۰۲۶۰۲			
				۱۲۵۹۶۸۹۷۲۰۵	۹۲۸۰۳۱	۱۴	۵۰۰۳۰۲۶۰۲			
				۱۲۲۴۵۰۰۵۳۰۷	۵۸۹۰۸۲	۱۰	۵۰۰۳۰۲۶۰۴۰۲			
۲	۵	B	۱۲۱۶۲۷۳۲۸۰۸	۴۰۷۰۶۸	۷	۵۰۰۳۲۰۲۶۰۴				
			۱۲۱۳۶۶۱۴۶۰۲	۴۴۵۰۸۷	۸	۵۰۰۳۲۰۲۶۰۴				
			Maximum Average					۹۲۸۰۳۱	۱۴	
			Average					۶۴۶۰۰۶	۱۰	
۷۵	۲	۴	A	۵۵۸۲۷۱۰۶۵۰۵	۲۵۴۷۰۸۷	۸	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴			
				۵۵۵۹۹۳۶۸۰۰۷	۲۴۸۹۰۱	۸	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴			
				۵۳۴۲۷۹۲۰۴۰۳	۳۳۷۲۰۲	۱۰	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴			
				۵۳۱۵۸۴۹۱۶۰۴	۲۵۵۲۰۱۴	۸	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴			
	۴	۴	B	۵۳۰۸۰۶۳۸۲۰۳	۲۹۳۲۰۰۱	۱۰	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴			
				۵۴۰۸۸۹۲۴۴۰۸	۳۹۸۳۰۷۵	۹	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴			
				۵۳۴۴۴۲۳۷۳۰۲	۲۲۱۵۰۹۰	۸	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴			
				۵۲۸۷۱۸۱۱۶۰۲	۴۹۰۸۰۵۲	۱۱	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴			
۲	۵	B	۵۲۱۴۶۵۱۵۵۰۲	۲۵۷۰۰۹۱	۹	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴				
			۵۱۹۰۲۳۲۶۲۰۱	۲۰۶۷۰۹۹	۸	۶۳۰۵۲۰۲۶۰۴				
Maximum Average					۴۹۰۸۰۵۲	۱۱				
Average					۲۸۶۴۰۰۳	۹				

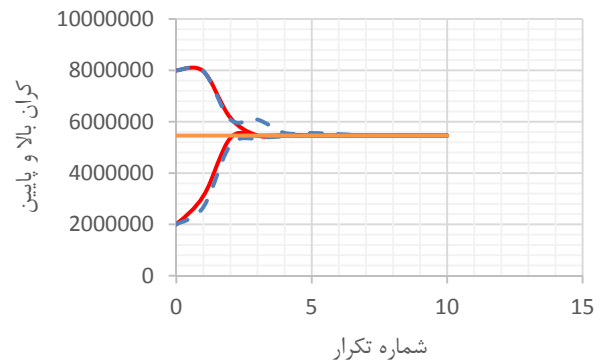
جدول (۴): حل دقیق مسائل بزرگ

n	Type	Optimal	(BD2)Cpu	Hubs
۸۰	A	۶۲۲۲۱۰۷۸۶۰۴	۳۵۳۴۰۸۵	۹
	B	۵۷۲۳۷۹۳۳۱۰۸	۴۱۳۱۰۸۹	۱۰
۹۰	A	۸۰۷۴۵۴۲۸۴۰۷	۱۳۰۰۴۰۲۰	۱۱
	B	۷۳۱۶۳۶۳۶۰۰۰	۵۷۳۵۰۲۴	۹
۱۰۰	A	۸۸۵۳۳۰۲۴۸۰۲	۲۲۴۹۱۰۰۱	۱۳
	B	۷۹۵۹۳۲۴۵۱۰۷	۸۹۶۰۰۸۹	۸

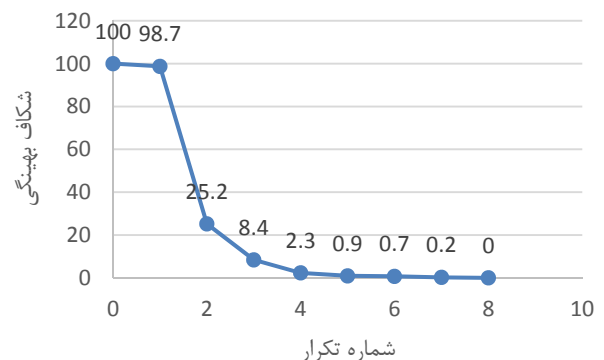
دقیق مسائل بزرگتر از جمله پیشنهاداتی است که می‌تواند برای تحقیق کنونی در نظر گرفته شود. نکته قابل توجه دیگر آن که حل دقیق مسائل بزرگتر احتیاج به طراحی الگوریتم‌های ابتکاری برای بهبود سریع کران بالای مسأله و نیز اضافه نمودن برش‌های اولیه برای بهبود کران پایین با هزینه محاسباتی مناسب دارد. از اینرو طراحی الگوریتم حل مناسب برای حل مسأله کمکی در زمان کوتاه‌تر نسبت به حل کننده نرم افزاری، قابلیت حل دقیق مسائل بزرگتر را فراهم می‌کند.

مراجع

- [1] O'Kelly, M.E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities., *European Journal of Operational Research*, 32: 393-404, 12.
- [2] Alumur, S., Bahar Y. Kara. (2008). Network Hub Location Problems: The State of the Art. *European Journal of Operational Research*, 190:1-21.
- [3] Campbell, J.F., M.E. O'Kelly. (2012). Twenty-Five Years of Hub Location Research. *Transportation Science*, 46:153-69.
- [4] Farahani Zanjanirani, R., Hekmatfar, M., Boloori Arabani, A., Nikbaksh, E. (2013). Hub Location Problems: A Review of Models, Classification, Solution Techniques, and Applications. *Computers and Industrial Engineering*, 64:1096-1109.
- [5] Campbell, J.F. (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems, *European Journal of Operational Research*, 72:387-405.
- [6] Correia, I., Stefan, N., Francisco, S. (2011). Hub and Spoke Network Design with Single-Assignment, Capacity Decisions and Balancing Requirements. *Applied Mathematical Modelling*, 35:4841-51.
- [7] Ernst, A.T., Krishnamoorthy, M. (1999). Solution Algorithms for the Capacitated Single Allocation Hub Location Problem. *Annals of Operations Research*, 86:141-59.
- [8] Alfredo, M. (2005). Formulating and Solving Splittable Capacitated Multiple Allocation Hub Location Problems. *Computers and Operations Research*, 32: 3093-3109.
- [9] Love, R.F., Morris, J.J., Wesolowsky, G.O. (1988). *Facilities Location: Models & Methods*: North-Holland.



شکل (۱): مقایسه همگرایی الگوریتم‌های BD1 (خط چین) و BD2 (پیوسته)



شکل (۲): نمودار شکاف بهینگی بر حسب تعداد تکرار برای مسأله با ۱۰۰ گره و ۵ هاب

۶- نتایج و پیشنهادات آتی

در تحقیق حاضر یک الگوریتم حل دقیق برای مسأله جایابی هاب با تخصیص r-تایی طراحی و پیشنهاد شد. رویکرد پیشنهادی بر مبنای رویکرد تجزیه بندرز بوده و قادر به حل دقیق مسائل بزرگ جایابی هاب و با ابعاد نزدیک به مسائل واقعی در مدت زمانی مناسب است. پیشنهادات متفاوتی را می‌توان برای تحقیقات آتی مطرح نمود. توسعه مدل مسأله در حالات ظرفیت دار (محدودیت‌های ظرفیتی)، در نظر گرفتن ازدحام در هاب‌ها، لحاظ نمودن داده‌های تصادفی یا فازی در مسأله مورد مطالعه، در نظر گرفتن شبکه هاب پویا که در آن مکان هاب‌ها در دوره‌های مختلف زمانی تغییر می‌کند و حل

- Uncapacitated Hub Location. *Operations Research*, 59:1477-1490.
- [16] Contreras, I., Cordeau, J.F., Laporte, G. (2011). Stochastic uncapacitated hub location. *European Journal of Operational Research*, 212: 518-528.
- [17] De Camargo, R.S., Miranda, G. (2012). Single allocation hub location problem under congestion: Network owner and user perspectives. *Expert Systems with Applications*, 39:3385-3391.
- [18] De Sá, E.M., De Camargo, R.S., Miranda, G. (2013). An improved Benders decomposition algorithm for the tree of hubs location problem. *European Journal of Operational Research*, 226:185-202.
- [۱۹] توکلی‌مقدم رضا، افشاری نیا زهرا، قلی پور کنعانی یوسف (۱۳۹۲). استفاده از روش تجزیه بندرز برای حل مسأله طراحی شبکه زنجیره تامین چند محصولی دو سطحی با تقاضای تصادفی. نشریه پژوهش‌های مهندسی صنایع در سیستم‌های تولید، سال اول، شماره دوم، صفحه ۱۵۵-۱۶۵.
- [10] Yaman, H. (2011). Allocation strategies in hub networks. *European Journal of Operational Research*, 211: 442-451.
- [11] Peiró, J., Corberán, Á., Martí, R. (2014). GRASP for the uncapacitated r-allocation p-hub median problem. *Computers & Operations Research*, 43: 50-60.
- [12] Benders, J.F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4: 238-252.
- [13] De Camargo, R.S., Miranda, J.G., Luna, H.P. (2008). Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *Computers & Operations Research*, 35: 1047-1064.
- [14] De Camargo, R.S., Miranda, J.G., Ferreira, R.P.M., Luna, H.P. (2009). Multiple allocation hub-and-spoke network design under hub congestion. *Computers & Operations Research*, 36:3097-3106.
- [15] Contreras, I., Cordeau, J.F., Laporte, G. (2011). Benders Decomposition for Large-Scale



An Exact Solution Approach for the r-allocation p-Hub median problem

A. Eydi*, Kh. Barzegar

Department of Industrial Engineering, Collage of Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj, Iran

ARTICLE INFO

Article history:

Received 13 March 2014

Accepted 13 June 2015

Keywords:

Hub median location
Multiple allocation
Exact solution algorithm
Benders decomposition

ABSTRACT

Hub location problems have important role in transportation networks and telecommunication systems. These problems have received much attention in the recent decades. In p-hub median problem, hub facilities are located in a network and non-hub nodes are allocated to hub nodes such that the total routing cost is minimized. In this paper, the r-Allocation p-Hub median problem has been studied. In this problem, each node can be allocated to at most r hubs. The purpose of this paper is to study and design of an exact solution approach based on benders decomposition to tackle the proposed problem. Based on problem structure, we proposed some strategies to accelerate the convergence of benders decomposition algorithm. The computational results of the proposed exact algorithm are presented using the Turkish network and USA423 data sets. Computational experiments confirm the effectiveness of the proposed method.

* Corresponding author. Alireza Eydi
Tel.: 087-33660073; E-mail addresses: Alireza.eydi@uok.ac.ir