



## قیمت‌گذاری و کنترل موجودی توأم برای کالاهای فصلی و جایگزین

نادیا رسولی<sup>۱</sup>، عیسی نخعی کمال‌آبادی<sup>۲\*</sup>، هیرش محمدی‌پور<sup>۳</sup>

۱. کارشناسی‌ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

۲. استاد گروه مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس و دانشگاه کردستان، سنندج

۳. دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

### خلاصه

مدیریت موجودی و بازار کالاهای فصلی به دلیل محدود بودن فصل فروش از اهمیت بالایی برخوردار است. از طرف دیگر، امروزه با توجه به شرایط رقابتی و وجود اختلاف قیمتی بین بخش‌های مختلف بازار، مشتریان تمایل بیشتری به جایگزینی کالای مشابه ارزانتر با کالای گران‌تر را دارند. این نوع جایگزینی بر اساس تفاوت قیمتی و بر مبنای مشتری نام دارد. در این مقاله مدلی برای قیمت‌گذاری و کنترل موجودی توأم کالاهای فصلی و جایگزین ارائه می‌شود. فرض شده است که دو کالای جایگزین از دو بنگاه مختلف هستند که با هم رقابت دارند. هدف از ارائه مدل تعیین همزمان قیمت و سیاست بهینه موجودی برای حداکثرسازی سود بنگاه است. بعد از ارائه مدل اثبات می‌شود که تابع هدف، تابعی مقعر از قیمت است و مقدار بهینه آن موجود است. سپس روش و الگوریتم حل مسأله ارائه می‌شود و در نهایت مثال عددی برای تشریح مدل و الگوریتم بحث خواهد شد.

### اطلاعات مقاله

تاریخچه مقاله:

دریافت: ۱۳۹۲/۵/۲

پذیرش: ۱۳۹۲/۱۰/۷

کلمات کلیدی:

قیمت‌گذاری پویا

کنترل موجودی

کالاهای فصلی و جایگزین

بازار رقابتی

### ۱- مقدمه

باشد هزینه موجودی باعث افزایش هزینه‌ها و در نتیجه کاهش سود خواهد بود. بنابراین تعیین سفارش بهینه در زنجیره‌تأمین اهمیت زیادی دارد. از طرفی قیمت‌گذاری مهم‌ترین اهرمی است که می‌تواند سود زنجیره‌تأمین را با انتخاب درست منبع و تقاضا بیشینه کند. قیمت‌گذاری روی مقدار محصول تقاضا شده و درآمد کل حاصله تأثیر دارد [۱]. اگر قیمت‌گذاری به‌درستی صورت گیرد باعث افزایش سود زنجیره‌تأمین و موفقیت بنگاه می‌شود ولی اگر قیمت بیشتر و یا کمتر از ارزش کالا شود، روی تقاضا و درآمد تأثیر می‌گذارد و در هر دو حالت درآمد را کم کرده و باعث شکست بنگاه می‌شود. بنابراین قیمت‌گذاری مناسب در زنجیره‌تأمین از اهمیت زیادی برخوردار است.

در گذشته قیمت‌گذاری و کنترل موجودی به‌صورت جداگانه توسط قسمت بازاریابی و بخش‌های عملیاتی انجام می‌شدند. هر کدام از این

مدیریت زنجیره‌تأمین از تهیه‌ی مواد خام تا ارسال به مشتری را شامل می‌شود و در این راستا تولیدکننده، تأمین‌کننده، حمل‌کننده‌ها، انبارداران، خرده‌فروشان و حتی مشتریان را در بر می‌گیرد و شامل جریان‌ات مواد و فیزیکی و اطلاعاتی است. یکی از اهداف زنجیره‌تأمین دسترسی به سود بیشینه است که برای اینکار بایستی درآمد را بیشینه و هزینه‌ها را مینیمم کرد. یکی از هزینه‌های زنجیره‌تأمین هزینه کنترل موجودی است. اگر میزان سفارش کمتر از تقاضا باشد سیستم دچار کمبود شده و در صورتی که بیشتر از تقاضا

\* نویسنده مسئول. عیسی نخعی کمال‌آبادی

تلفن: ۰۸۷۱-۶۶۲۴۷۷۵ پست الکترونیکی: nakhai@modares.ac.ir

بنگاهها از قیمت گذاری پویا برای تطابق تقاضا با موجودی یا ظرفیت با هدف افزایش درآمد استفاده می کنند. تفاوت قیمتی بین بخش های مختلف بازار، مشتریان را به تغییر انتخاب از قیمت بالاتر به قیمت پایینتر سوق می دهد که این منجر به جایگزینی قیمتی محصول می شود. اگر رفتار قیمتی بنگاه به کمبود منجر شود، در این صورت جایگزینی موجودی محصول رخ می دهد. هر دو نوع جایگزینی بر قیمت و تصمیمات ظرفیت تولیدی بنگاه اثر دارد. تأثیر جایگزینی قیمتی محصول بر قیمت گذاری و تصمیمات ظرفیت تولیدی توسط کیم و بل [۱۲] انجام شده است. در این مقاله مدل های قطعی و احتمالی با جایگزینی قیمتی توسعه داده شده است. همچنین تأثیر جایگزینی تقاضای متقارن و نامتقارن روی قیمت های بهینه و درآمد بررسی شده است. در سال ۲۰۰۵ بریتین و همکاران [۱۳] تحقیقی در مورد کالاهای قابل جایگزینی فسادپذیر با همبستگی تقاضا انجام دادند. در هر دوره ی تقاضا، مشتریان با محصولات جایگزینی با قیمت های مشخص روبرو می شوند. مدل این مقاله رفتار خرید خریداران را با تقاضای وابسته به قیمت نشان می دهد و مسأله فروشنده برای تعیین سیاست قیمت گذاری و ماکزیم سازی درآمد مورد مطالعه واقع شده است. از تحقیقات دیگری که در زمینه قیمت گذاری محصولات جایگزینی انجام شده، تحقیق بوکارت [۱۴] در سال ۲۰۱۲ است که برای هر محصول یک قیمت استاتیک با هدف ماکزیم سازی سود با فرض اینکه مشتریان میل به پرداخت مختلف دارند، تعیین می شود. برنامه ریزی و قیمت گذاری دینامیک احتمالی کاری بود که توسط دانگ و همکارانش برای کالاهای جایگزین در سطح خرده فروش انجام شد که سه مدل قیمت گذاری استاتیک، پویای یکپارچه<sup>۵</sup> و پویای مختلط<sup>۶</sup> مقایسه شده و به این نتیجه رسیدند که در مقیاس های بزرگ، قیمت گذاری پویا در زمینه کمبود موجودی بهتر از سایر سیاست های قیمت گذاری است زیرا تصمیمات اولیه موجودی به صورت کامل به قیمت گذاری در فصل فروش وابسته است [۱۵]. در سال ۲۰۰۸ کاراکل و چان [۱۶] مدلی در زمینه قیمت گذاری و کنترل موجودی کالاهای جایگزین با تقاضای احتمالی وابسته به قیمت انجام دادند. تقاضای هر محصول حالت افزایشی دارد طوری که میانگین تقاضاها، تابع خطی از قیمت محصول سطح بالای جدید بعلاوه یک عبارت افزایشی احتمالی است. فرض بر این است که عبارت احتمالی برای محصولات موجود سطح پایین از توزیع گسسته و عبارت احتمالی برای محصولات سطح بالا از توزیع پیوسته پیروی می کند. آنها در سال ۲۰۱۰ تحقیق قبلی خود را گسترش داده و نتایج را برای حالتی که عبارت احتمالی محصولات سطح پایین نیز از توزیع پیوسته پیروی می کند، محاسبه کردند [۱۷]. در تحقیق دیگر در سال ۲۰۱۰ بیش و سواندیچوچای [۱۸] تخصیص ظرفیتی برای دو محصول جایگزین بر مبنای مشتری با ظرفیت مشترک انجام

قسمت ها سعی داشتند سود خود را ماکزیم کنند. بخش بازاریابی سعی داشت با تعیین قیمت بهینه به سود ماکزیم برسد و بخش عملیاتی هم تلاش می کرد از طریق تعیین میزان بهینه سفارش، هزینه ها را حداقل و در نتیجه سود را حداکثر کند. در این صورت با توجه به تصمیم گیری مجزا در هر یک از این بخش ها سود کل بنگاه بهینه نمی شد. از این رو تعیین همزمان قیمت و میزان سفارش می تواند کمک زیادی به بنگاه ها در جهت دستیابی به سود بیشینه کند و سیستم را نسبت به حالتی که این تصمیمات به صورت منفرد صورت می گیرد، بهینه کند. در همین راستا علم های مدیریت درآمد، قیمت گذاری پویا و قیمت گذاری هوشمند به وجود آمده است. بنابراین با این توصیفات در پژوهش های اخیر قیمت گذاری و کنترل موجودی به صورت توأم [۶-۲] انجام گرفته است.

از اولین مقالات موجود در زمینه قیمت گذاری و کنترل موجودی کالاهای فصلی می توان به کار آقای هنگ [۷] در سال ۱۹۹۵ اشاره کرد که به تعیین قیمت و مقدار سفارش کالاهای فصلی با تقاضای احتمالی می پردازد. یکی از مفروضات این تحقیق ۲ دوره ای بودن تقاضا است که دوره ی ۱ ابتدای فصل و دوره ی ۲ انتهای فصل است و هدف تعیین قیمت و میزان سفارش در هر دوره می باشد. تخفیف در قیمت گذاری کالاهای فصلی در سال ۲۰۰۵ توسط آویو و پارگال [۸] به کار گرفته شده است. در این تحقیق تخفیف به دو دسته استراتژی تخفیف وابسته به موجودی<sup>۱</sup> و استراتژی تخفیف ثابت<sup>۲</sup> تقسیم بندی شده است. برای طبقه ی اول از تعادل نش<sup>۳</sup> برای بازی بین فروشنده و مشتری استفاده شده و برای طبقه ی دوم از مسأله ی بهینه سازی برای فروشنده استفاده شده است. در تحقیق دیگر قیمت گذاری پویای کالاهای فصلی با تقاضاهای خرید لحظه ای و پیش خرید کار شده است. در این مقاله مسأله ی تعیین قیمت پویا و مقدار سفارش برای سیستم موجودی کالاهای فصلی در افق زمانی محدود بررسی شده که سرویس به مشتریان با تحویل آماده و زمان بندی شده صورت می گیرد. تقاضا در این تحقیق وابسته به قیمت و زمان در نظر گرفته شده است. یو و چن [۹] مسأله را در حالتی که کمبود مجاز نیست بررسی و از روش لاگرانژ برای حل مدل استفاده نموده است و یکی از مقالات اصلی این پژوهش مقاله مذکور می باشد. در سال ۲۰۰۸ یو [۱۰] به بررسی رفتار محصولات فصلی در شاخص قیمت مشتری پرداخته که در آن مفروضات اقتصادی پیرامون روش های مستعمل از دید هزینه آزموده شده اند. مطالعات تجربی نشان می دهند که شاخص های مبتنی بر روش های مختلف نتایج متفاوتی دارند. معمولاً برای کالای فصلی از سیاست پایین آوردن قیمت از ابتدا به انتهای فصل استفاده می شود که این سیاست در مدل پویای رفتار انتخاب مشتری در بازارها برای کالاهای فصلی و با تقاضای پویا انجام شده است [۱۱].

4. demand correlation  
5. unified dynamic  
6. mixed dynamic

1. Inventory contingent discounting strategies.  
2. fixed-discount strategies  
3. Nash-equilibrium

کالاها تقاضا وابسته به قیمت و تفاوت قیمتی کالاها در نظر گرفته شده است. در این تحقیق تعداد کالاها جایگزین دوکالا در نظر گرفته شده که هر کالا مربوط به دو بنگاه مجزا است و در شرایط رقابتی قابلیت جایگزینی دارند. هدف ماکزیم‌سازی سود یک بنگاه بدون در نظر گرفتن سود بنگاه رقیب است. این مدل در شرکت‌های کالاهای فصلی مثل شرکت کولر کاربرد دارد. فروشنده‌ای را فرض کنید که کولری با برند تجاری خاص را به فروش می‌رساند: کولر جزء کالای فصلی به‌شمار می‌رود، از طرفی وجود برندهای تجاری دیگر در بازار باعث می‌شود که با افزایش قیمت، مشتریان کولر مشابه با برند تجاری دیگر را جایگزین کنند. بنابراین کالای مورد نظر جایگزین نیز می‌باشد. لذا این فروشنده می‌تواند با استفاده از مدل ارائه شده به بیشینه سود ممکن دست یابد.

بخش دوم تحقیق به مدل ریاضی و اثبات بهینگی تابع هدف و بخش سوم به الگوریتم و روش حل مدل می‌پردازد. و در نهایت مثال عددی و نتیجه‌گیری به‌ترتیب در بخش‌های بعدی آمده است.

## ۲- مدل‌سازی مسأله

در این تحقیق با توجه به فصلی بودن کالای مسأله، از قیمت‌گذاری پویا استفاده شده است. در این نوع قیمت‌گذاری، به ازای هر دوره در فصل فروش قیمت متفاوت خواهیم داشت. فرض بر اینست که دو کالای مسأله (a و b) هریک متعلق به بنگاه جداگانه‌ای هستند. در این مدل هدف تعیین قیمت کالای a و همچنین تعداد دوره بهینه برای رسیدن به ماکزیم سود بنگاه کالای a بدون در نظر گرفتن سود بنگاه کالای b است. در این مدل از مقاله یو و چن [۹] بهره گرفته شده است.

### ۲-۱- نمادها

در جدول (۱) نمادهای به‌کار رفته، نشان داده شده است.

جدول (۱): نمادهای به‌کار رفته در مدل

$L$ : فاکتور مثبت جایگزینی	$\beta_a, g_a, \alpha_a$ : ثابت‌های مثبت تقاضا برای کالای a
$M$ : مدت فصل فروش (ساعت)	$d_{a,t}$ : به‌ترتیب تقاضای کالای a در لحظه t
$n$ : تعداد دوره در فصل فروش	$S_a$ : میزان فروش کالای a
$T$ : طول هر دوره‌ی فروش (ساعت)	$I_{a,j}(t)$ : موجودی کالای a در دوره‌ی j و لحظه t
$h_a$ : هزینه‌ی نگهداری هر واحد از کالای a در واحد زمان (ساعت/واحد پولی)	$R_a(j)$ : میزان درآمد کالای a در دوره‌ی j (واحد پولی)
$c_0$ : هزینه تنظیم قیمت در هر دوره (واحد پولی)	$TR_a$ : میزان درآمد کالای a در کل فصل فروش (واحد پولی)
$c_s$ : هزینه تنظیم ارسال به ازای هر دفعه ارسال (واحد پولی)	$C_{a,j}$ : هزینه نگهداری موجودی کالای a در دوره‌ی j (واحد پولی)
$c_a$ : هزینه خرید هر واحد کالای a (واحد پولی)	$TC_a$ : هزینه نگهداری کالای a در کل فصل فروش (واحد پولی)
$pa_j$ : قیمت کالای a در دوره‌ی j (واحد پولی)	$q_a$ : میزانکل سفارش کالای a
$pb_j$ : قیمت کالای b در دوره‌ی j (واحد پولی)	$F$ : تابع سود کالای a در کل فصل فروش

می‌شوند. فرض‌های زیر برای مدل مسأله در نظر گرفته شده است:  
 ✓ مدل برای کالای فصلی یک بنگاه با فرض قابلیت جایگزینی با کالای مشابه بنگاه دیگر، ارائه می‌شود.

دادند. تقاضا تابع خطی قیمت هر دو محصول است. این مقاله تأثیر درجه جایگزینی بین دو محصول و سطح تأخیر عملیاتی را در ظرفیت بهینه و سود حاصله مورد مطالعه قرار می‌دهد. در این مقاله تأثیر ترخیص کالا بر روی درآمد بنگاه بررسی شده و نتیجه حاصله این بود ترخیص، درآمد بنگاه را در صورتی که کالاها وجه تمایز زیادی داشته باشند، بدتر می‌کند. سیاست موجودی خرده‌فروش برای دو کالای جایگزین و با تقاضای وابسته به موجودی توسط استاورولاکی [۱۹] بررسی شد. در این تحقیق تأثیر تحریک تقاضا و جایگزینی محصول بر تصمیمات موجودی در حالت تک دوره‌ای و تقاضای احتمالی بررسی شده است. برای حل از دو الگوریتم ابتکاری برای تعیین تقاضا و جایگزینی محصول به‌طور جدا استفاده شده و نتیجه حاصله این بود که سیاست بهینه موجودی با استفاده از اطلاعات فروش (جایگزینی و تقاضا) منجر به سود بیشتر می‌شود.

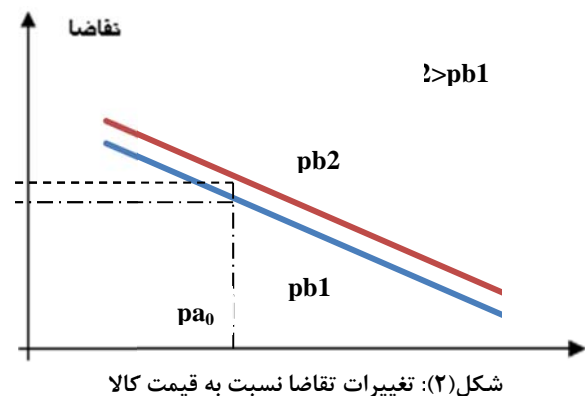
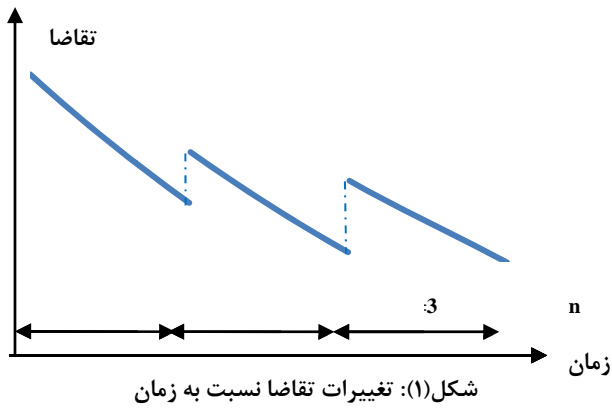
با توجه به مرور ادبیات انجام شده ملاحظه می‌شود که تحقیقات انجام شده در زمینه کالاهای فصلی جامع نیست. از طرفی دیگر قیمت‌گذاری و کنترل موجودی برای کالاهای فصلی و کالاهای جایگزین به‌طور مجزا انجام شده ولی تحقیقی در زمینه تعیین قیمت و سفارش این دو نوع کالا به‌صورت توأم انجام نشده است. با وجود کالاهای مشابه و حساسیت زیاد مشتریان به قیمت کالا، در صورت وجود تفاوت قیمتی دو کالای مشابه احتمال انصراف مشتری از خرید کالا و رفتن به سراغ کالای مشابه زیاد است. بنابراین نادیده گرفتن بحث جایگزینی کالاها منجر به سود غیرواقعی می‌شود. از طرفی دیگر کالاهای فصلی بدلیل محدودیت زمان فروش از اهمیت خاصی برخوردارند، بنابراین در این تحقیق قیمت‌گذاری و کنترل موجودی به‌صورت توأم برای کالاهای فصلی و جایگزین انجام شده که نوع جایگزینی بر مبنای مشتری و بر اساس تفاوت قیمتی در نظر گرفته شده است. تقاضا در مرور ادبیات یا وابسته به زمان، یا قیمت و یا وابسته به قیمت و زمان بود ولی در این تحقیق به‌دلیل وجود کالاهای فصلی تقاضا وابسته به زمان، و به‌دلیل قابلیت جایگزینی

## ۲-۲- مفروضات

تقریباً در تمامی مدل‌های قیمت‌گذاری و کنترل موجودی فرض‌هایی وجود دارد که برخی واقعی و برخی برای ساده‌سازی مدل استفاده

که در هر دوره ی  $j$ ، قیمت ثابت است ولی از دوره ای به دوره ی بعد کاهش می یابد. همان طور که از روی شکل مشخص است تقاضا در هر دوره با گذشت زمان به طور نمایی کم می شود. با شروع دوره ی بعدی مقدار قیمت کاهش می یابد و با توجه به رابطه (۱) کاهش قیمت باعث افزایش تقاضا می شود. از روی شکل نیز مشخص است که با شروع هر دوره ابتدا میزان تقاضا افزایش یافته ولی با گذشت زمان تعداد آن کاهش می یابد. در دنیای واقعی نیز چنین است، فرض کنید کالای فصلی کولر با فصل فروش ۳ ماهه و دوره های ۲۰ روزه مدنظر باشد: در ابتدای فصل فروش تقاضا و قیمت کولر زیاد است با گذشت زمان و با نزدیک شدن به پایان دوره ی اول تعداد تقاضا پایین می آید، با شروع دوره ی ۲۰ روزه دوم قیمت را کاهش می دهند که این باعث افزایش تقاضا می شود. دوباره با گذشت زمان و با نزدیک شدن به پایان دوره تقاضا کاهش می یابد و این روند تا انتهای فصل فروش ادامه دارد.

انتظار می رود که با افزایش قیمت، تقاضا کاهش یابد. از طرفی هر چه قیمت کالای رقیب ( $pb$ ) افزایش یابد، با توجه به جایگزینی بودن کالاها مشتریان بیشتری سراغ کالای  $a$  می آیند که این باعث افزایش تقاضا خواهد شد. شکل (۲) تغییرات تقاضا نسبت به قیمت کالا را در زمان مشخصی نشان می دهد. همان طور که از روی شکل مشخص است، تقاضا با افزایش قیمت به صورت خطی کاهش می یابد. همچنین در زمان و قیمت مشخص ( $pa_0$ )، وقتی قیمت کالای رقیب افزایش یافته ( $pb_2 > pb_1$ )، تقاضای کالای  $a$  به اندازه ی ( $da_2 - da_1$ ) بیشتر شده زیرا مشتریان بیشتری را جذب کرده است.



- ✓ بازار رقابتی در نظر گرفته شده در این مقاله حالت خاصی از بازار رقابتی است. در این بازار رقابتی فرض بر این است که در هر دوره ی ابتدا بنگاه رقیب (بنگاه  $b$ ) قیمت گذاری می کند سپس بنگاه  $a$  با توجه به قیمت معلوم کالای  $b$ ، قیمت کالای خود را تعیین می کند. همچنین قیمت-گذاری بنگاه  $b$  در هر دوره (با استثنای اولین دوره)، متأثر از قیمت کالای  $a$  در دوره ی قبلی است.
- ✓ افق زمانی محدود به طول فصل فروش است.
- ✓ تابع تقاضا وابسته به زمان، قیمت کالا و تفاوت قیمتی دو کالا است.
- ✓ مشتری به دلیل تفاوت قیمتی به سراغ کالایی با قیمت کمتر می رود.
- ✓ تابع هدف برای بنگاه (کالای  $a$ ) بهینه می شود.
- ✓ کالای فصلی مدنظر فساد پذیر نمی باشد.
- ✓ سفارش تنها در ابتدای فصل فروش انجام می شود.
- ✓ کمبود مجاز نیست.

### ۲-۳- توسعه مدل ریاضی

تابع تقاضا برای فروش لحظه ای برای کالای فصلی در مقاله ی چن و یونگ [۹] به صورت  $d(t, p) = ae^{-gt} - \beta p$  است که در این تابع، تقاضا وابسته به زمان ( $t$ ) و قیمت کالا ( $p$ ) است ولی در این مقاله اثر رقابتی کالاهای دیگر بر قیمت کالای موردنظر نادیده گرفته شده است. در مقاله ی دیگر تابع تقاضا برای دو محصول جایگزین  $a, b$  بصورت  $D_a = A_a - B_a p_a - L(p_a - p_b)$  در نظر گرفته شده است که  $A, B$  پارامترهای ثابت مسئله و  $L$  پارامتر جایگزینی است. در این مقاله تقاضا با گذر زمان تغییری نمی کند [۱۲]. با توجه به دو تابع تقاضای ذکر شده و اینکه در این مقاله دو محصول در نظر گرفته شده فصلی و جایگزین هستند، در نتیجه تابع تقاضای هر دو محصول در دوره ی  $j$  و در لحظه ی  $t$  به صورت زیر است که وابسته به زمان، قیمت کالا و تفاوت قیمتی دو کالای جایگزین است. عبارت اول تابع نشانگر فصلی بودن کالا است که در طی زمان تقاضا به صورت تابع نمایی کاهش می یابد. عبارت دوم وابستگی تابع را نسبت به قیمت کالا نشان می دهد و عبارت سوم بیانگر بحث جایگزینی است که با ثابت گرفتن قیمت کالای رقیب ( $pb_j$ )، افزایش قیمت کالا ( $pa_j$ ) منجر به کاهش تقاضا می شود. از ترکیب این سه رابطه می توانیم به رابطه توسعه یافته زیر دست یابیم:

$$d_a(t, pa_j) = \alpha_a e^{-g_a t} - \beta_a pa_j - L(pa_j - pb_j) \quad (1)$$

$$(j-1)T \leq t \leq jT, \quad 1 \leq j \leq n$$

که در آن  $T$  از تقسیم کل فصل فروش به تعداد دوره به دست می آید:  $T = \frac{M}{n}$  رابطه (۱) نشان می دهد که تقاضا نسبت به زمان نمایی نزولی و نسبت به قیمت و پارامتر جایگزینی ( $L$ ) خطی نزولی است. شکل (۱) تغییرات تقاضا را نسبت به زمان نشان می دهد. فرض شده است

موجودی، هزینه‌ی نگهداری در دوره‌ی ز به صورت زیر به دست می‌آید.

$$C_a(j) = \int_{(j-1)T}^{jT} I_{a,j}(t) h_a dt = \frac{e^{-2jTg_a} h_a}{2g_a^2} (2e^{Tg_a} (-1 + e^{Tg_a}) \alpha_a - 2e^{2jTg_a} T g_a \alpha_a + e^{2jTg_a} T g_a^2 ((1 - 2j) L T p b_j + (-1 + 2j) T p a_j (L + \beta_a) + 2(q_a - \sum_{j=1}^{-1+j} (L T p b_j - T p a_j (L + \beta_a)))))) \quad (4)$$

هزینه‌ی نگهداری کل، از مجموع هزینه‌های نگهداری هر دوره به دست می‌آید.

$$T C_a = \sum_{j=1}^n C_a(j) = \frac{(1 - e^{-2nTg_a}) h_a \alpha_a}{(1 + e^{-Tg_a}) g_a^2} - \frac{n T h_a \alpha_a}{g_a} + \frac{1}{2} T^2 h_a \beta_a \sum_{j=1}^n (-1 + 2j) p a_j + T^2 h_a \beta_a \sum_{j=1}^{-1+n} (-j + n) p a_j - \frac{1}{2} L T^2 h_a \sum_{j=1}^n (1 - 2j) (p a_j - p b_j) - L T^2 h_a \sum_{j=1}^{-1+n} (n - j) (p a_j - p b_j) + n T h_a \left( \frac{e^{-nTg_a} (-1 + e^{nTg_a}) \alpha_a}{g_a} + \sum_{j=1}^n (L T p b_j - T p a_j (L + \beta_a)) \right) \quad (5)$$

درآمد در هر دوره از حاصل ضرب میزان فروش و قیمت فروش در آن دوره به صورت زیر بدست می‌آید.

$$R_a(j) = S_a(j) p a_j \quad (6)$$

درآمد کل از مجموع درآمد در هر دوره قابل محاسبه است.

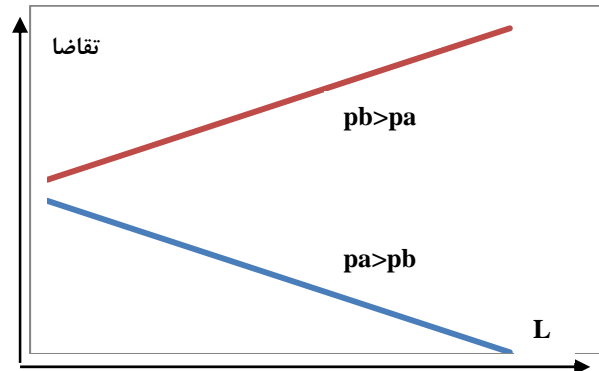
$$T R_a = \sum_{j=1}^n R_a(j) = \sum_{j=1}^n p a_j (L T p b_j + \frac{e^{-jTg_a} (-1 + e^{Tg_a}) \alpha_a}{g_a} - T p a_j (L + \beta_a)) \quad (7)$$

بر اساس معادلات بالا، اکنون می‌توان تابع سود سیستم موجودی را از معادله زیر محاسبه کرد:

$$F(n, p a_j) = \left( \text{هزینه نگهداری} - \text{هزینه خرید} - \text{درآمد فروش} \right) - \left( \text{هزینه راه اندازی ارسال} - \text{هزینه تنظیم قیمت} - q_a c_a - n c_0 - S_a(n) c_s = -n c_0 - \frac{(1 - e^{-2nTg_a}) h_a \alpha_a}{(1 + e^{-Tg_a}) g_a^2} + \frac{n T h_a \alpha_a}{g_a} - \frac{1}{2} T^2 h_a \beta_a \sum_{j=1}^n (-1 + 2j) p a_j - T^2 h_a \beta_a \sum_{j=1}^{-1+n} (-j + n) p a_j + \frac{1}{2} L T^2 h_a \sum_{j=1}^n (1 - 2j) (p a_j - p b_j) + L T^2 h_a \sum_{j=1}^{-1+n} (-j + n) (p a_j - p b_j) - c_a \left( \frac{e^{-nTg_a} (-1 + e^{nTg_a}) \alpha_a}{g_a} + \sum_{j=1}^n (L T p b_j - T p a_j (L + \beta_a)) \right) - c_s \left( \frac{e^{-nTg_a} (-1 + e^{nTg_a}) \alpha_a}{g_a} + \sum_{j=1}^n (L T p b_j - T p a_j (L + \beta_a)) \right) - n T h_a \left( \frac{e^{-nTg_a} (-1 + e^{nTg_a}) \alpha_a}{g_a} + \sum_{j=1}^n (L T p b_j - T p a_j (L + \beta_a)) \right) + \sum_{j=1}^n p a_j (L T p b_j + \frac{e^{-jTg_a} (-1 + e^{Tg_a}) \alpha_a}{g_a} - T p a_j (L + \beta_a)) \right) \quad (8)$$

از آنجایی که کالا فصلی است، منظور از هزینه تنظیم قیمت ( $n c_0$ ) هزینه‌ای است که در هر دوره برای تغییر قیمت و قیمت گذاری مجدد صرف می‌شود. همچنین هزینه راه اندازی ارسال

افزایش پارامتر جایگزینی  $L$  در دنیای واقعی به معنی افزایش تعداد مشتریانی است که به ازای یک واحد اختلاف قیمتی، کالای ارزانتر را جایگزین می‌کنند. اگر قیمت کالای مدنظر از قیمت کالای رقیب بیشتر باشد، افزایش  $L$  بدین معنی است که مشتریان بیشتری از دست خواهیم داد و تقاضا کاهش می‌یابد و در صورتی که قیمت کالای مدنظر از قیمت کالای رقیب کمتر باشد، با افزایش  $L$  تقاضا افزایش خواهد یافت. شکل (۳) بیانگر این موضوع است.



شکل (۳): تغییرات تقاضا نسبت به پارامتر جایگزینی  $L$

میزان فروش در کل فصل فروش از مجموع فروش هر دوره به دست می‌آید. همچنین واضح است به دلیل مجاز نبودن کمبود، میزان فروش در هر دوره به اندازه‌ی مقدار تقاضای دوره است. مقدار سفارش کالا برابر با میزان کل فروش در طی فصل فروش است.

$$q_a = S_a(n) = \sum_{j=1}^n S_a(j) = \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)T}^{jT} d_a(t, p a_j) dt = \frac{e^{-nTg_a} (-1 + e^{nTg_a}) \alpha_a}{g_a} + \sum_{j=1}^n (L T p b_j - T p a_j (L + \beta_a)) \quad (1)$$

$I_{a,j}(t)$  میزان موجودی کالای  $a$  در دوره‌ی  $j$  ام و در لحظه‌ی  $t$  می‌باشد. از معادلات دیفرانسیل داریم:

$$\frac{d I_{a,j}(t)}{dt} = -d_i((j-1)T + t, p a_j) \quad 0 \leq t \leq T, \quad 1 \leq j \leq n \quad (2)$$

موجودی در شروع هر دوره از تفاضل میزان سفارش و میزان کل فروش از شروع فصل تا پایان دوره‌ی قبل به دست می‌آید بنابراین داریم:  $I_{i,j}(0) = q_i - S_i$ . معادله (۳)، میزان موجودی در دوره‌ی  $j$  و در لحظه‌ی  $t$  از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$I_{a,j}(t) = q_a - S_a(j-1) - \int_{(j-1)T}^{(j-1)T+t} d_a(t, p a_j) dt = -L t p b_j + q_a - \frac{\alpha_a}{g_a} + \frac{e^{-(t + (-1+j)T)g_a} \alpha_a}{g_a} + t p a_j (L + \beta_a) - \sum_{j=1}^{-1+j} (L T p b_j - T p a_j (L + \beta_a)) \quad (3)$$

هزینه نگهداری در هر دوره بستگی به میزان موجودی آن دوره دارد. با انتگرال‌گیری حاصل ضرب موجودی لحظه‌ای و هزینه

مرحله ۶ برآید.

(۴)  $pa_j$  را از روی رابطه (۱۴) محاسبه کنید:

(۴.۱) اگر مقدار  $pa_j$  به دست آمده در محدودیت (۱۰) صدق کند،

در این صورت  $pa_j^*$  برابر با  $pa_j$  به دست آمده خواهد بود.

(۴.۲) در غیر این صورت، با توجه به محدودیت (۱۰) مقدار  $pa_j^*$

$$\text{برابر خواهد بود با: } \frac{\alpha_a e^{-ga_j T + Lpb_j}}{\beta_a + L}$$

(۵)  $j = j+1$ ، سپس به مرحله ۳ بازگردید.

(۶) مقدار  $F(n, pa_j^*)$  را از رابطه (۹) و مقدار  $q_a^*$  را از رابطه (۲)

محاسبه کنید.

(۷) اگر  $F(n, pa_j^*) > F^*$  در این صورت قرار دهید:

$$n=N, \quad pa_j = pa_j^*, \quad q_a = q_a^*, \quad F^* = F(n, pa_j^*)$$

(۸)  $n=n+1$  و به مرحله ۲ بازگردید.

(۹) الگوریتم پایان می یابد و خروجی مرحله ۷ جواب نهایی است.

#### ۴- مثال عددی

فرض کنید دو بنگاه و دو کالا وجود دارد که کالای  $a$  مربوط به بنگاه ۱ و کالای  $b$  مربوط به بنگاه ۲ می باشند. هر دو کالا فصلی و قابلیت جایگزینی با هم را دارند. جایگزینی بر مبنای مشتری و از نوع تفاوت قیمتی است. می خواهیم سود بنگاه ۱ را بدون توجه به سود بنگاه ۲ ماکزیم کنیم. با فرض اطلاع از قیمت کالای  $b$  که در جدول (۲) آمده است و با توجه به مفروضات زیر، هدف تعیین مقدار بهینه قیمت کالای  $a$  در هر دوره  $(pa_j)$  و تعداد بهینه دوره  $(n)$  می باشد. با توجه به پویا بودن مسأله  $n=1$  صرف نظر کرده و مسأله را برای  $n \geq 2$  حل می کنیم.

قیمت خرید کالای  $a$  در ابتدای فصل فروش (واحد پولی)  $c_a=3$  است که در طی فصل به فروش می رود. طول فصل فروش  $M=1200$  واحد زمانی (ساعت) است. هزینه نگهداری، هزینه تنظیم قیمت در هر دوره و هزینه ارسال به ترتیب (ساعت/واحد پولی)  $h_a=0.003$  (واحد پولی)  $c_0=100$  و،  $c_s=1$  (واحد پولی) می باشد. همچنین تابع تقاضا برای این کالا بصورت زیر است:

$$d_{t,a}(pa_j) = 10e^{-0.001t} - 0.7pa_j - (pa_j - pb_j)$$

بیشترین تعداد مجاز دوره قیمت گذاری  $N_{max}=6$  می باشد (برخی داده ها از [۹] گرفته شده است).

با حل این مثال در نرم افزار Mathematica 8.0.1 میزان سود، مقدار سفارش و قیمت کالا به ازای  $n=2-6$  در جدول (۳) آمده است. با توجه به مقادیر بدست آمده مشخص است که به ازای  $n=5$  تابع هدف بیشترین مقدار خود را دارد. بنابراین بنگاه با تقسیم فصل (۱۲۰۰ ساعتی) به ۵ دوره ۲۴۰ ساعتی، و با قیمت و مقدار سفارش به دست آمده می تواند به ماکزیم سود خود دست یابد.  $n=5$  بدین معناست که کل فصل فروش به ۵ دوره تقسیم می شود که به ازای هر دوره، قیمت مشخصی خواهیم داشت. مقادیر بهینه قیمت ۸.۵۳، ۷.۰۶، ۵.۶۷، ۴.۷۷ و ۳.۵۵ به ترتیب در بازه های زمانی [۲۴۰،

$(S_a(n))c_s$  شامل هزینه بارگیری و تخلیه می باشد که به ازای هر ارسال در نظر گرفته می شود. در این مدل تعداد دفعات ارسال برابر تعداد کالای به فروش رفته  $(S_a(n))$  است.

محدودیت های مسأله بصورت زیر است:

$$d_a(t, pa_j) \geq 0 \rightarrow pa_j \leq \frac{\alpha_a e^{-ga_j T + Lpb_j}}{\beta_a + L} \quad (9)$$

$$n \leq N_{max} \quad (10)$$

در این مرحله مسأله اصلی یافتن جواب های بهینه برای  $pa_j, n$  است به طوری که با این جواب ها تابع سود ماکزیم شود. برای سهولت در محاسبات  $n$  را ثابت گرفته و برای مقدار مشخص  $n$   $pa_j$  را برای هر دوره محاسبه کرده سپس با به ازای  $n$  های مختلف مقدار تابع هدف را محاسبه می کنیم. مقدار  $n$  ای که تابع هدف را ماکزیم کند،  $n$  بهینه خواهد بود.

ابتدا بایستی ثابت کنیم که تابع هدف مقعر و دارای نقطه ماکزیم است. با توجه به اینکه تابع هدف از توابع درجه ۲ است، با مشتق دوم تابع هدف می توان به مقعر و یا محدب بودن تابع هدف پی برد.

قضیه ۱: برای هر مقدار مشخص  $n$ ، تابع  $F(n, pa_j^*)$  مقعر است.

اثبات: برای اثبات ثقلر تابع هدف مشتق دوم تابع را نسبت به قیمت کالای  $a$  به دست می آوریم.

$$\frac{\partial F}{\partial pa_j} = \frac{1}{2}LT^2h_a - 2jLT^2h_a + 2LnT^2h_a - 2LTpa_j + LTpb_j + \frac{e^{-(1+j)Tga\alpha_a} - e^{-jTga\alpha_a}}{g_a} + \frac{1}{2}T^2h_a\beta_a - 2Tpa_j\beta_a + Tc_a(L + \beta_a) + Tc_s(L + \beta_a) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial pa_j^2} = -2T(\beta_a + L) \quad (12)$$

از آنجا که  $L$  و  $\beta_a$  مثبت هستند، در نتیجه رابطه (۱۳) منفی است. لذا تابع هدف مقعر و دارای نقطه ماکزیم است.

#### ۳- روش حل

مسأله اصلی یافتن جواب بهینه  $n$  و  $pa_j^*$  در هر دوره  $j$  است. با ثابت گرفتن  $n$  مقدار  $pa_j$  را می توان از طریق حل رابطه (۱۲) به دست آورد:

$$\frac{\partial F}{\partial pa_j} = \frac{1}{2}LT^2h_a - 2jLT^2h_a + 2LnT^2h_a - 2LTpa_j +$$

$$LTpb_j + \frac{e^{-(1+j)Tga\alpha_a} - e^{-jTga\alpha_a}}{g_a} + \frac{1}{2}T^2h_a\beta_a -$$

$$2Tpa_j\beta_a + Tc_a(L + \beta_a) + Tc_s(L + \beta_a) = 0 \rightarrow$$

$$pa_j = \left( -\frac{1}{2}LT^2h_a + 2jLT^2h_a - 2LnT^2h_a - LTpb_j - \frac{e^{-(1+j)Tga\alpha_a} + e^{-jTga\alpha_a}}{g_a} - \frac{1}{2}T^2h_a\beta_a - Tc_a(L + \beta_a) - Tc_s(L + \beta_a) \right) / (-2T(L + \beta_a)) \quad (13)$$

#### ۳-۱- الگوریتم حل

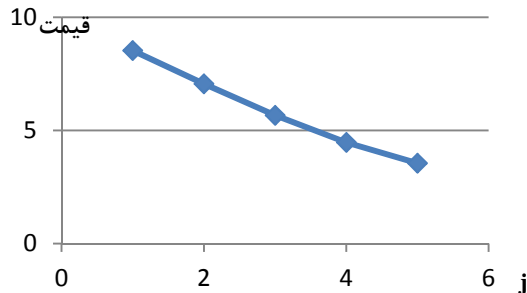
(۱) ابتدا مقادیر  $n=2, n=N, n=N$  و  $j=1$  را  $F^*(n, pa_j) = 0$  در نظر

بگیرید.

(۲) اگر  $n \leq N_{max}$ : گام های ۸-۳ را انجام دهید وگرنه به ۹ بروید.

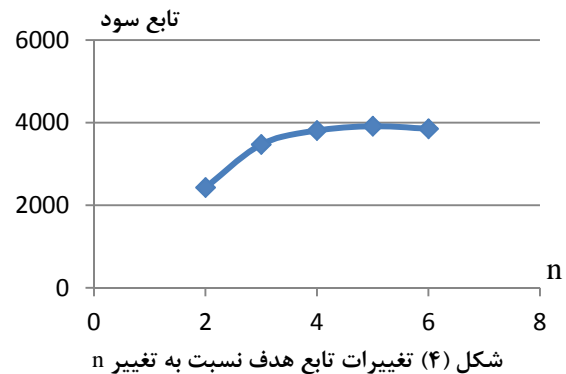
(۳) تا زمانی که  $n < j$  باشد مراحل ۴ تا ۵ را انجام دهید وگرنه به

بایستی قیمت فروش کالا به تدریج کم شود. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که قیمت کالای  $a$  با نزدیک شدن به انتهای فصل فروش کمتر می‌شود. شکل (۵) تغییرات قیمت را در  $n=5$  به ازای  $z$  نشان می‌دهد.



شکل (۵): تغییرات قیمت کالای  $a$  با گذشت زمان در طی فصل فروش به ازای  $n=5$

شکل زیر تغییرات تابع هدف را نسبت به  $n$  های مختلف نشان می‌دهد.



همانطور که از روی شکل مشخص است، میزان سود با افزایش  $n$  افزایش یافته و در  $n=5$  بیشترین مقدار خود را دارد. بنابراین به ازای  $N_{max}=6$ ، تعداد دوره بهینه ۵ است. با توجه به فصلی بودن کالا، مشخص است که در طی فصل فروش

جدول (۲): قیمت کالای  $b$  به ازای دوره‌های مختلف

n	۲		۳			۴					
	۱	۲	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۴		
pb <sub>j</sub> (واحد پولی)	۵.۵۵	۳.۱۱	۶.۶۸	۴.۴۶	۳.۰۵	۶.۸۴	۵.۴۱	۴.۰۱	۳.۰۲		
n	۵					۶					
	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶
pb <sub>j</sub> (واحد پولی)	۶.۹۵	۵.۸۲	۴.۷۷	۳.۷۷	۳.۰۲	۷.۱۲	۶.۲۵	۵.۱۶	۴.۳۲	۳.۶۵	۳.۰۱

جدول (۳): نتایج حاصل از الگوریتم حل مدل

n	۲		۳			۴					
	۱	۲	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۴		
pa <sub>j</sub> (واحد پولی)	۶.۴۹	۳.۶	۷.۸۷	۵.۲۷	۳.۵۷	۸.۳۷	۶.۴۱	۴.۷۵	۳.۵۵		
F (واحد پولی)	۲۴۲۲.۰۲		۳۴۷۸.۱۴			۳۸۰۹.۸۹					
q <sub>a</sub>	۱۸۹۲		۱۳۰۱			۱۰۰۱					
n	۵					۶					
	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶
pa <sub>j</sub> (واحد پولی)	۸.۵۳	۷.۰۶	۵.۶۷	۴.۴۷	۳.۵۵	۸.۶۷	۷.۵۸	۶.۲۶	۵.۱۸	۴.۳۱	۳.۵۴
F (واحد پولی)	۳۹۲۷.۱۴					۳۸۸۷.۶۳					
q <sub>a</sub>	۸۸۱					۸۰۶					

جدول (۴): حل مدل با توجه به  $L$  های مختلف

L=0	n	۲		۳			۴					
	j	۱	۲	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۴		
	pa <sub>j</sub> (واحد پولی)	۷.۸۲	۴.۳	۸.۱۹	۶.۲۵	۴.۳	۸.۴	۶.۸	۵.۶۱	۴.۳		
	F (واحد پولی)	۲۵۰۱.۸۸		۲۶۸۳.۱۲			۲۶۰۴.۷۴					
	q <sub>a</sub>	۱۸۹۸		۱۷۴۱			۱۷۱۵					
	n	۵					۶					
	j	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	pa <sub>j</sub> (واحد پولی)	۸.۵	۷.۱۸	۶.۱۱	۵.۲۷	۴.۳	۸.۶۲	۷.۴۵	۶.۴۹	۵.۷	۵.۰۶	۴.۳
	F (واحد پولی)	۲۴۹۲					۲۳۷۵.۱۲					
	q <sub>a</sub>	۱۷۱۴					۱۷۲۱					
L=1	n	۲		۳			۴					
	j	۱	۲	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۴		
	pa <sub>j</sub> (واحد پولی)	۶.۴۹	۳.۶	۷.۸۷	۵.۲۷	۳.۵۷	۸.۳۷	۶.۴۱	۴.۷۵	۳.۵۵		
	F (واحد پولی)	۲۴۲۲.۰۲		۳۴۷۸.۱۴			۳۸۰۹.۸۹					
	q <sub>a</sub>	۱۸۹۲		۱۳۰۱			۱۰۰۱					
	n	۵					۶					
	j	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	pa <sub>j</sub> (واحد پولی)	۸.۵۳	۷.۰۶	۵.۶۷	۴.۴۷	۳.۵۵	۸.۶۷	۷.۵۸	۶.۲۶	۵.۱۸	۴.۳۱	۳.۵۴
	F (واحد پولی)	۳۹۲۷.۱۴					۳۸۸۷.۶۳					
	q <sub>a</sub>	۸۸۱					۸۰۶					
L=5	n	۲		۳			۴					
	j	۱	۲	۱	۲	۳	۱	۲	۳	۴		
	pa <sub>j</sub> (واحد پولی)	۵.۸۳	۳.۲۶	۷.۰۴	۴.۷	۳.۲	۷.۳	۵.۷۱	۴.۲۳	۳.۱۸		
	F (واحد پولی)	۲۴۰۳.۹۵		۴۱۳۲.۱۲			۵۰۱۹.۹۹					
	q <sub>a</sub>	۱۸۸۰		۱۳۰۵			۹۹۰					
	n	۵					۶					
	j	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	pa <sub>j</sub> (\$) (واحد پولی)	۷.۴۸	۶.۱۹	۵.۰۴	۳.۹۸	۳.۱۸	۷.۶۸	۶.۶۶	۵.۴۹	۴.۵۸	۳.۸۵	۳.۱۷
	F (واحد پولی)	۵۵۲۵.۹۸					۵۷۱۴.۷۵					
	q <sub>a</sub>	۷۹۴					۶۶۸					

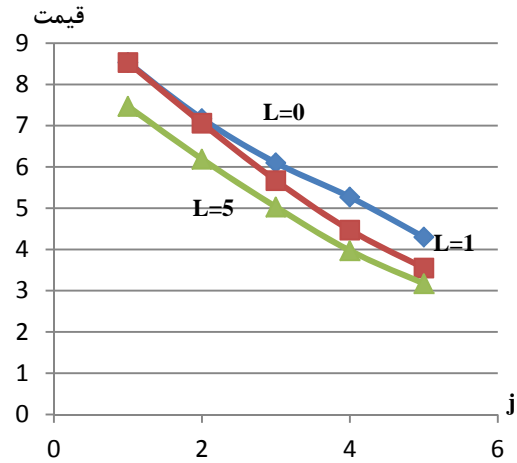
می‌روند. در نتیجه با افزایش  $L$  بایستی قیمت کالا را کاهش داد تا مشتریان بیشتری جذب شده و سود افزایش یابد.

همان‌طور که از روی شکل (۶) مشخص است با افزایش  $L$  قیمت کاهش می‌یابد. دلیل کاهش قیمت این است که مشتریان حساس به قیمت هستند و جذب مشتری بستگی به قیمت کالا دارد، از طرفی افزایش پارامتر جایگزینی  $L$  نشان‌دهنده یا افزایش تعداد مشتریانی است که به ازای هر واحد اختلاف قیمتی به سراغ کالای ارزان‌تر



## مراجع

- [1] Chopra, S., Meindl, P. (2007). Supply chain management Strategy, Planning, and Operations. (3rd Ed). New jersey: Prentice-Hall.
- [2] Abad, P.L. (2003). Optimal price and lot size when the supplier offers a temporary price reduction over an interval. Computers & Operations Research, 30: 63-74.
- [3] Boyacı, T., Gallego, G. (2002). Coordinating pricing and inventory replenishment policies for one wholesaler and one or more geographically dispersed retailers, International Journal of Production Economics, 77: 95-111.
- [4] Huang, Y., Huang, G., Newman, S. (2011). Coordinating pricing and inventory decisions in a multi-level supply chain: A game-theoretic approach. Transportation Research Part E, 47: 115-129.
- [5] Kim, D., Lee, W.J. (1998). Optimal joint pricing and lot sizing with fixed and variable capacity. European Journal of Operational Research, 109: 212-227.
- [6] Maihami, R., Nakhai, I. (2012). Joint pricing and inventory control for non-instantaneous deteriorating items with partial backlogging and time and price dependent demand, Journal of Production economics, 136: 116-122.
- [7] Heng, J. (1995). Price and Quantity Setting for Seasonal Retail Goods with Stochastic Demands. Senior Thesis.
- [8] Aviv, Y., Pazgal, A. (2008). Optimal Pricing of Seasonal Products in the Presence of Forward-Looking Consumers. and Prospects. Journal of manufacturing and service operations management. 10: 339-359.
- [9] You, S.P., Chen, C.T. (2007). Dynamic pricing of seasonal goods with spot and forward purchase demands. Journal of Computers and Mathematics with Applications, 54: 490-498.
- [10] Yu, K. (2008). Seasonal Commodities in the CPI: An Economic Inquiry.
- [11] Soysal, G.P., Krishnamurthi, L. (2009). Demand Dynamics in the Seasonal Goods Industry: An Empirical Analysis. Journal of marketing science, 31: 293-316.
- [12] Kim, S., Bell, P.C. (2011). Optimal pricing and production decision in the presence of symmetrical and asymmetrical substitution. Omega, 39: 528-538.
- [13] Bitran, G., Caldentey, R., Vial, R. (2005). Pricing policies for perishable products with demand substitution.
- [14] Bukart, W., Klein, R., Mayar, S. (2012). Product line pricing for services with capacity constraints and dynamic substitution. European Journal of Operational Research. 219: 347-359.
- [15] Dong, L., Kouvelis, P., Tian, Z. (2009). Dynamic pricing and inventory control of substitute products. Journal of manufacturing and service operations management, 11: 317-339.
- [16] Karakul, M., Chan, L., 2008. Analytical and managerial implications of integrating product substitutability in the joint pricing and procurement problem. European Journal of Operational Research, 190: 179-204.
- [17] Karakul, M., Chan, L.M.A. (2010). Joint pricing and procurement of substitutable products with random demands- A technical note. European Journal of Operational Research, 201: 324-328.
- [18] Bish, E., Suwandechochai, R. (2010). Optimal capacity for substitutable products under operational postponement. European Journal of Operational Research, 207: 775-783.
- [19] Stavroulaki, E. (2011). Inventory decisions for substitutable products with stock-dependent demand. production Economics, 129: 65-78.



شکل (۶): تغییرات قیمت نسبت به گذشت زمان در دوره مشخص (n=5) و با Lهای مختلف

## ۵- نتیجه‌گیری

مهم‌ترین نتایج حاصله را می‌توان بطور خلاصه در موارد زیر ذکر کرد:

۱. تعیین قیمت کالاهای فصلی بدلیل تغییر تقاضا در طی فصل فروش بایستی بصورت پویا انجام شود.
  ۲. بدلیل تنوع کالاهای مشابه در بازار، کالاهای فصلی می‌تواند جایگزینی هم باشد. در نظر نگرفتن این موضوع منجر به تخمین نادرستی از تقاضا و سود می‌شود.
  ۳. همان‌طور که از نتایج جدول (۳) و نمودار مربوط به شکل (۵) مشخص است، قیمت کالای فصلی در طی زمان کاهش می‌یابد و این کاهش قیمت در اوایل فصل بیشتر از اواخر آن است.
  ۴. با توجه به نتایج عددی بدست آمده در جدول (۴)، با افزایش L، قیمت کالا کاهش می‌یابد. بنابراین در صورتی که پارامتر جایگزینی افزایش یابد، بنگاه بایستی قیمت کالای خود را کاهش دهد تا علاوه بر حفظ مشتریان خود، مشتریان کالای رقیب را نیز جذب کند.
- برای تحقیقات آتی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:
- ✓ حل مدل در شرایط غیررقابتی (کالاهای قابل جایگزین مربوط به یک بنگاه باشند و یا کالاها مربوط به دو بنگاه مجزا باشند ولی تابع هدف ماکزیم‌سازی سود کلی بنگاه‌ها در نظر گرفته شود) و مقایسه نتایج با نتایج بازار رقابتی
  - ✓ در این تحقیق جایگزینی بر مبنای مشتری و بر اساس تفاوت قیمتی در نظر گرفته شد، در تحقیقات آتی جایگزینی می‌تواند بر اساس کمبود موجودی و یا بر مبنای تأمین‌کننده باشد.
  - ✓ در نظر گرفتن تابع تقاضا به صورت احتمالی
  - ✓ در این تحقیق تنها یک سطح زنجیره‌تأمین (خرده‌فروش) در نظر گرفته شده است. در تحقیقات آتی می‌توان دو یا سه سطح زنجیره‌تأمین را همزمان در نظر گرفته و به صورت همزمان قیمت و سیاست موجودی را برای آنها تعیین کرد.
  - ✓ در نظر گرفتن فاکتور کیفیت در مدل مسأله





## Joint pricing and inventory control for seasonal and substitute goods

N. Rasouly<sup>1</sup>, I. Nakhai Kamalabadi\*<sup>1,2</sup> and H. Mohammadi pour<sup>1</sup>

1. Department of Industrial Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran
2. Department of Industrial Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj

### ARTICLE INFO

#### **Article history:**

Received: 24 Jul 2013

Accepted: 28 December 2013

#### **Keywords:**

Pricing

Inventory control

Seasonal and substitute goods

Competitive market

### ABSTRACT

Because of the finite sale period, the inventory and market management of the seasonal goods is important. Also; in the competitive market, the price differences among market segments lead customers to substitute the similar cheaper goods with the expensive ones. We called this substitution "customer-based price driven substitution". In this paper the joint pricing and inventory control for the seasonal and substitute goods is developed. We assume that two substitute goods belong to two different rival firms. The objective is to determine the optimal price, order quantity and the number of periods for one product such that the total profit is maximized. We first prove that the objective function is concave and have an optimum solution. Next we present an exact algorithm to determine the optimal solutions. Finally, we solve a numerical example for determination the efficiency of the model and algorithm.

\* Corresponding author.

Tel.: +98 871 6624775; E-mail addresses: [nakhai@modares.ac.ir](mailto:nakhai@modares.ac.ir)